

2026年9月・2027年4月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題表紙を除いて、問題用紙が 6 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。

◎解答用紙が 8 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

○以下の6題の中から任意の4題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1 2
力学および電磁気学	3 4
量子力学および熱・統計力学	5 6

【解答方法】

- (1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
- (2) 受験番号・氏名を解答用紙8枚すべてに記入すること。
- (3) 解答用紙には、選択した問題番号と科目名を明記すること。1問の解答が解答用紙2枚以上にわたる時には、それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き、かつ何枚目か分かるように解答欄に明記すること。
- (4) 1枚の解答用紙に2問以上を解答しないこと。
- (5) 4題を超えて解答しないこと。
- (6) 使わなかった解答用紙がある場合、解答欄に大きく×印を記入すること。使わなかった解答用紙も含めて、すべての解答用紙（8枚）を提出すること。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名： 数学一般

問題番号 1

$\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{C}$ は複素数全体とする。 $r \in (0, 1)$ に対し, 関数 $P_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定義する。

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $P_r(x + 2\pi) = P_r(x)$ となることを示せ。

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx$ の値を求めよ。

(3) $P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}$ となることを示せ。

(4) $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ならば, $P_r(x)$ が $0 < P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{4r \sin^2 \frac{x}{2}}$ を満たすことを示せ。

(5) 任意の $\delta > 0$ に対し, $\lim_{r \rightarrow 1-0} \max_{\delta \leq x \leq \pi} P_r(x) = 0$ となることを示せ。

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を 2π 周期連続関数とする。つまり, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は連続かつ, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $f(x + 2\pi) = f(x)$ が成り立つとする。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, 複素フーリエ係数 c_k を次で定義する。

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

さらに, $r \in (0, 1)$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$T_r[f](x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikx}$$

と定義する。

(6) $T_r[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - z) P_r(z) dz$ となることを示せ。

(7) $r \in (0, 1)$ が 1 に収束する時, $T_r[f]$ は, $[-\pi, \pi]$ 上で f に一様収束することを示せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名： 数学一般

問題番号 2

$\mathbb{R}^3$ において、ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を考える。 a 方向の単位ベクトルを $n = \frac{a}{\|a\|}$ で与える。ベクトル n に対して外積（ベクトル積）演算を表す線形変換の行列表現 M を

$$Mx = n \times x$$

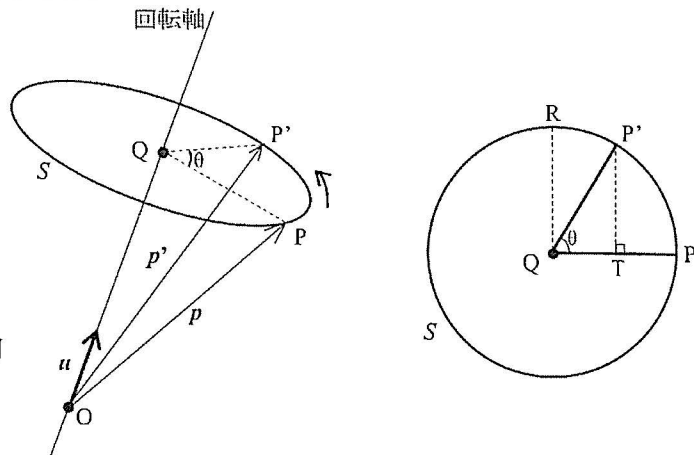
で定義する。なお、 $\mathbb{R}^3$ における $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ と $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ の外積演算は

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^T$$

で定義される。但し、 x^T は x の転置とする。

- (1) 単位ベクトル n を求めよ。
- (2) 線形変換の行列表現 M を求めよ。
- (3) $M^2 = nn^T - E$ が成り立つことを証明せよ。なお、 E は3次単位行列とする。
- (4) 行列 M の固有値と固有ベクトルを求めよ。

以下、 $\mathbb{R}^3$ における任意の単位ベクトル u を固定し、これを回転軸とする回転演算を考える。原点を始点とするベクトル p を u の周りに角度 θ 回転し、 p' に移動した。回転の方向は、右ねじの進む方向を正とする。（右図を参照せよ）



- (5) ベクトル p は、 u に平行なベクトル $p_{//}$ と u に垂直なベクトル $p_{\perp}$ を用いて、 $p = p_{//} + p_{\perp}$ と表わせる。 $p_{//}$ と $p_{\perp}$ はそれぞれ、次のように書けることを示せ。

$$p_{//} = (p^T u)u \quad p_{\perp} = -u \times (u \times p)$$

- (6) ベクトル p の終点 P を通り、単位ベクトル u に垂直な回転面 S を考える。 S 面において回転の中心を Q とすると、ベクトル p' の終点 P' も S 上にある。回転面 S において、 P' から線分 QP に下ろした垂線の足を T とすると、 $p' = p_{//} + \overrightarrow{QT} + \overrightarrow{TP'}$ と表わせる。この関係を用いて下記を導出せよ。

$$p' = p + (1 - \cos \theta)u \times (u \times p) + \sin \theta(u \times p)$$

- (7) $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ を回転軸とする角度 θ の回転変換を表わす行列 R_{θ} を求めよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名：力学および電磁気学

問題番号 3

宇宙空間に孤立した2天体(質量はそれぞれ, m_1 と m_2)を考える。この2天体を質点とみなして, それらの運動を考察しよう。重力定数を G とする。相対論的効果は考えなくて良いものとする。

(1) 時刻 t における2天体の重心座標を $\vec{r}_G$, 相対座標を $\vec{r}$, 2天体の質量和を $M(=m_1+m_2)$, 換算質量を $\mu(=m_1m_2/M)$ とする。2天体の間に働く力が重力だけと考えるとき, 系のポテンシャルエネルギー U は相対距離 r だけに依存し, $U(r)=-\frac{GM\mu}{r}$ となる。このとき系のラグランジアン L を M, μ を使って表せ。ただし, $\vec{r}_G$ と $\vec{r}$ の時間 t に関する1階微分については, $\dot{\vec{r}}_G, \dot{\vec{r}}$ などの表記を用いて良い。

(2) このとき, オイラー・ラグランジュ方程式から

$$M\ddot{\vec{r}}_G = 0, \mu\ddot{\vec{r}} + \frac{GM\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

が得られることを示せ。ただし, $\ddot{\vec{r}}_G$ と $\ddot{\vec{r}}$ は, それぞれ, $\vec{r}_G$ と $\vec{r}$ の時間 t に関する2階微分を表す。

(3) 重心は等速直線運動をすることが分かったので, 重心が静止した慣性系(重心系)を取る。このとき, 2天体の合計角運動量は $\vec{J}=\vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}}$ と表される。これが保存することを示せ。また, $\vec{J}$ (ただし $|\vec{J}|>0$ とする)の向きが z 軸となる直交座標系 (x, y, z) を取ると, 2天体の運動が xy 平面に限定されることを示せ。

(4) (3)の xy 平面内の運動において, 相対座標が $\vec{r}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表される, 重心を原点とした平面極座標 (r, θ) を考えると, 次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)=\frac{1}{r}-\frac{GM}{h^2}$$

ただし, $r^2\dot{\theta}=h$ (単位質量当たりの角運動量)とした。

(5) (4)の方程式を解けば, 軌道の式が得られる。 $\theta=0$ のときに相対距離 r が最小値(近点距離) a となり, そのときの速さを V_0 とすると,

$$r=\frac{a(1+e)}{1+e\cos\theta}$$

となることを示せ。ただし, $e=\frac{aV_0^2}{GM}-1$ とした。このパラメータ e は離心率と呼ばれる。

(6) 離心率 $e>1$ のとき, 2天体の運動は万有引力による散乱になる。ここで図1のように, 一方の天体が十分に重く, 系の重心に静止しているとみなせる場合を考える。無限遠での入射天体の速さを V_∞ , 衝突係数を b , 散乱角(入射天体の軌道の曲がり角)を ϕ とする。

(i) 散乱の軌道は近点($\theta=0$)に関して対称である。軌道の式から離心率 e と散乱角 ϕ の関係を導け。

(ii) 無限遠と近点での力学的エネルギーと角運動量の保存を考えて, 関数 $b(\phi)$ を V_∞ で表せ。

(7) 衝突係数が $b\sim b+db$ の範囲(断面積要素 $d\sigma$)を通過して接近してきた天体が, 散乱角 $\phi\sim\phi+d\phi$ を見込む立体角要素 $d\Omega=2\pi\sin\phi d\phi$ へ散乱されるとき, 微分散乱断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi)$ を求めよ。

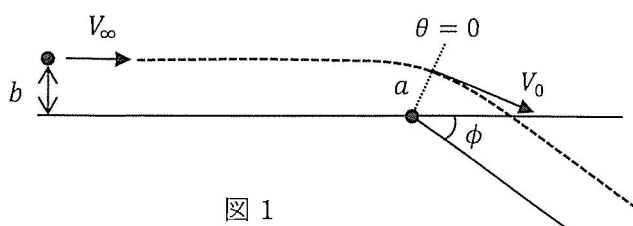


図1

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

科目名： 力学および電磁気学

問題番号 4

真空中で、半径 a の円盤状の金属板（極板）2枚が、距離 h の隙間を持つように平行に配置された平行円板コンデンサーを考える（図1）。ただし $h \ll a$ とし、極板の端の効果は無視できるものとする。2枚の極板間には角周波数 ω の交流電圧が加えられている。十分に低い周波数（低周波極限）では、極板間の電場は極板に垂直な $+z$ 方向を向き、空間的に一様であるとみなせる。この電場を $E_z^{(0)}(t) = E_0 e^{i\omega t}$ と時間 t の関数として表す。ただし E_0 は正の定数であり、物理的な電場はこの実部で与えられるものとする。また、真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 、光速を $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ とする。

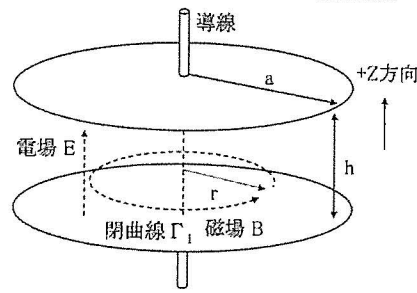


図1

(1) 低周波極限で極板間の電場が一様であるとみなせるとき、コンデンサーの極板間の静電容量 C を求めよ。また、電場 $E_z^{(0)}(t) = E_0 e^{i\omega t}$ に対して、極板間電圧 $V(t)$ と、極板に蓄えられる電荷 $Q(t)$ を求めよ。また、このときの極板間の電束の総量 $\Phi_E(t)$ の時間変化を求め、 $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ が、導線から極板に流れる充電電流 dQ/dt と一致することを示せ。

(2) 角周波数 ω が大きくなると、時間変化する電場によって生じる磁場の効果が無視できなくなる。極板の中心軸を中心とする半径 r の閉曲線 Γ_1 を考える（図1の破線）。アンペール-マクスウェルの法則を用いて、低周波極限の電場 $E_z^{(0)}(t) = E_0 e^{i\omega t}$ によって生じる磁束密度の方位角成分 $B_\phi^{(1)}(t, r)$ を、 $0 \leq r \leq a$ の範囲で求めよ。

(3) 前問で得られた時間変化する磁場 $B_\phi^{(1)}(t, r)$ は、ファラデーの電磁誘導の法則により、再び電場を誘導する。極板の中心を含む断面内で、中心軸と半径 r の位置を通る閉曲線 Γ_2 を考える（図2の破線）。符号は、低周波電場 $E_z^{(0)}$ と同じ $+z$ 方向を正として以下の問いに答えよ。

(a) この誘導により生じる、極板に垂直な電場の補正項 $E_z^{(1)}(t, r)$ を求めよ。ただし、補正項は中心 $r=0$ で0となるように定めるものとする。

(b) $|E_z^{(1)}(t, a)| \ll |E_z^{(0)}(t)|$ が成り立つ条件を ω , a , c を用いて示し、この条件の物理的意味を述べよ。

(4) 前問のような電場と磁場の相互誘導をさらに繰り返すと、極板間の電場は半径方向に一様ではなくなる。ここでは、その結果として極板間の電場分布が $E_z(t, r) = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$ と表されることを用いてよい。ただし、 $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ である。このとき以下の問いに答えよ。

(a) $x \ll 1$ のときの $J_0(x)$ の近似式を、 x^2 の項まで示し、この範囲での $E_z(t, r)$ の近似式を求めよ。

(b) $0 \leq x \leq 2.5$ の範囲で、時間依存因子を除いた電場分布 $\frac{E_z(t, cx/\omega)}{E_0 e^{i\omega t}} = J_0(x)$ の概形を描け。ただし、 $J_0(0) = 1$, $J_0(2.405) = 0$ を用いてよい。また、(a) の近似式は $x \ll 1$ に限られることに注意せよ。

(c) 角周波数 ω が高くなると、極板間の電場分布は低周波極限の一様分布からどのように変化するか、半径方向の分布に着目して説明せよ。この結果からコンデンサー回路の設計時の注意点を説明せよ。

(5) 再び、十分に低い周波数とし、極板間の一様な電場は、 $E_z(t) = E_0 \cos \omega t$ として考える。

(a) コンデンサー間の電圧が V のときに、微小電荷 dQ を充電するための仕事が $dW = V dQ$ であることを参考に、極板間に蓄えられる電場エネルギー $U(t)$ を求め、時間変化率 dU/dt を求めよ。

(b) ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ を用いて極板端 $r=a$ における $\mathbf{S}$ の向きと大きさを求めよ。

(c) 側面から極板間へ流入するエネルギー流入の総量を求めよ。この結果と dU/dt との結果を比較し、コンデンサーに蓄えられるエネルギーはどこから流入すると考えられるか説明せよ。

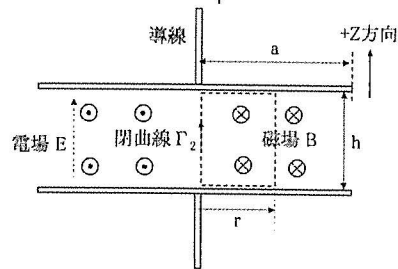


図2

2026年9月・2027年4月入学試験問題
 大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻
 科目名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

質量 m の粒子が、 x 軸上の区間 $-a < x < a$ に閉じ込められている。ただし、 a は正の実定数である。この区間の外側には無限大の高さの壁があり、さらに原点 $x = 0$ にはデルタ関数型ポテンシャルが存在するとする。この系のポテンシャルは、

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq -a), \\ \beta \delta(x) & (-a < x < a), \\ \infty & (x \geq a) \end{cases}$$

で与えられる。ただし、 β は実定数、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。定常状態において位置 x に依存する波動関数 $\psi(x)$ は、区間 $-a < x < a$ でシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \beta \delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

を満たす。ここで、 $\hbar$ は換算プランク定数、 E はエネルギー固有値である。また、 $x \leq -a$ と $x \geq a$ の無限大の高さの壁の存在により、境界条件 $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ が成り立つ。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 上のシュレーディンガー方程式を、原点の近傍区間 $-\epsilon < x < \epsilon$ (ただし、 ϵ は正の実定数) で積分し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることににより、 $\psi'(+0)$ と $\psi'(-0)$ の差を $m, \beta, \hbar, \psi(0)$ で表せ。ここで $\psi'(+0)$ と $\psi'(-0)$ は、それぞれ $\psi(x)$ の x 微分 $\psi'(x)$ に関する $x = 0$ での右側、左側極限值である。なお、波動関数 $\psi(x)$ は $x = 0$ で連続であるものとする。

(2) この系のポテンシャルが偶関数であることを用いて、エネルギー固有値 E を持つ波動関数を、偶関数または奇関数に選べることを示せ。

(3) $E > 0$ の場合には、 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ とおくことができる。ここで、 k は正の実定数である。 $E > 0$ で波動関数が奇関数である場合の固有状態について、区間 $-a < x < a$ におけるエネルギー固有値 E_n と、規格化条件 $\int_{-a}^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$ を満たす波動関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。ただし、 n は1以上の自然数とする。

(4) $E > 0$ で波動関数が偶関数である場合を考える。 $0 < x < a$ における波動関数を $\psi(x) = A \sin[k(a-x)]$ と書く。ここで、 k は設問(3)で導入した正の実定数である。この固有状態に対応する $x = 0$ での接続条件から、 $\tan(ka)$ を $k, m, \beta, \hbar$ を用いて表せ。

(5) $E > 0$ の場合の偶関数の固有状態について、区間 $-a < x < a$ で規格化条件 $\int_{-a}^a |\psi(x)|^2 dx = 1$ を満たす波動関数 $\psi(x)$ を求めよ。なお答えは、 a および設問(3)で導入された k を用いて表すこと。

(6) $\beta < 0$ の場合を考える。負エネルギー状態は波動関数 $\psi(x)$ の偶関数解としてのみ現れることに注意し、 $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ とおく。ただし、 κ は正の実定数である。この固有状態に対応する $x = 0$ での接続条件から、 $\tanh(\kappa a)$ を $\kappa, m, \beta, \hbar$ を用いて表せ。さらに、負エネルギー状態が存在するための条件を、 $m, a, \hbar$ を用いて β の不等式として表せ。

(7) 設問(6)で得られた負エネルギー状態について、 β が束縛状態の出現する臨界値 β_0 に近い場合、臨界値からのずれを、小さい正の無次元量 ϵ_0 を用いて $\beta = \beta_0(1 + \epsilon_0)$ と表す。このとき、束縛エネルギー $|E|$ の主要項を、 $\epsilon_0, m, a, \hbar$ を用いて表せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

科目名： 量子力学および熱・統計力学

問題番号

6

3次元の理想フェルミ気体とみなすことのできる自由電子の集団が、体積 V 、電子数 N 、温度 T の熱平衡状態にある。各自由電子は質量 m 、スピン $1/2$ をもつ。この自由電子の集団について以下の設問に答えよ。必要があれば換算プランク定数 $\hbar$ 、ボルツマン定数 k_B を用いてよい。

- (1) 自由電子の運動エネルギーを変数 ε で表す。一辺の長さ L の立方体の箱に閉じ込められた自由電子の波数を考えることで、 V が十分に大きい極限での自由電子の状態密度 $g(\varepsilon)$ が以下の式で与えられることを示せ。

$$g(\varepsilon) = \frac{mV}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}$$

- (2) 高温極限では自由電子の集団は古典統計に従うとみなしてよい。このとき、設問(1)の結果と分配関数を用いることで、ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。ただし、 N が十分に大きいものとして、以下の近似式を用いよ。

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

- (3) 設問(2)の状況において、温度 T での化学ポテンシャルと定積比熱を求めよ。
 (4) V と N が十分に大きい極限で、化学ポテンシャルを μ として、温度 T でのフェルミ-ディラック分布関数 $f(\varepsilon)$ を書け。ただし、 $f(\mu) = 1/2$ となるように規格化すること。
 (5) 十分に低温では自由電子の集団はフェルミ統計に従う。このとき自由電子の数 N は

$$N = \int_0^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

となる。同様に、 $f(\varepsilon)$ と $g(\varepsilon)$ を用いて自由電子の集団の内部エネルギーを表せ。設問(1)および(4)の結果を $f(\varepsilon)$ 、 $g(\varepsilon)$ に代入する必要はない。

- (6) 設問(5)の状況で $f(\varepsilon)$ 、 $g(\varepsilon)$ を用いて自由電子の集団のエントロピーを表せ。設問(1)および(4)の結果を $f(\varepsilon)$ 、 $g(\varepsilon)$ に代入する必要はない。
 (7) 低温極限で化学ポテンシャル μ の温度変化が T^2 に比例すること、等積比熱が温度 T に比例することを示し、それらの比例係数を求めよ。必要があれば、以下の展開式を利用してもよい。 $g'(\varepsilon)$ と $g'''(\varepsilon)$ はそれぞれ $g(\varepsilon)$ の1階微分と3階微分を表す。

$$\int_0^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu} g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 g'''(\mu) + \dots$$

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

1

/

8

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号

科目名

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

2	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

4	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

6	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

7	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

