

2025年9月・2026年4月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

- ◎問題表紙を除いて、問題用紙が 6 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
 ◎解答用紙が 8 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

○以下の6題の中から任意の4題を選択して解答すること。

科目	問題番号	
数学一般	1	2
力学および電磁気学	3	4
量子力学および熱・統計力学	5	6

【解答方法】

- (1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
- (2) 受験番号・氏名を解答用紙8枚すべてに記入すること。
- (3) 解答用紙には、選択した問題番号と科目名を明記すること。1問の解答が解答用紙2枚以上にわたる時には、それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き、かつ何枚目か分かるように解答欄に明記すること。
- (4) 1枚の解答用紙に2問以上を解答しないこと。
- (5) 4題を超えて解答しないこと。
- (6) 使わなかった解答用紙がある場合、解答欄に大きく×印を記入すること。使わなかった解答用紙も含めて、すべての解答用紙（8枚）を提出すること。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名： 数学一般

問題番号

1

次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & -1 \\ i & 1 & -1 & -i \\ -i & -1 & 1 & i \\ -1 & i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A のエルミート共役を書け。(2) 行列 A のトレース $\text{tr } A$ を求めよ。(3) 行列 A の行列式 $\det A$ を求めよ。(4) A^2 を計算し、

$$A^2 + c_1 A + c_0 I = O$$

を満たす数 c_0 と c_1 を求めよ。ただし、 I は 4 行 4 列の単位行列であり、 O は 4 行 4 列の零行列 (成分がすべて 0 の行列) である。

(5) 行列 A の固有値と各固有値の重複度を求めよ。(6) 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して A^n を求めよ。(7) t を実数として e^{-itA} を計算せよ。(8) t を実数として、 t に依存する 4 成分ベクトル $v(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt} v(t) = -iA v(t) + b(t)$$

を考える。 $b(t)$ は t に依存する 4 成分ベクトルである。初期条件 $v(0) = v_0$ に対するこの微分方程式の解 $v(t)$ を求めよ。ただし、行列 A は具体的な成分表示を用いず、文字 A のまま解 $v(t)$ の式を書け。

(9) 行列 A の具体的な成分表示を用い、初期条件 v_0 と非斉次項のベクトル $b(t)$ が

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合について、解 $v(t)$ の第 1 成分を求めよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名: 数学一般

問題番号

2

次の問に答えよ。

- (1) $x \in (0, 1)$ に対し、次の等式を示せ。

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xy} dy = -\frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

- (2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1-xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{4xy}{1-x^2y^2} dy \right) dx$$

- (3) (2) の等式を用いて次の等式を示せ。

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1-xy} dy \right) dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx dy$$

- (4) 変換変数 $(x, y) = (\tanh u, \tanh v)$ および $(u, v) = \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2} \right)$ を用いて次の等式を示し、右辺の値を求めよ。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh t} dt \right)^2$$

- (5) 次の正項級数の値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及应用物理学専攻

科目名： 力学および電磁気学

問題番号

3

図1のように、長さ ℓ の糸の上端を天井に固定し、下端に質量 m 、半径 a の一様な球を取り付けて鉛直面内で微小振動させる。ただし、半径 a は長さ ℓ より十分小さいとし、球は剛体とみなせる。天井の糸の固定点を原点 O 、球の重心を G とする。 x 軸は右向き、 y 軸は上向きを正として図のように定義する。また、図1のように糸と鉛直下向きのなす角を θ 、糸と球の接点と重心を結ぶ線分が鉛直下向きとなす角を φ とする。また、重力加速度を g とする。微小振動のため、以下の問では $\sin\theta \cong \theta$ 、 $\cos\theta \cong 1 - \theta^2/2$ 、 $\sin\varphi \cong \varphi$ 、 $\cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2$ の近似を用いること。

- (1) 球の重心 G の座標 (x_G, y_G) を ℓ, a, θ, φ で表せ。
- (2) 球の慣性モーメント I を m, a で表せ。
- (3) 球の運動エネルギーを T 、位置エネルギーを U とする。このとき、ラグランジアン $L = T - U$ を $m, a, \ell, g, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ で表せ。ただし $\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ は、それぞれ θ と φ の時間微分とする。また、 $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ はいずれも小さく、2次の項まで考えること。
- (4) ラグランジアン L から Euler-Lagrange (E-L) 方程式が導かれる。この理由を、最小作用の観点から簡潔に説明せよ。
- (5) θ, φ を変数とする E-L 方程式から、これらが満たす微分方程式2つを $a, \ell, g, \theta, \varphi, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ で表せ。
- (6) この系における固有角振動数を ω とするとき $\theta = A \cos(\omega t + \alpha)$ 、 $\varphi = B \cos(\omega t + \alpha)$ と書くことができる場合を考える。ここで、 A, B は振幅、 α は位相に対応する定数である。このとき、 A と B がともに0とならない条件を、 a, ℓ, g, ω で表せ。ただし a/ℓ は1次の項まで考えること。
- (7) 固有振動には2つのモードが存在する。それぞれの周期 T_1, T_2 をもとめ、それぞれどのような振動かを簡潔に説明せよ。

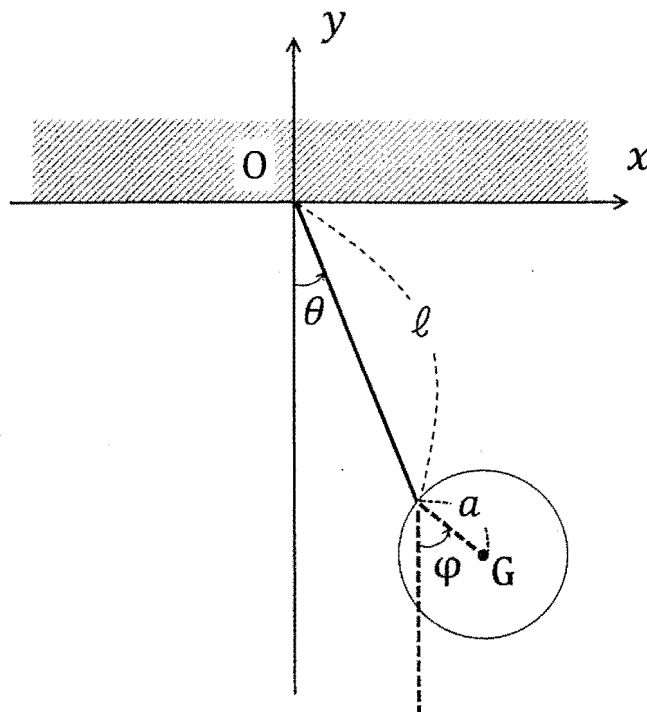


図1

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

科目名： 力学および電磁気学

問題番号

4

共通の中心 O を持つ半径 a の球導体 A と、半径 b の球殻導体 B ($b > a$) が配置されている。球殻導体 B の厚さは薄く無視でき、空間の誘電率は ϵ_0 とする。電位は、接地されている導体と無限遠において 0 とする。

図1のように球導体 A は電気量 Q の電荷で帯電しており、球殻導体 B は接地されている。

- (1) 中心 O からの距離 r における電場 $E(r)$ を図1に示すように動径方向外向きを正として、 $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の領域ごとに答えよ。
- (2) 球導体 A の電位 V_A を a, b, Q, ϵ_0 を用いて答えよ。
- (3) この系の静電容量 C_A を a, b, Q, ϵ_0 を用いて答えよ。
- (4) この系に蓄えられている静電エネルギー U を a, b, Q, ϵ_0 を用いて答えよ。

次に、図2のように球導体 A を接地し、球殻導体 B を電気量 Q の電荷で帯電させた。このとき、球殻導体 B の内側表面(球導体 A 側)に電気量 Q_i 、外側表面(無限遠側)に電気量 Q_o の電荷が生じ $Q = Q_i + Q_o$ である。

- (5) 中心 O からの距離 r における電場 $E(r)$ を図2に示すように動径方向外向きを正として、 $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の領域ごとに答えよ。
- (6) 球殻導体 B の電位 V_B を a, b, Q, ϵ_0 を用いて答えよ。
- (7) この系の静電容量 C_B を a, b, Q, ϵ_0 を用いて答えよ。

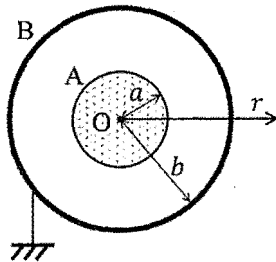


図1

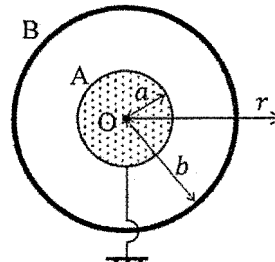


図2

図3のように y 軸方向の幅 w の半導体の中を、負の電気量 $-q$ を持つ荷電粒子(電子)が、 x 軸負の向きに速さ v で一様に移動することで電流密度 j の定常電流が x 軸正の向きに流れている。 z 軸正の向きに磁束密度 B の一様な磁場を印加すると、移動する荷電粒子はローレンツ力を受けるため、 y 軸方向に電荷の偏りが生じる。その結果、半導体板の y 軸に垂直な二つの側面には、それぞれ正負の電荷が分布し y 軸方向に電場 E_y が生じる。

- (8) 荷電粒子の数密度を n として、電流密度 j を答えよ。
- (9) 移動する荷電粒子が磁場から受ける力と電場 E_y から受ける力とが釣り合うとして、 E_y の大きさを q, j, n, B, w を用いて答えよ。また、 E_y の向きを答えよ。
- (10) 半導体板の y 軸に垂直な二つの側面の電位差を q, j, n, B, w を用いて答えよ。
- (11) 電流を担う荷電粒子が正の電気量 q (正孔)を持つ場合、 E_y の向きを答えよ。ただし電流の向きは変わらないとする。

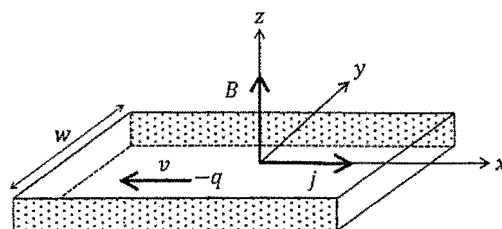


図3

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

科目名: 量子力学および熱・統計力学

問題番号

5

以下の問に答えよ。ただし、プランク定数を h とし $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする。

- (1) 平衡点 x_0 の周りで運動する、質量 m 、角振動数 ω の1次元調和振動子系のハミルトニアンは、 x と p を位置と運動量として

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2$$

で与えられる。この量子系のエネルギー固有値 E_n ($n = 0, 1, \dots$) はいくらか。ただし固有値は小さい順に $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ とする。

- (2) この系における典型的な長さ、運動量、エネルギーのスケールを $m, \omega, \hbar$ だけを用いて表せ。

以下では上記のスケールによって全ての物理量は無次元化されているものとし、同じ質量と同じ角振動数の1次元調和振動子 a と b からなる力学系を考える。

- (3) 振動子 a, b の無次元化された位置演算子を x_a, x_b 、無次元化された正準共役な運動量演算子を p_a, p_b とする。これらの間の交換関係

$$[x_a, x_b], [p_a, p_b], [x_a, p_a], [x_a, p_b], [x_b, p_a], [x_b, p_b]$$

はいくらか。

- (4) この系の無次元化されたハミルトニアンは、各振動子の無次元化された位置座標 x_a, x_b と運動量 p_a, p_b を用いて

$$H_{a+b} = \frac{1}{2}p_a^2 + \frac{1}{2}(x_a + 1)^2 + \frac{1}{2}p_b^2 + \frac{1}{2}(x_b - 1)^2$$

で与えられている。すなわち、調和振動子 a と b の(無次元化された)平衡点は -1 と 1 である。ハミルトニアン H_{a+b} で表される系のエネルギー固有値 E_n とその縮退度 ν_n ($n = 0, 1, \dots$) を求めよ。ただし固有値は小さい順に $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ とし、縮退がない場合の縮退度は 1 とする。また調和振動子 a, b は識別可能とする。

- (5) 上記のハミルトニアン H_{a+b} に振動子 a と b の間の相互作用

$$V = g(x_a + 1)(x_b - 1)$$

が加わった。 g は相互作用の強さを表す無次元の結合定数である。 g が十分小さい $0 < g \ll 1$ としてハミルトニアン H_{a+b} の基底状態のエネルギー固有値の変化量を摂動の1次の近似で求めよ。

- (6) H_{a+b} の第一励起状態のエネルギー固有値の変化量を同じく摂動の1次の近似で求めよ。
(7) ハミルトニアン $H_{a+b} + V$ で表される全体系のエネルギー固有値を近似に依らず求めよ。
(8) 摂動論の結果(5)、(6)と正確な値(7)とを比較し、近似の有効性を議論せよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

科目名：量子力学および熱・統計力学

問題番号

6

種々のミクロな系から気体の状態方程式が導出される過程を考える。系の温度は T とする。
プランク定数を h , ボルツマン定数を k_B で表す。

【1】体積 V の立方体領域に N 個の古典同種自由粒子が入っている系を考える。各粒子の質量は m とする。

(1) j 番目の粒子の運動量を p_j とする ($j = 1, 2, \dots, N$)。系のエネルギー (ハミルトニアン) を求めよ。
そして、この系の分配関数 Z が

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}N}$$

となることを示せ。

(2) 系の内部エネルギー, および, ヘルムホルツの自由エネルギーを導出する過程を示せ。
さらに, この自由エネルギーから圧力 P を求めることで, 理想気体の状態方程式を導出せよ。

【2】体積 V の立方体領域を単純な立方格子で分割した系 (格子系) を考える。立方格子 1 つの体積を定数 a とし ($V \gg a$), 系を分割してできた全格子数 $M \left(= \frac{V}{a} \right)$ は $M \gg N$ を満たすものとする。粒子の運動エネルギーは考えず, 各立方格子には粒子が 1 個のみ存在可能であるとし, 粒子が各立方格子に入る場合の数のみに着目する。

(3) M 個の立方格子の中から (粒子を入れる) N 個を選ぶ場合の数で格子系の分配関数が与えられるとし, ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。なお, この自由エネルギーを求める際にはスターリングの公式 $\ln N! \approx N \ln N - N$ を用いよ。

(4) $V = Ma$ を考慮して, (3) で求めた自由エネルギーから状態方程式が

$$\frac{P}{k_B T} = -\frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{N}{M} \right)$$

と求められることを示せ。さらに, $M \gg N$ を考慮して近似すると, (2) で求めた理想気体の状態方程式と一致することを示せ。

【3】格子系で, 2 つの粒子が隣接した格子に入ったときのみ引力相互作用がはたらく場合を考える。格子系の粒子数密度 $\frac{N}{M}$ に着目して, 平均場近似により系の相互作用エネルギー U が, $U = -\frac{JM}{2} \left(\frac{N}{M} \right)^2$ と表せたとする。ここで, J は相互作用の強さを表す係数である ($J > 0$)。

(5) この系の分配関数を求め, 状態方程式を導出せよ。なお, 【2】の場合と同様, 粒子の運動エネルギーは考えないものとする。

(6) (5) で求めた状態方程式は, $\left(\frac{N}{M} \right)^2$ のオーダーまでで近似し, $V = Ma$ を考慮すると,

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{N}{V} + \left(B - \frac{A}{k_B T} \right) \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

という形式で表せることを示し, このときの A と B を求めよ。

(7) (6) で求めた A と B が表す理想気体に対する影響を, それぞれミクロな観点から説明せよ。

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

1	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	選択	問題番号		科目名	

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

3	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

4	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	選択	問題番号		科目名	

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

5	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	選択	問題番号		科目名	
-----------	----	------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

6	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

7	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	選択 問題番号		科目名	
-----------	---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程 物理学及応用物理学専攻

No.

8	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--