データが与えられたとき，そのデータの分布の中心を表す統計量として，平均値や中央値などの統計量がありました．では，ある確率変数の確率分布に対して，その確率分布の「中心」はどのように考えればよいでしょうか？この問題に対する 1 つの答が「期待値」です．

離散確率変数の期待値

例題 1　2 つのくじ「くじ 1」と「くじ 2 [illegible] 円，「くじ 2」での賞金額を Y 円とおく [illegible] の確率分布は以下の表のようにな [illegible]

くじ	3 等の [illegible]	[illegible]	[illegible] 金とその確率
X	[illegible]	[illegible]	1000 円／確率 0.05
Y	[illegible]	[illegible] .14	5000 円／確率 0.01

どちらか [illegible] らのくじを引くほうが得か考えなさい．

仮に両方のくじ [illegible] としましょう．すると，「くじ 1」では，約 800 回は 0 円，150 回は 100 [illegible] 回は 1000 円が得られることが期待されます．よって，平均としては 1 回あたり，

$$0 \times 0.8 + 100 \times 0.15 + 1000 \times 0.05 = 65 \text{ 円}$$

得ることが期待されます．同様に，「くじ 2」では 1 回あたり平均で

$$0 \times 0.85 + 100 \times 0.14 + 5000 \times 0.01 = 64 \text{ 円}$$

得ることが期待されます．したがって，1 回あたりに期待される賞金額という意味では「くじ 1」の方が得，と考えることが出来ます．

例題 1 において，「くじ 1」を 1 回引いたときに期待される賞金額の値を確率変数 X の**期待値**といい，$E(X) = 65$ と表します．ここで "E" は，英語で期待の意味を表す Expectation の頭文字で，$E(X)$ で「確率変数 X の期待値」という意味になります．「くじ 2」についても同様に表すと，確率変数 Y の期待値は $E(Y) = 64$ となります．

一般的に，離散確率変数 X について，X のとりうる値が $x_1, \cdots, x_k$ で，確率分布が，

$$p(x_1) = p_1, p(x_2) = p_2, \cdots, p(x_k) = p_k$$

で与えられるとき，確率変数 X の期待値 $E(X)$ は次のように定義されます．

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k = \sum_{i=1}^{k} x_ip_i$$

練習問題

確率変数 X を，確率 p で表が出るコインを投げ，表が出たら $X=1$，裏が出たら $X=0$ となる確率変数とするとき（すなわち X が確率 p のベルヌーイ分布に従うとき），X の期待値を求めなさい．

練習問題の解説

X の確率分布は，

$$p(1) = \Pr(X=1) = p, \quad p(0$$

となります．よって期待値の定義から

E

となります．つま … 値は p となります．

期待値の

例題 2　全て … コロを 1 回投げ，出た目の 10 倍の賞金がもらえるという．た … して 30 円とられる．サイコロの出た目を表す確率変数を X，利益（… 加費）を表す確率変数を Y とするとき，X と Y の期待値を求めなさい．

X の確率分布は，以下のようになる．

X	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

また，$X=1$ のとき $Y=-20$，$X=2$ のとき $Y=-10$，・・・，$X=6$ のとき $Y=30$ となるので，Y の確率分布は

Y	-20	-10	0	10	20	30
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

となる．よって期待値の定義から，

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$
$$E(Y) = (-20) \times \frac{1}{6} + (-10) \times \frac{1}{6} + \cdots + 30 \times \frac{1}{6} = 5$$

ところで，例題 2 では，「利益」は「賞金−参加費」なので，X と Y の間には，$Y = 10X - 30$ という関係があり，さらに期待値についても $E(Y) = 10E(X) - 30$ という関係が成り立っていることも確認できます．一般的に，定数 a, b に対して，$aX + b$ の期待値は

$$E(aX + b) = aE(X) + b \tag{1}$$

となります．

例題 3　大小 2 つのサイコロを投げ，大きいサイ [illegible] を X，小さいサイコロの出た目を表す確率変数を [illegible] 率変数を Z とする．X, Y, Z の期待値 [illegible]

X の期待値 $E(X)$ と Y [illegible]

[illegible] $6 = 3.5$

となります． [illegible] うになります．

Z	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6	7	8	9	10	11	12
確率	1/36	2/[illegible]	[illegible]	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

よって期待値の定義から，

$$E(Z) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

となります．

例題 3 では，X, Y, Z の間に $Z = X + Y$ という関係があり，期待値も $E(Z) = E(X) + E(Y)$ となっています．一般的に，2 つの確率変数 X と Y の和 $X + Y$ の期待値は，

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{2}$$

となります．

(1) と (2) の性質をあわせて**期待値の線形性**といいます．2 つの性質を組み合わせると，以下の公式も導けます[*1]．

[*1] (3) において $Y = 1$（常に 1 をとる確率変数）とすると (1) となり，$a = b = 1$ とすると (2) となるので，(3) は (1) と (2) の性質を同時に表現しています．

定数 a, b に対して，

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \tag{3}$$

この性質を応用すると，例えば，大小２つのサイコロを振り，大き… コロの出目の 100 倍と小さいサイコロの出目の 10 倍の和の期待値は，$3.5\times$ … $=385$ と容易に計算できます．

例題 4 サイコロを投げ，出た目を表す確… 変数を Y とする（すなわち $Y=X^2$）…

まず Y は X の関数であ… の確率分布は以下の表のよう…

[illegible]	[illegible]	36
[illegible]	1/6	1/6

よって期待値は

$$1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+\cdots+36\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

となります．$Y=X^2$ ですが，$E(Y)\neq(E(X))^2$ である点に注意しましょう．

一般的に $Y=g(X)$ という確率変数の期待値は

$$\begin{aligned}E(Y)&=g(x_1)p_1+g(x_2)p_2+\cdots+g(x_k)p_k\\&=\sum_{i=1}^{k}g(x_i)p_i\end{aligned}$$

と書けます．例題 4 でも確認したように，$E(g(X))\neq g(E(X))$ であることに注意しましょう．

練習問題

(1) $X_1,\cdots,X_5$ を確率 p のベルヌーイ分布に従う確率変数とし，$Y=X_1+X_2+\cdots+X_5$ とする（Y は表が出る確率が p のコインを 5 回投げて表が出る回数を表し，二項分布に従う）．Y の期待値を求めなさい．

(2) サイコロを投げ，出た目を表す確率変数を X とする．$Y=\left(X-\frac{7}{2}\right)^2$ とおくとき，Y の期待値を求めなさい．

練習問題の解説

(1) Y の確率分布を求めてから期待値の定義に従って求めても良いですが，期待値の線形性を使うと簡単に計算できます．$X_1, \cdots, X_5$ はいずれも期待値は p となります：

$$E(X_1) = \cdots = E(X_5) = p$$

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$ であることと，期待

$$E(Y) = E(X_1) +$$

となります．一般的に， なります．

(2) (1) と違い の確率分布は以下の

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	5	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$5/2$
[illegible]	[illegible]	$9/4$	$1/4$	$1/4$	$9/4$	$25/4$
[illegible]	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

よって，Y の期待値は

$$E(Y) = \frac{25}{4} \times \frac{1}{6} + \cdots + \frac{25}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

となります．