

2025年9月・2026年4月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

- ◎問題表紙を除いて、問題用紙が13ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
- ◎解答用紙が4枚綴りが1組あることを試験開始直後に確認しなさい。
- ◎すべての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名を必ず記入しなさい。
- ◎解答用紙の裏面は使用できません。

- ★問題1，問題2，問題3は必須問題である。
- ★問題3には問題3Aと問題3Bがあります。必ず一方を選択し，解答しなさい。
- ★問題4から問題12は選択問題です。1問を選択し，解答しなさい。
- ★この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 微分積分

問題番号

1

- (1) $\psi(x)$ を $[1, \infty)$ 上の有界な連続関数とし, $\alpha > 1$ とする。このとき広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^\alpha} dx$$

は収束することを示せ。

- (2) $x > 0$ に対して関数

$$F(x) = \frac{1}{x} \cos(x^4)$$

の導関数 $F'(x)$ を求めよ。

- (3) 広義積分

$$\int_1^{\infty} x^2 \sin(x^4) dx$$

は収束することを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 線形代数

問題番号

2

(1) a, b, c, d を複素数とし $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ とおく。

- (i) A が対角化可能であるための a, b, c, d の条件を求めよ。
 - (ii) 各 a, b, c, d に対して, A の固有値と固有空間の次元を求めよ。
 - (iii) 各 a, b, c, d に対して, A のジョルダン標準形を求めよ。
- (2) A を実数を成分とする m 行 n 列行列とし, tA を A の転置行列とする。
- (i) $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ を示せ。
 - (ii) $\text{rank}(A) = n$ ならば tAA が n 次正則行列であることを示せ。
- (3) 次の行列式を因数分解された形で表せ。

$$\begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a & 1 \\ b^4 & b^2 & b & 1 \\ c^4 & c^2 & c & 1 \\ d^4 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$$

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号

3

問題3には3Aと3Bがある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号

3A

(X, d) を距離空間とする。 X の部分集合 A と正の実数 r に対して、集合 $U(A, r)$ を

$$U(A, r) = \{x \in X \mid d(x, y) < r \text{ となる } y \in A \text{ が存在する}\}$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) $U(A, r)$ は A を含む X の開集合であることを示せ。
- (2) A が X の閉集合ならば、 $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U(A, 1/n)$ となることを示せ。
- (3) $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U(A, 1/n)$ ならば、 A は X の閉集合であることを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号

3

問題3には3Aと3Bがある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号

3B

複素関数 $f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$ を考える。実数 $0 < \varepsilon < R$ に対して、複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線

$$C_1 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_2 : z = x \quad (-R \leq x \leq -\varepsilon),$$

$$C_3 : z = \varepsilon e^{i\theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi),$$

$$C_4 : z = x \quad (\varepsilon \leq x \leq R)$$

を結合した閉曲線を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とし、 C には正の向き (反時計回り) が入っていると
する。次の問に答えよ。

- (1) $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ。
- (2) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz$ を求めよ。
- (3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_3} f(z) dz$ を求めよ。
- (4) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ を求めよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 代数

問題番号

4

有理数体 $\mathbb{Q}$ を係数とする1変数多項式環を $\mathbb{Q}[X]$ とし, $\mathbb{Q}[X] \ni f(X)$ を既約多項式とする。更に $\bar{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の代数閉包とする。次の問に答えよ。

- (1) 剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ は体となることを示せ。
- (2) 方程式 $f(X) = 0$ の任意の解 $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ について, 体の同型

$$\mathbb{Q}[X]/(f(X)) \simeq \mathbb{Q}(\alpha)$$

が成り立つことを示せ。ここに $\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ に α を添加して得られる体を表す。

- (3) 方程式 $f(X) = 0$ の解 α を一つ固定し, 体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を (2) の通りとする。更に $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ は $\bar{\mathbb{Q}}$ の体としての自己同型群を表し, $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\alpha)) = \{\sigma \in \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \mid \sigma(\beta) = \beta \ \forall \beta \in \mathbb{Q}(\alpha)\}$ とする。

- (i) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の自己同型写像は恒等写像しかないことを示せ。
- (ii) 体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ が $f(X) = 0$ の解を全て含むとき, 体の自己同型群 $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha))$ の位数について

$$\#\text{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)) = [\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) : \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\alpha))]$$

が成り立つことを示せ。必要ならば $\mathbb{Q} = \{a \in \bar{\mathbb{Q}} \mid \tau(a) = a \ \forall \tau \in \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})\}$ であることを使ってよい。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 代数

問題番号

5

集合 M に二項演算 $+: M \times M \rightarrow M$ が与えられて、これが結合法則を満たし、単位元を持つ時、 M をモノイドと呼ぶ。演算 $+$ が可換であれば、 M は可換なモノイドという。非負整数全体の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は和に関して可換なモノイドをなす。可換なモノイド M に対して、 $m_1, \dots, m_n \in M$ が存在して、任意の $m \in M$ が

$$m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n \quad (\text{任意の } i \text{ に対して } a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と表されるとき、 M は有限生成であるという。

k を体とする。可換なモノイド M に対して、形式的有限和 $f = \sum_{m \in M} a_m \cdot m$ ($a_m \in k$) の全体を $k[M]$ で表す。 $k[M]$ は、自然な和と積

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m \in M} a_m \cdot m \right) + \left(\sum_{m \in M} b_m \cdot m \right) &= \sum_{m \in M} (a_m + b_m) \cdot m \\ \left(\sum_{m \in M} a_m \cdot m \right) \cdot \left(\sum_{n \in M} b_n \cdot n \right) &= \sum_{m, n \in M} (a_m b_n) \cdot (m + n) \end{aligned}$$

によって、可換な k -代数になる。次の問に答えよ。

(1) モノイド $M = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ に対して $k[M]$ は2変数の多項式環 $k[X, Y]$ と同型であることを示せ。

(2) 正の実数 λ に対して、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 σ_λ を

$$\sigma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \lambda x\}$$

で定める。 $M_\lambda = \sigma_\lambda \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ は自然に可換なモノイドになることを示せ。また、 M_λ が有限生成になることと λ が有理数であることは同値になることを示せ。

(3) 多項式環 $k[X, Y]$ はネーター環である。ネーター環の部分環はまたネーター環になるか。正しければ証明し、誤りであれば反例をあげよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 解析

問題番号

6

関数 $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t < 2, \end{cases} \quad \varphi(t+2) = \varphi(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

で定める。非負の整数 n に対して $\varphi_n(t) = \varphi(2^n t)$ とおいて、関数列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=0,1,2,\dots}$ を区間 $[0, 1]$ に制限して考える。

- (1) $\{\varphi_n(t)\}_n$ は $L^2(0, 1)$ で正規直交系であることを示せ。
- (2) $[0, 1]$ 上で定義された関数 $g(t)$ と非負の整数 n に対して

$$a_n = \int_0^1 \varphi_n(t) g(t) dt$$

とおく。 $g \in L^2(0, 1)$ のとき、任意の自然数 N に対して

$$\sum_{n=0}^N a_n^2 \leq \int_0^1 |g(t)|^2 dt$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $\varphi_n(t)$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $L^2(0, 1)$ で 0 に弱収束することを示せ。
- (4) $\varphi_n(t)$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $L^\infty(0, 1)$ で 0 に汎弱収束することを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 解析

問題番号

7

$\mu > 1$ を定数, $f(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 -級関数, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を初期値, $(x(t), y(t))$ を未知関数とする次の初期値問題

$$(*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - f(x), & t > 0, \\ \frac{dy}{dt} = \mu x - 2y, & t > 0, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

について考える。次の問に答えよ。

- (1) $f(s) \equiv 0$ とするとき, 初期値 $(x_0, y_0) = (0, 1)$ に対する解 $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ を求めよ。
- (2) $\lim_{\mu \rightarrow 1+0} x_\mu(t), \lim_{\mu \rightarrow 1+0} y_\mu(t)$ を求めよ。
- (3) $\mathcal{L}(s, t) = \frac{1}{2}(s^2 + t^2)$ とおく。 $f(s) = s^3, \mu > 1, (x_0, y_0)$ を任意の初期値とするととき, $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ に対して $\mathcal{L}(x(t), y(t))$ はその存在範囲 $[0, T)$ で有界にとどまることを示せ。また, 解 $(x(t), y(t))$ は時間大域的に, すなわち $[0, \infty)$ 上存在することを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 幾何

問題番号

8

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を原点中心の n 次元単位球面とする。 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の微分形式 ω を S^n に引き戻して得られる微分形式を $\omega|_{S^n}$ と書く。

(1) $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式 $\alpha = dx + dy$ と $\beta = dx \wedge dy$ を考える。ただし x, y, z は $\mathbb{R}^3$ の座標である。

(i) $\alpha|_{S^2}$ の零点を求めよ。

(ii) $\beta|_{S^2}$ の零点を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^4$ 上の微分形式 $\omega = -ydx + xdy - wdz + zdw$ と関数 $H(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ を考える。ただし x, y, z, w は $\mathbb{R}^4$ の座標である。また $S^3 = H^{-1}(1)$ に注意する。

(i) $\lambda = \omega \wedge d\omega$ を計算せよ。

(ii) $dH \wedge \lambda$ の零点を求めよ。

(iii) $\mu = \omega|_{S^3}$ とするとき、 $\mu \wedge d\mu$ が零点を持たないことを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻
科目名： 幾何

問題番号

9

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を原点中心の n 次元単位球面とする。次の問に答えよ。

- (1) 3次元球面 S^3 と 2次元球面 S^2 の整係数ホモロジー群を書け（証明は不要）。
- (2) 連続写像 $f: S^3 \rightarrow S^2$ に対して、連続写像 $g: S^2 \rightarrow S^3$ で $f \circ g$ が S^2 の恒等写像になるものは存在しないことを示せ。
- (3) 2次元球面 S^2 において、赤道 $S^1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と北極 $N = (0, 0, 1)$ と南極 $S = (0, 0, -1)$ の和集合 $A = S^1 \cup \{N, S\}$ のすべての点を1点に同一視して得られる商位相空間 S^2/A について、その整係数ホモロジー群を計算せよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻
科目名： _____ 確率・統計

問題番号

10

$X_1, \dots, X_n$ を、同じベルヌーイ分布に従う独立な確率変数列とする。すなわち、

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とする。順序統計量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ について次の問に答えよ。ただし、順序統計量は $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ を満たすものとする。

- (1) $E[X_1 \mid (X_{(1)}, X_{(2)}) = (t_1, t_2)]$ を求めよ。
- (2) $E[X_1 X_2 \mid (X_{(1)}, X_{(2)}) = (t_1, t_2)]$ を求めよ。
- (3) $1 \leq k \leq n$ とする。

$$E[X_1 X_2 \mid (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-k)}, X_{(n-k+1)}, \dots, X_{(n)}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k)]$$

を求めよ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 応用数理

問題番号

11

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると、 A の固有値は $1, 2, 3$ である。次に、 $0 < |\zeta| \leq \frac{1}{20}$ を満たす複素数 ζ に対し、行列 $\tilde{A}$ を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 + 2\zeta \\ 5 + \zeta & 1 - \zeta & -2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\tilde{A}$ の固有値は 3 つの円板領域

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 6|\zeta|\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq 6|\zeta|\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \leq 6|\zeta|\}$$

にそれぞれ 1 つずつ存在することを示せ。

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

科目名： 応用数理

問題番号

12

$1, \dots, n$ の番号がつけられた n 個の箱と m 個のボールを用意する。無作為に選んだ箱にボールを一つ入れる動作を m 回繰り返し、最後に残った空き箱に注目する。例えば、箱の数もボールの数も 2 のとき、最初のボールが入った箱に次のボールが入ったときに空き箱が残るので、空き箱の数が 1 である確率は $1/2$ である。次の問に答えよ。

(1) 番号 i の箱が空き箱である事象を A_i とする。

(i) 確率 $P(A_i)$ を求めよ。

(ii) A_i と A_j は独立かどうかを判定せよ。

(iii) 空き箱の数 K の期待値 $E[K]$ を求めよ。

(2) λ を正の実数とする。箱の数 n を増やすことを考える。ただし、ボールの数 m も

$$\frac{m}{n} \rightarrow \lambda \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすように増やす。 n に対しての空き箱の数を K_n とする。このとき $n \rightarrow \infty$ の極限に対する次の問に答えよ。

(i) 空き箱の割合の期待値 $E[K_n/n]$ の極限を求めよ。

(ii) 空き箱の割合の分散 $V[K_n/n]$ の極限が 0 であることを示せ。

(iii) K_n/n の収束性について議論せよ。

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

1	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	必須	問題番号	1	科目名	微分積分

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

2	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	必須	問題番号	2	科目名	線形代数
-----------	----	------	---	-----	------

受験番号					
氏 名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

No.

3	/	4
---	---	---

採点欄

2025年9月・2026年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

※裏面の使用は不可

必須	問題番号	3A 3B
科目名	基礎数理	

3A, 3Bのうちどちらを解答するか○で囲むこと

受験番号					
氏名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

2025年9月・2026年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程 数学応用数理専攻

No.

4

4

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

選択する問題番号と科目名を記載すること