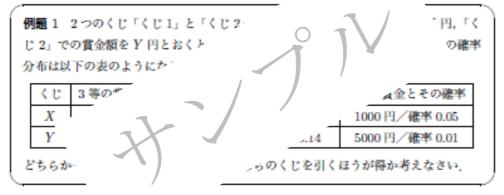
データが与えられたとき、そのデータの分布の中心を表す統計量として、平均値や中央 値などの統計量がありました。では、ある確率変数の確率分布に対して、その確率分布の 「中心」はどのように考えればよいでしょうか?この問題に対する1つの答が「期待値」 です。

# 離散確率変数の期待値



仮に両方のくじ ことしましょう。すると,「くじ 1」では,約 800 回は 0 円, 150 回は 100 、 回は 1000 円が得られることが期待されます。よって,平均とし ては 1 回あたり、

 $0 \times 0.8 + 100 \times 0.15 + 1000 \times 0.05 = 65$  [3]

得ることが期待されます。同様に、「くじ 2」では1回あたり平均で

 $0 \times 0.85 + 100 \times 0.14 + 5000 \times 0.01 = 64$  [3]

得ることが期待されます。したがって、1回あたりに期待される賞金額という意味では 「くじ1」の方が得、と考えることが出来ます。

例題1において、「くじ1」を1回引いたときに期待される賞金額の値を確率変数 X の期待値といい、E(X) = 65と表します。ここで"E"は、英語で期待の意味を表す Expectationの頭文字で、E(X)で「確率変数 X の期待値」という意味になります。「く じ2」についても同様に表すと、確率変数 Y の期待値は E(Y) = 64となります。

一般的に、離散確率変数 X について、X のとりうる値が x1,…,xk で、確率分布が、

$$p(x_1) = p_1, p(x_2) = p_2, \cdots, p(x_k) = p_k$$

で与えられるとき、確率変数 X の期待値 E(X) は次のように定義されます。

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k = \sum_{i=1}^k x_ip_i$$

©2017 Waseda University

1

### 練習問題

確率変数 X を, 確率 p で表が出るコインを投げ, 表が出たら X = 1, 裏が出たら X = 0 となる確率変数とするとき(すなわち X が確率 p のベルヌーイ分布に従うとき), X の 期待値を求めなさい。

#### 練習問題の解説

X の確率分布は,

 $p(1) = \Pr(X = 1) = p, \quad p(0)$ 

P

となります。よって期待値の定義から

となります. つまり

.mttpとなります.

期待値の

例題 2 全て	コロを1回投げ、出た目の10倍の賞金がもら
えるという. た	_して 30 円とられる。サイコロの出た目を表す確率変
数を X, 利益 ()。	≪加費)を表す確率変数を Y とするとき,X と Y の期待値
を求めなさい.	

X の確率分布は、以下のようになる。

X	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

また, X = 1のときY = -20, X = 2のときY = -10, ・・, X = 6のときY = 30となるので, Yの確率分布は

Y	-20	-10	0	10	20	30
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

となる、よって期待値の定義から,

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$
$$E(Y) = (-20) \times \frac{1}{6} + (-10) \times \frac{1}{6} + \dots + 30 \times \frac{1}{6} = 5$$

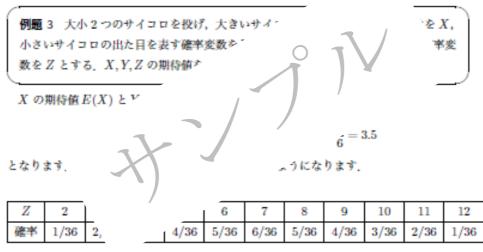
©2017 Waseda University

2

ところで、例題2では、「利益」は「賞金一参加費」なので、 $X \ge Y$ の間には、Y = 10X - 30という関係があり、さらに期待値についてもE(Y) = 10E(X) - 30という関係が成り 立っていることも確認できます。一般的に、定数a,bに対して、aX + bの期待値は

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad (1)$$

となります.



よって期待値の定義から,

$$E(Z) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

となります.

例題 3 では, X, Y, Z の間に Z = X + Y という関係があり, 期待値も E(Z) = E(X) + E(Y) となっています。一般的に, 2 つの確率変数  $X \ge Y$  の和 X + Y の期待値は,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
 (2)

となります.

(1)と(2)の性質をあわせて期待値の線形性といいます。2つの性質を組み合わせると、 以下の公式も導けます\*1.

<sup>\*1 (3)</sup> において Y = 1 (常に1をとる確率変数) とすると (1) となり、a = b = 1 とすると (2) となるので、(3) は (1) と (2) の性質を同時に表現しています。

定数 a, b に対して,

E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)

この性質を応用すると、例えば、大小2つのサイコロを振り、大き、 `コロの出目の 100倍と小さいサイコロの出目の10倍の和の期待値は、3.5 × ` `= 385と容 易に計算できます。

例題 4 サイコロを投げ、出た目を表す。 を Y とする (すなわち Y = X<sup>2</sup>)

まずY はX の関数であ は以下の表のよう \_\_\_\_\_ の確率分布

変数

(3)

よって期待値の

$$\mathfrak{l}\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+\dots+36\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

36

1/6

1/6

となります.  $Y = X^{2}$  ですが,  $E(Y) \neq (E(X))^{2}$  である点に注意しましょう. 一般的に Y = q(X) という確率変数の期待値は

$$E(Y) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \dots + g(x_k)p_k$$
  
=  $\sum_{i=1}^k g(x_i)p_i$ 

と書けます。例題 4 でも確認したように,  $E(g(X)) \neq g(E(X))$  であることに注意しま しょう。

## 練習問題

- (1) X<sub>1</sub>,..., X<sub>5</sub> を確率 p のペルヌーイ分布に従う確率変数とし, Y = X<sub>1</sub>+X<sub>2</sub>+...+ X<sub>5</sub> とする (Y は表が出る確率が p のコインを 5 回投げて表が出る回数を表し,二 項分布に従う), Y の期待値を求めなさい。
- (2) サイコロを投げ、出た目を表す確率変数を X とする、Y = (X <sup>7</sup>/<sub>2</sub>)<sup>2</sup> とおくとき、 Y の期待値を求めなさい。

©2017 Waseda University

### 練習問題の解説

(1) Y の確率分布を求めてから期待値の定義に従って求めても良いですが、期待値の 線形性を使うと簡単に計算できます。X<sub>1</sub>,...,X<sub>5</sub> はいずれも期待値は p となり ます:

$$E(X_1) = \cdots = E(X_5) = p$$

 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_5$ であることと、期秒  $E(Y) = E(X_1) + f$ となります。一般的に、デ .49 ます. (2) (1)と違い の確率分布は以下 のヂ 4 5 6 1/23/25/2-1/21/4 25/41/49/4 9/41/61/61/61/61/61/6

よって, Y の, (存値は

$$E(Y) = \frac{25}{4} \times \frac{1}{6} + \dots + \frac{25}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

となります.

 $\ensuremath{\mathbb{C}2017}$  Waseda University