回転流体に現れる分散性の数学解析

(Mathematical analysis for dispersion phenomena in rotating fluids)

高田　了
(東北大学 大学院理学研究科 数学専攻)

大気や海洋を代表とする大規模流体において，回転の効果が流れの様相に及ぼす影響を，偏微分方程式の観点から考察する．回転の効果を取り入れた流体の基礎方程式として，次の非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題について考察する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + 2\Omega e_3 \times u = \nu \Delta u - \dfrac{1}{\rho}\nabla p & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで，$u = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)), p = p(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場および圧力を表す未知関数であり，正定数 ν, ρ はそれぞれ流体の動粘性係数および密度を表す．第 1 方程式の左辺第 3 項が回転の効果による Coriolis 力であり，実定数 Ω は鉛直軸 $e_3 = (0,0,1)$ の周りでの系の角周波数に対応する．

本講演では，上記の系の時間大域的可解性について考察する．特に，固定座標系 ($\Omega = 0$) と比較した際に，回転の効果が系の可解性に与える影響を，初期速度場 u_0 の大きさと回転速度の観点から精密に特徴付けることを目的とする．回転効果による Coriolis 力 $2\Omega e_3 \times u$ を歪対称線形作用素 $L_\Omega u$ とみなした際に，L_Ω から生成される時間発展群において次の振動積分が現れることが知られている：

$$e^{\pm 2i\Omega t \frac{D_3}{|D|}} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi \pm 2i\Omega t \frac{\xi_3}{|\xi|}} \widehat{f}(\xi) d\xi \qquad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3.$$

本講演では，上記の時間発展群 $e^{\pm 2i\Omega t \frac{D_3}{|D|}}$ に対して得られた最適な時間減衰評価および時空積分評価を紹介する．またその応用として，Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考察し，系の時間大域的可解性を保証する初期速度場の大きさと回転速度との関係式について述べる．

[1] Tsukasa Iwabuchi and Ryo Takada, *Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Math. Ann. **357** (2013), 727-741.

[2] Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee and Ryo Takada, *Strichartz estimates for the Euler equations in the rotational framework*, J. Differential Equations **256** (2014), 707–744.

プロフィール
高田 了 (たかだ りょう) 東北大学大学院理学研究科数学専攻 助教

2011 年 東北大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程修了．東北大学大学院理学研究科，京都大学大学院理学研究科での日本学術振興会特別研究員 PD を経て現職に至る．専門は流体力学に現れる非線形偏微分方程式の数学解析．