

2026年9月・2027年4月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

- ◎問題表紙を除いて、問題用紙が 14 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
- ◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。
- ◎すべての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名を必ず記入しなさい。
- ◎解答用紙の裏面は使用できません。

- ★問題1，問題2，問題3は必須問題である。
- ★問題3には問題3Aと問題3Bがあります。必ず一方を選択し，解答しなさい。
- ★問題4から問題13は選択問題です。1問を選択し，解答しなさい。
- ★この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻
科目名： 微分積分

問題番号

1

領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ について考える。次の問に答えよ。

- (1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分

$$\iint_D \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

の値を求めよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 線形代数

問題番号

2

次の問に答えよ。以下では n は 1 以上の自然数とする。

- (1) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W_1, W_2 が $\mathbb{R}^n = W_1 + W_2$ 及び $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ を満たすとする。このとき、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\mathbf{x}_1 \in W_1, \mathbf{x}_2 \in W_2$ の組 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ で、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ となるものが唯一つ存在することを示せ。ここで

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in W_1, \mathbf{x}_2 \in W_2\}$$

である。

そこで、 $\mathbf{x}_1 = P_{W_1}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_2 = P_{W_2}(\mathbf{x})$ と書き、線形写像 $P_{W_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を W_2 に沿った W_1 への射影、 $P_{W_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を W_1 に沿った W_2 への射影とよぶ。また、 P_{W_1}, P_{W_2} の標準基底に関する行列表示も同じ記号 P_{W_1}, P_{W_2} を用いることにする。

- (2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間を

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0, -x + y + z = 0 \right\}$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

とする。

- (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、 $P_L(\mathbf{x})$ 及び $P_H(\mathbf{x})$ を求めよ。

- (b) 行列 P_L 及び P_H を求めよ。

- (c) 3×3 行列 A の固有値は 2 と -1 であり、固有値 2 の固有空間が L 、固有値 -1 の固有空間が H であるとする。 A を求めよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号 3A

1 以上の自然数 n に対して複素平面 $\mathbb{C}$ 内の正方形

$$D_n = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq n + \frac{1}{2}, |y| \leq n + \frac{1}{2} \right\}$$

において複素関数

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

を考える。ただし

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

である。以下の問に答えよ。

- (1) D_n 内の $f(z)$ の各極における留数を求めよ。
- (2) n に依らない定数 M が存在して、 D_n の境界 C_n において $|\cot(\pi z)| \leq M$ を満たすことを示せ。
- (3) C_n に反時計回りの向きを与えると、複素積分 $I_n = \int_{C_n} f(z) dz$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ を満たすことを示せ。
- (4) 上記の結果を用いて、次の等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号 3

問題3には3Aと3Bがある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号 3B

空でない集合 Λ で添え字づけられた $\mathbb{R}$ の閉集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、次の条件 (F1), (F2), (F3) を考える。ただし Λ' が空集合のときは $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda = \mathbb{R}$ とする。

(F1) Λ の任意の有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda \neq \emptyset$ が成立する。

(F2) Λ の任意の高々可算な部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda \neq \emptyset$ が成立する。

(F3) $\mathbb{R}$ の任意の閉集合 C に対し、 $C = C_\lambda$ か $C \cap C_\lambda = \emptyset$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。

次の問に答えよ。

- (1) (F1) を満たすが $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$ となる集合 Λ と 閉集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の例を挙げよ。
- (2) 実数 r_0 を固定する。 $r_0 \in C$ を満たす閉集合 C 全体のなす族は (F2) と (F3) を満たすことを示せ。
- (3) $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}$ の開集合の族とする。もし $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \mathbb{R}$ ならば、高々可算な Λ の部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ で $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} O_\lambda = \mathbb{R}$ となるものが存在することを示せ。
- (4) (F2) と (F3) を満たす閉集合の族はある実数 r_0 に対して $\{C \mid C \text{ は閉集合かつ } r_0 \in C\}$ となることを示せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

4

等号つき一階述語論理の言語 (語彙) $\mathcal{L}$ を固定する。 $\mathcal{L}$ 上の構造 $\mathcal{M}$ に対して, $\text{Th}(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ で真な $\mathcal{L}$ 上の閉論理式 (文) 全体の集合とし, $\mathcal{L}$ 上の公理系 ($\mathcal{L}$ 上の閉論理式の集合) Γ に対して, $\tau(\Gamma) = \{\text{Th}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ は } \Gamma \text{ のモデル}\}$ とする。次の問に答えよ。

- (1) Γ を $\mathcal{L}$ 上の公理系とする。次を示せ。
 - (i) Γ が無矛盾であることと, $\tau(\Gamma)$ が空ではない事は同値である。
 - (ii) Γ が完全であることと, $\tau(\Gamma)$ が空または単元集合になることは同値である。
- (2) $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 上の公理系 Γ のモデルとする。もし Γ が不完全ならば, $\mathcal{L}$ 上の閉論理式 φ で $\Gamma \cup \{\varphi\}$ は無矛盾だが $\varphi \notin \text{Th}(\mathcal{M})$ となるものが存在することを示せ。
- (3) Γ を $\mathcal{L}$ 上の無矛盾な公理系とする。もし $\tau(\Gamma)$ が高々可算な集合ならば, $\mathcal{L}$ 上の閉論理式 φ で $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が無矛盾かつ完全になるものが存在することを示せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

5

- (1) 集合 $K \neq \emptyset$ は, その上に定義された加法演算 $+$ と乗法演算 $\cdot$ に関して体になっているとする。そして, 全単射 $\psi: K \rightarrow K$ は $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ ($x, y \in K$) を満たすものとする。このとき, 2項演算

$$\boxplus: K \times K \rightarrow K$$

を

$$x \boxplus y := \psi^{-1}(\psi(x) + \psi(y)) \quad (x, y \in K)$$

で定義すると, K は加法演算 $\boxplus$ と乗法演算 $\cdot$ に関して体になることを示せ。

- (2) p を素数, F_1 と F_2 を位数 p の有限体とする。このとき体同型 $\psi: F_1 \simeq F_2$ が一意的に存在することを示せ。
- (3) p は素数, F は位数 p の集合であり, その上に定義された加法演算 $+$ と乗法演算 $\cdot$ に関して体になっているとする。このとき, F 上の 2項演算 $\boxplus$ であって, F が加法演算 $\boxplus$ と乗法演算 $\cdot$ に関して体になるようなものの個数を求めよ。必要ならば有限体の乗法群は巡回群であるという事実を用いてもよい。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

6

A を単位元を持つ可換環とし, I, J をそのイデアルとする。イデアルの積 IJ を, 集合

$$\{fg \mid f \in I, g \in J\}$$

で生成される A のイデアルと定める。 I^2 はイデアルの積 II である。またイデアル I に対して

$$\sqrt{I} = \{f \in A \mid \text{ある自然数 } n \geq 1 \text{ が存在して } f^n \in I\}$$

と定める。次の問に答えよ。

- (1) $IJ \subset I \cap J$ を示せ。
- (2) $IJ \supset I \cap J$ は成立するか。成り立つなら証明し, 成り立たないならば反例をあげよ。
- (3) $\sqrt{I}$ は A のイデアルになることを示せ。
- (4) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ は成立するか。成り立つなら証明し, 成り立たないならば反例をあげよ。

A の素イデアル P に対して $P^{(2)} = \{f \in A \mid \text{ある } s \notin P \text{ が存在して } sf \in P^2\}$ と定義する。

- (5) $P^{(2)}$ は P^2 を含むイデアルになることを示せ。
- (6) $P^2 \subsetneq P^{(2)}$ となる例をあげよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

7

n を 1 以上の自然数とする。位相空間 X と $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を中心とする n 次元単位球面 S^n について、以下の問に答えよ。

- (1) X から S^n への 2 つの連続写像 f, g が、すべての $x \in X$ に対して $f(x) \neq g(x)$ を満たすとき、 f と $-g$ はホモトピックであることを示せ。
- (2) n が奇数のとき、 S^n から S^n への恒等写像 $a(x) = x$ と対蹠点写像 $b(x) = -x$ はホモトピックであることを示せ。
- (3) n が奇数のとき、 X から S^n への 2 つの連続写像 f, g が、すべての $x \in X$ に対して $f(x) \neq g(x)$ を満たすとき、 f と g はホモトピックであることを示せ。
- (4) n が偶数のとき、 X から S^n への 2 つの連続写像 f, g であって、すべての $x \in X$ に対して $f(x) \neq g(x)$ を満たすがホモトピックでない例を挙げよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

8

$\mathbb{R}^3$ の標準座標を (x_1, x_2, x_3) として, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする。また, $M = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ が空集合でないとして, 任意の $x \in M$ に対して $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)) \neq (0, 0, 0)$ とする。このとき, 陰関数定理を用いれば M は曲面 (2次元微分可能多様体) となることがわかる。 M の開集合 U_i ($i = 1, 2, 3$) を

$$U_i = \left\{ x \in M \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0 \right\}$$

とし,

$$\eta = \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^{-1} dx_2 \wedge dx_3, & x \in U_1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^{-1} dx_3 \wedge dx_1, & x \in U_2 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^{-1} dx_1 \wedge dx_2, & x \in U_3 \end{cases}$$

とする。

- (1) η が曲面 M 上の 2 次微分形式を与えることを示せ。
- (2) 曲面 M がコンパクトなら, $\eta = d\xi$ となる 1 次微分形式は M 上に存在しないことを示せ。
また, M がコンパクトでない場合に $\eta = d\xi$ となる 1 次微分形式が存在する M の例を挙げよ。
- (3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ とする。つまり M は標準球面 S^2 である。自然な埋め込みを $\iota: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とし, $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 ω を

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

で与える。このとき ω の ι による引き戻しを $\iota^*\omega$ としたとき, $\iota^*\omega = k\eta$ (k は実数) となる。 k を求めよ。

- (4) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場を $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ とする。 ω を X に沿ってリー微分したものを $L_X\omega$ とする。このとき, $\iota^*(L_X\omega) = \ell\eta$ (ℓ は実数) となる。 ℓ を求めよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号 9

 f を $[0, 1] \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数とし,

$$M = \max\{|f(t, \xi)| \mid t \in [0, 1], |\xi| \leq 1\}$$

は正の値をとるとする。また $\varepsilon \in (0, \min\{1, \frac{1}{M}\})$ をとり, 1 以上の自然数 n に対して $t_k = \frac{\varepsilon k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおく。

$$x_n(\cdot) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$$

を以下で定義する。

- $x_n(0) = 0$ とし $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$x_n(t_{k+1}) = x_n(t_k) + \frac{\varepsilon}{n} f(t_k, x_n(t_k))$$

- 各 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ と $t \in (t_k, t_{k+1})$ に対して,

$$x_n(t) = x_n(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (x_n(t_{k+1}) - x_n(t_k))$$

以下の間に答えよ。

- (1) $(x_n(\cdot))_{n \geq 1}$ は

$$\max_{t \in [0, \varepsilon]} |x_n(t)| \leq 1$$

をみたすことを示せ。

- (2) $(x_n(\cdot))_{n \geq 1}$ は $[0, \varepsilon]$ 上同程度連続であることを示せ。

- (3) 部分列 $(x_{n_\ell}(\cdot))_{\ell \geq 1}$ と $x(\cdot) \in C([0, \varepsilon], \mathbb{R})$ が存在して, $x_{n_\ell}(\cdot)$ は $x(\cdot)$ に一様収束することを示せ。

- (4) (3) の $x(\cdot)$ は

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad (0 \leq t \leq \varepsilon)$$

をみたすことを示せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

10

 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ と 1 以上の自然数 n に対して

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\sin x - 1)^k$$

とおく。次の問に答えよ。

(1) $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ に対し極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ を求めよ。

(2) 次の級数の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\sin x - 1)^k dx$$

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

11

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、ある実数 $\theta > 0$ に対して以下の確率密度をもつとする：

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & (x > \theta) \\ 0 & (x \leq \theta) \end{cases}$$

また、 $Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とする。

- (1) Y_n の分布関数を求めよ。
- (2) Y_n の平均と分散を求めよ。
- (3) Y_n は θ の一致推定量であることを示せ。
- (4) $\varphi_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる正数列に対して、

$$\varphi_n(Y_n - \theta)$$

の漸近分布が退化しないように φ_n を定めよ。またそのときの漸近分布を求めよ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： _____ 専門 _____

問題番号

12

有限集合 S に値をとる確率変数 X, Y, Z に対して, (X, Y, Z) の同時確率分布 P は Y の確率分布 $\{\mu(y)\}$, Y を与えたときの X の条件付き確率分布 $\{p(x|y)\}$, Y を与えたときの Z の条件付き確率分布 $\{q(z|y)\}$ を用いて

$$P(x, y, z) = p(x|y)q(z|y)\mu(y)$$

で与えられている。ここで, Y の観測者は X を観測できないため, q を定めて分布 q からの観測 Z の値を X の推定値とする。このとき, 以下の問に答えよ。

- (1) X を Z で推定するときの誤り確率を $\text{Error}(\mu, p, q)$ とする。すなわち

$$\text{Error}(\mu, p, q) = P(X \neq Z)$$

とする。 $\text{Error}(\mu, p, q)$ を $\{\mu(y)\}, \{p(x|y)\}, \{q(z|y)\}$ を用いて表せ。

- (2) $q := p$ と定めて Z を観測したときの誤り確率 $\text{Error}(\mu, p, p)$ は, 任意の分布 q に対する誤り確率 $\text{Error}(\mu, p, q)$ の2倍以下になることを示せ。

2026年9月・2027年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 専門

問題番号

13

以下のような全長 8bit の浮動小数点数を考える：

$(s, e_3, e_2, e_1, e_0, m_2, m_1, m_0)$ を 0 または 1 からなる数の列とし、この bit 列は、

$$\bullet (e_3, e_2, e_1, e_0) \neq (0, 0, 0, 0) \text{ のとき, } e = \sum_{i=0}^3 e_i 2^i, \quad m = \sum_{i=0}^2 m_i 2^{i-3}$$

として

$$x = (-1)^s (1 + m) 2^{e-7}$$

なる実数 x を表現 (これを正規化数と呼ぶ),

$$\bullet (e_3, e_2, e_1, e_0) = (0, 0, 0, 0) \text{ のとき,}$$

$$x = (-1)^s (0 + m) 2^{-6}$$

なる実数 x を表現 (これを非正規化数と呼ぶ)

するものとする。この形式で表現可能な数の全体を $\mathcal{F}$ と書く。なお、IEEE754 的な表現とは $(e_3, e_2, e_1, e_0) = (1, 1, 1, 1)$ のときに異なっていることに注意せよ。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 以下の値を求めよ。但し、例えば 9.75 の代わりに $10 - 2^{-2}$ と書くなど、簡単のためならば 2 のべきを含んだ式で答えても良いものとする。
 - (a) $\mathcal{F}$ に含まれる最大の数
 - (b) $\mathcal{F}$ に含まれる正規化数のうち、最小の数
 - (c) $\mathcal{F}$ に含まれる非正規化数のうち、最大の数
 - (d) $\mathcal{F}$ に含まれる非正規化数のうち、最小の数
 - (e) $\mathcal{F}$ に含まれる 1 より大きな数のうち、最小の数
 - (f) $\mathcal{F}$ に含まれる 1 より小さな数のうち、最大の数
 - (g) $\mathcal{F}$ に含まれない最小の正整数
- (2) 2.25 を $(s, e_3, e_2, e_1, e_0, m_2, m_1, m_0)$ の形で表せ。
- (3) $\mathcal{F}$ のうち 0.9 に最も近いものを $(s, e_3, e_2, e_1, e_0, m_2, m_1, m_0)$ の形で表せ。
- (4) $20 \leq x \leq 100, 20 \leq y \leq 100$ とする。 $x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}$ だが $x - y \notin \mathcal{F}$ であるような x, y の例を一つ挙げよ。

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

1	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	必須	問題番号	1	科目名	微分積分

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

2	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

必須 問題番号	2	科目名	線形代数
---------	---	-----	------

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別して書くこと

2026年9月・2027年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

4	/	4
採点欄		

※裏面の使用は不可

選択 問題番号	
---------	--

科目名	専門
-----	----

選択する問題番号を記載すること