2025 年度　早稲田大学大学院教育学研究科修士課程入学試験問題訂正

《一般・外国学生入試　専門科目》

【数学教育専攻】

【設問ⅩⅢ】

６ページ　設問ⅩⅢ（１）

<誤>　「～、次を満たすものとする。」

<正>　「～、次を満たすものとする。ただしｎは３のべき乗であると仮定する。」

２０２５年度　早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程　一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目 ］　　　　【数学教育専攻】

解答上の注意

１．数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。

①**「専門科目・共通」**（問題Ⅰ(線形代数)～問題Ⅱ(微分積分)）は、志願者全員が解答する問題です。

②**「専門科目・選択」**は、問題Ⅲ～問題ⅩⅢから二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	宮川　健	問題 Ⅲ ～ 問題 ⅩⅢ から、二問題選択
数学科教育研究指導	高木　悟	
解析学・応用解析学研究指導	新井　仁之	
解析学研究指導	梁　松	
解析学研究指導	戸松　玲治	
代数学研究指導	村井　聡	
代数学研究指導	安福　悠	
幾何学研究指導	小森　洋平	
情報数学研究指導	髙島　克幸	
情報数学研究指導	谷　誠一郎	
トポロジー研究指導	谷山　公規	
トポロジー研究指導	安原　晃	
トポロジー研究指導	山口　祥司	

２．解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。

また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

３．解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。

４．解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。

５．問題用紙は「６枚」（本ページ含む）、解答用紙は「４枚」です。必ず枚数を確認すること。

以　上

２０２５年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・共通 ］ 【数学教育専攻】

$\boxed{\text{I}}$ (線形代数) 次の問に答えよ.

(1) a を実数の定数とし，行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2a+3 & -4 & 3 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & a+1 \\ a & a^2-1 & 2a+1 & 0 \end{pmatrix}$ を A とおく.

(i) A の行列式を a の式として求めよ.

(ii) 連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ の実数解の個数を a の値に応じて決定せよ．また，この連立方程式に無限個の解がある場合には，一般解を求めよ.

(2) n 次正方行列 $B = (b_{ij})$ は $b_{ij} \geqq 0$ かつ，ある実数 $r > 0$ が存在して任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $r = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ を満たすとする.

(i) r は B の固有値であることを示せ.

(ii) 複素数 λ が B の固有値ならば，$|\lambda| \leqq r$ であることを示せ.

$\boxed{\text{II}}$ (微分積分) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 C を次式で定める：

$$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \,\}.$$

点 (x, y) が C を動くとき，xy の最大値を求めよ.

2025年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択]　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\text{III}}$ 算数科・数学科の学習指導要領の改訂には,「OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA)」(以下, PISA 調査) や「全国学力・学習状況調査」といった学力調査の結果がしばしば反映される. このことに関して次の問に答えよ.

(1) PISA 調査とはどのような調査か述べよ.

(2) 全国学力・学習状況調査とはどのような調査か述べよ.

(3) こうした学力調査の結果が算数科・数学科の学習指導要領にどのように影響を与えているのか, 具体的な事例をあげながら説明せよ.

$\boxed{\text{IV}}$ n を正の整数とする. 正の実数 x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ について, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} x_i$$

必要があれば, Jensen の不等式を証明なしに用いてよい.

$\boxed{\text{V}}$ $(S, \mathcal{F}, \mu)$ は有限測度空間とする. また, $\mathcal{F}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ は単調非減少な σ-加法族の列で, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ によって生成される σ-加法族は $\mathcal{F}$ であるとする.

$$\mathcal{B}_0 = \{\, A \in \mathcal{F} \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists B \in \mathcal{F}_n,\ \mu(A \triangle B) < \varepsilon \,\}$$

とおく. ただし, $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ は集合 A と B の対称差を表す. 以下を証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_0$ ならば, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{B}_0$.

(2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}_0$ ならば, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{B}_0$.

(3) $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}$.

２０２５年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択] 【数学教育専攻】

VI $L^2([0,1])$ をルベーグ測度に関する複素数値 2 乗可積分関数のなす複素 Hilbert 空間とする．ここで内積は，$f,g \in L^2([0,1])$ に対して，$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ と与えられる．また $\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2}$ と書く．各 $f \in L^2([0,1])$ に対して，関数 $Tf\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ を

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) 任意の $f \in L^2([0,1])$ に対して，$\|Tf\|_2 \leqq \sqrt{2}^{-1}\|f\|_2$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) より T は $L^2([0,1])$ から $L^2([0,1])$ への有界線形作用素である．$f \in L^2([0,1])$ に対して，T^*f を積分で表せ．

(3) $x \in [0,1]$ に対して，$c(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ とおくとき，$T^*Tc = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 c$ が成り立つことを示せ．

VII 次の問に答えよ．

(1) G を群とし, N を G の部分群とする. N が G の正規部分群であることの定義を述べよ.

(2) G, H を群, $f : G \to H$ を群準同型とする. (1) で述べた定義に従い, f の核

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\, g \in G \mid f(g) = e_H \,\}$$

が G の正規部分群であることを示せ. 但し e_H は H の単位元とする.

(3) 群準同型定理を証明せよ, 即ち, $f : G \to H$ が群準同型であるとき, 剰余群 $G/\mathrm{Ker}(f)$ が f の像 $\mathrm{Im}(f) = \{\, f(g) \mid g \in G \,\}$ に同型であることを示せ. 尚, $\mathrm{Im}(f)$ が H の部分群であることは証明なしに用いて良い.

VIII 次の問に答えよ．

(1) 可換環 A のイデアル I が素イデアルであることの定義を述べよ．

(2) A と B を可換環とする．このとき，直積 $A \times B$ の素イデアル全体の集合は，

$$\{\, \mathfrak{p} \times B \mid \mathfrak{p} \text{ は } A \text{ の素イデアル} \,\} \cup \{\, A \times \mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \text{ は } B \text{ の素イデアル} \,\}$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする．p が素数のとき，$\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p[x]/(x^2)$ が環として互いに同型でないことを示せ．

2025年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択]　　　　【数学教育専攻】

IX 次の問に答えよ.

(1) 複素数平面 $\mathbb{C}$ で定義された有理型関数 $f(z)$ は無限遠点でも有理型であるとする. すなわちある定数 $R>0$ が存在して $f(z)$ は $|z|>R$ で正則であり, 変数変換 $\zeta=1/z$ により $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ とすると, $\zeta=0$ は $g(\zeta)$ の除去可能特異点か極であるとする. このとき $f(z)$ は有理関数になることを示せ.

(2) 複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された定数でない正則関数 $f: D \to \mathbb{C}$ は開写像である, すなわち D 内の任意の開集合 V に対し $f(V)$ は $\mathbb{C}$ の開集合になることを示せ.

X 位相空間 X と Y について, X の部分位相空間で Y と同相であるものが存在し, Y の部分位相空間で X と同相であるものが存在するときに, X と Y は相互包含であると云うことにする.

(1) 相互包含は位相空間の集合上の同値関係であることを示せ.

(2) 互いに同相ではないが, 相互包含である位相空間 X と Y の例を挙げよ.

(3) 無限個の点を含む位相空間 X で, X と相互包含である位相空間はすべて X と同相となるものの例を挙げよ.

XI (1) 単位閉区間 $I=[0,1]$ から実数直線 $\mathbb{R}$ への単射連続写像 $f: I \to \mathbb{R}$ があり, $f(0)=0$, $f(1)=1$ を満たしているとする. このとき $f(I)=I$ であることを示せ.

(2) ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間 X を

$$X=\{\,(x,0)\mid x\in\mathbb{R}, -1\leqq x\leqq 1\,\}\cup\{\,(0,2^{-n})\mid n\in\mathbb{Z}, n\geqq 0\,\}$$

で定義する. X から実数直線 $\mathbb{R}$ への単射連続写像は存在しないことを示せ.

XII 多項式を用いたしきい値秘密分散法に関する以下の問に答えよ．ここで，$\mathbb{F}_p$ は素数位数 p の有限体を表し，$R[x]$ は環 R の元を係数とする 1 変数多項式環を表す．

(1) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3,\ b_1 = 8, b_2 = 4, b_3 = 7$ として $f(a_i) \equiv b_i \mod 11$ $(i = 1, 2, 3)$ となる次数が 2 以下の整数係数多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を一つ与えよ．

(2) $k \geqq 1$ として，互いに相異なる $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}_p$ (つまり $i \neq j$ なら $a_i \neq a_j$) 及び $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{F}_p$ に対して，

$$g(a_i) = b_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

となる次数が $k-1$ 以下の多項式 $g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ を一つ与えよ．また，そのような $\mathbb{F}_p$-係数多項式 $g(x)$ は一意に定まることを示せ．

(3) (2) で与えた多項式 $g(x)$ を用いて k-out-of-n しきい値秘密分散法のシェア生成と秘密復元のアルゴリズムを示せ．

(4) k-out-of-n しきい値秘密分散法の安全性を定義して，(3) で与えた秘密分散法がその安全性を満たすことを証明せよ．

XIII 次の問に答えよ．ただし，$g(n) = \Theta(f(n))$ とは，$g(n) = O(f(n))$ であり，かつ，$g(n) = \Omega(f(n))$ であることを表す．

(1) 関数 $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は，常に正であり，かつ，十分大きな定数 $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して，次を満たすものとする．

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & (n \leqq n_0) \\ 4T(n/3) + n & (n > n_0) \end{cases}$$

このとき，$T(n) = \Theta(f(n))$ を満たす関数 $f(n)$ を求めよ．ただし，マスター定理を使ってはならない．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$ が成り立つことを示せ．

(3) 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \in \mathbb{N}$ は $m \geqq n!$ を満たすものとする．m 個の葉をもつ根付き 2 分木において，任意の正定数 c に対し，根からの距離が cn 以下である葉の数は，$m/2^n$ より小さいことを示せ．ただし，根からの距離とは，根から葉にいたる最短経路上にある枝の数を表す．

研究指導	
教員名( )	
受験番号	
氏　　名	

2025 年度　早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程　一般・外国学生入学試験　解答用紙
[専門科目]　【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号
I

▼

裏面に続く　▼

▼ 裏面を使用する場合はここから記入すること ▼

▲ ここまで ▲

	研究指導
教員名( )	
受験番号	
氏　　名	

2025 年度　早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程　一般・外国学生入学試験　解答用紙
[専門科目]　【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号
Ⅱ

▼　　　　裏面に続く　▼

▼ 裏面を使用する場合はここから記入すること ▼

▲ ここまで ▲

研究指導	
教員名( )	
受験番号	
氏　　名	

2025 年度　早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程　一般・外国学生入学試験　解答用紙
[専門科目]　【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号

▼ 裏面に続く ▼

▼　裏面を使用する場合はここから記入すること　▼

▲　ここまで　▲

研究指導	
教員名( )	
受験番号	
氏　名	

2025年度　早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程　一般・外国学生入学試験　解答用紙
[専門科目]　【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号

▼　裏面に続く　▼

▼　裏面を使用する場合はここから記入すること　▼

▲　ここまで　▲