２０２４年９月・２０２５年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が 13 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。
◎すべての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名を必ず記入しなさい。

★問題 1，問題 2，問題 3 は必須問題である。
★問題 3 には問題 3A と問題 3B があります。必ず一方を選択し，解答しなさい。
★問題 4 から問題 12 は選択問題です。1 問を選択し，解答しなさい。
★この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：微分積分

問題番号 1

関数 f を有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数，ϕ を $[a,b]$ 上の C^1 級関数とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくとき，等式

$$\int_a^b \phi(x) f(x)\,dx = F(b)\phi(b) - \int_a^b F(x)\phi'(x)\,dx$$

を示せ。

(2) M, m をそれぞれ $F(x)$ の $[a,b]$ における最大値，最小値とする。ϕ が正の単調減少関数であるとき，不等式

$$\phi(a)m \leq \int_a^b \phi(x) f(x)\,dx \leq \phi(a)M$$

を示せ。

(3) ϕ が正の単調減少関数であるとする。$\xi \in [a,b]$ が存在して，

$$\int_a^b \phi(x) f(x)\,dx = \phi(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) (3) を利用して，数列 $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が Cauchy 列であることを示せ。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名： 線形代数

問題番号 2

(1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，$B = {}^tAA$ とする。次を満たす行列の組 (U, D) をもとめよ。

(a) U は直交行列である。

(b) D は対角行列で，各成分は正の実数である。

(c) $D = {}^tUBU$ となる。

(2) 3 次実対称行列 C であり，$C^2 = B$ となるものをもとめよ。

(3) X を n 次実正則行列とする。${}^tXX$ は正定値実対称行列であることを示せ。

(4) 上の X に対して，実対称行列 Y で $Y^2 = {}^tXX$ となるものが存在することを示せ。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：基礎数理

問題番号 **3**

問題 3 には 3A と 3B がある。必ず一方を選び，解答すること。

問題番号 3A

次の問に答えよ.

(1) S を有限集合とする。写像 $f: S \to S$ が全射であることと単射であることは同値になることを示せ。

(2) V を実ベクトル空間とする。V が有限次元であるとき，線形写像 $f: V \to V$ が全射であることと単射であることは同値になることを示せ。

(3) V が無限次元実ベクトル空間のとき，線形写像 $f: V \to V$ が全射であることと単射であることは同値になるか。成立する場合はこれを証明し，成立しない場合は反例を一つ挙げよ。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。必ず一方を選び，解答すること。

問題番号 3B

非負値関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ が

$$\int_0^\infty f(x)\,dx<\infty$$

を満たすとき，以下の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ。

(1) 関数 f が連続ならば，$x\to\infty$ のとき，$f(x)\to 0$ である。

(2) 関数 f が一様連続ならば，$x\to\infty$ のとき，$f(x)\to 0$ である。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名： 代数

問題番号 4

A を整域とし，K をその商体とする。

- $p \in A$ は，p で生成される単項イデアル (p) が素イデアルになるとき，素元であるという。
- A が UFD であるとは，単元でない $a \in A$ が有限個の素元の積で表されることをいう。
- A が正規であるとは，$a \in K$ が A 上整であれば，$a \in A$ が成り立つことである。

次の問に答えよ。

(1) A が UFD であるならば正規であることを示せ。

(2) A は UFD であるとし，$b \in A$ は単元ではなく，任意の素元 p に対して，p^2 は b を割らないと仮定する。A と $\beta = \sqrt{b}$ で生成される環を $B = A[\beta]$，L をその商体としよう。このとき，$z \in L$ は $\ell, m \in K$ を用いて $z = \ell + m\beta$ と表されることを示せ。

(3) (2) において，さらに，$1/2 \in A$ であると仮定する。このとき，B が正規になることを示せ。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：代数

問題番号 5

$\mathbb{F}_q$ を q 個の要素を持つ体とする。次の問に答えよ。

(1) $\mathbb{F}_4$ の乗法群の生成元を α とおく。$\mathbb{F}_4$ を $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間と考える。このベクトル空間の基底を全て求めよ。

(2) 一般線形群 $GL_2(\mathbb{F}_2)$ と 3 次対称群 S_3 は同型であることを示せ。

(3) α をかける写像 $\varphi : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ は，$\mathbb{F}_2$-線形な $\mathbb{F}_4$ 上の線形同型写像であることを示せ。また (1) で求めた基底を 1 つ取り，その基底に関する φ の表現行列を求めよ。

(4) 一般線形群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の任意の元の位数は高々 $q^n - 1$ であることを示せ。

(5) 一般線形群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の元で，位数が $q^n - 1$ のものが存在することを示せ。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：解析

問題番号 6

X, Y, X_0 をそれぞれノルム $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_{X_0}$ をもつ Hilbert 空間とする。$X \subset X_0$ であり，自然な埋め込み $\iota : X \to X_0$ はコンパクトであるとする。すなわち，X の任意の有界列は，X_0 で収束する部分列をもつとする。$T : X \to Y$ を有界線形作用素とし，ある正定数 C が存在して，不等式

$$\|u\|_X \leq C(\|Tu\|_Y + \|u\|_{X_0})$$

がすべての $u \in X$ に対して成り立つとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) T の核 $N = \{\varphi \in X \mid T\varphi = 0\}$ は有限次元であることを示せ。

(2) $N^\perp$ を N の X における直交補空間とするとき，ある正定数 C' が存在して，不等式

$$\|u\|_X \leq C'\|Tu\|_Y$$

がすべての $u \in N^\perp$ に対して成り立つことを示せ。

(3) T の値域 $R = \{Tu \mid u \in X\}$ は Y における閉部分空間であることを証明せよ。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名： 解析

問題番号 7

問１ $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{itx} \, dt$$

とする。$h(x)$ を求めよ。

問２ $n \in \mathbb{N}$ に対し，$h_n(x) = nh(nx)$ とする。すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \, dx = 1$$

であることを示せ。

問３ $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。つまり，$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$ とする。このとき，f と問２で定義した h_n との合成積 $f * h_n$ を

$$(f * h_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x-y) f(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

で与える。

(1) $f \in C_0(\mathbb{R})$ とする。

$$\|f * h_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0, \quad n \to \infty$$

を示せ。ただし，$C_0(\mathbb{R})$ は，台が $\mathbb{R}$ のコンパクト集合であるような $\mathbb{R}$ 上の連続関数の集合を表す。

(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする。

$$\|f * h_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0, \quad n \to \infty$$

を示せ。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：幾何

問題番号 8

(1) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ における次の三つのベクトル場

$$X_1 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

を考える。ベクトル場に対するリー括弧積

$$[X_1, X_2], \quad [X_2, X_3], \quad [X_3, X_1]$$

を計算せよ。

(2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上の滑らかな 1 次微分形式 ω で，$\omega(X_1) = \omega(X_2) = \omega(X_3) = 0$ かつ各点で $\omega \neq 0$ となるものを一つもとめよ。

(3) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の半径 1 の 2 次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考え，(1) における $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上のベクトル場 X_i を S^2 に制限する ($i = 1, 2, 3$)。各点 $a \in S^2$ において，$X_i(a)$ が S^2 の点 a における接ベクトルを与えることを示せ。

(4) (3) から，X_1, X_2, X_3 は S^2 上のベクトル場になることがわかる。S^2 上のベクトル場 X_1, X_2, X_3 の零点をそれぞれもとめよ。ただし，微分可能多様体 M 上のベクトル場 X の零点とは，$X(a) = 0$ となる M の点 a のことである。

(5) S^2 上の滑らかな 1 次微分形式 ω で，$\omega(X_1) = \omega(X_2) = \omega(X_3) = 0$ ならば $\omega = 0$ となることを示せ。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科目名：幾何

問題番号 9

X, $\widetilde{X}$ を位相多様体とし，$p : \widetilde{X} \to X$ は被覆写像とする。被覆写像は次のホモトピー持ち上げ性質をもつことが知られている：$I = [0,1]$ を単位区間として，任意の連続写像 $\tilde{f} : I \to \widetilde{X}$ およびホモトピー $F : I \times I \to X$ で $F(s,0) = p \circ \tilde{f}(s)$ $(s \in I)$ をみたすものに対して，ホモトピー $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ で $p \circ \widetilde{F} = F$ かつ $\widetilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s)$ $(s \in I)$ をみたすものが一意的に存在する。

(1) 被覆写像 $p : \widetilde{X} \to X$ は $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ を $x_0 \in X$ に写すとする。p が誘導する基本群の準同型 $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ は単射であることを示せ。

(2) 連続写像 $\sigma : X \to \widetilde{X}$ で $p \circ \sigma$ が X の恒等写像 id_X とホモトープであるものが存在するとする。このとき，p は同相写像であることを示せ。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科目名：確率・統計

問題番号 10

平均 μ, 分散 θ をもつ正規分布からの独立な n 個の標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする。μ が既知のとき，分散 θ の推定量として以下を考える。

$$\widehat{\theta}_n^{(t)} = \frac{1}{n+t}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

ただし，t は実数とする。

(1) 任意の自然数 k に対して，

$$E\left[(X_1 - \mu)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}\theta^k$$

となることを示せ．ただし，E は期待値を表す。

(2) $\widehat{\theta}_n^{(t)}$ の平均と分散を求めよ。また，平均 2 乗誤差

$$e_n(t) = E\left[|\widehat{\theta}_n^{(t)} - \theta|^2\right]$$

を求めよ。

(3) n が十分大きいとき，推定量 $\widehat{\theta}_n^{(t)}$ を決めるためにどのような t が適当か。(2) で求めた量を用いて議論し，t の値として適当と思うものを理由と共に答えよ（いくつ答えてもよい）。

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科 目 名：応用数理

問題番号 11

A, B を n 次正方行列，I を n 次単位行列とする。行列ノルム $\|\cdot\|$ はベクトルノルムから誘導されるものとする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $\|A\| < 1$ のとき，$I - A$ は正則であることを示せ。

(2) $\|A\| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\|I - BA\| < 1$ のとき

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|I-BA\|}$$

が成り立つことを示せ。

(4) n 次正方行列

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

について，C が正則であること，及び

$$\|C^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

であることを示せ。ただし，n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ に対して

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|$$

である。

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

科目名：応用数理

問題番号 12

サイクルのない有限連結無向グラフで，どの頂点も次数が 1 または 3 であるものを無向二分木と呼ぶ。次数 1 の頂点を葉と呼ぶ。以下，n は 2 以上の自然数とする。

(1) 葉をちょうど n 個持つ無向二分木の頂点数と辺数をそれぞれ求めよ。

(2) 葉をちょうど n 個持つ無向二分木のうち，葉の集合と頂点ラベルの集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ に一対一対応の関係があるものの集合を $\mathcal{T}_n$ で表す。そのような無向木の総数 $|\mathcal{T}_n|$ を求めよ。

(3) $\mathcal{T}_n$ の任意の要素 T に対し，T の任意の一辺 $\{u, v\}$ を選び，頂点 r を新たに追加して辺 $\{u, v\}$ を二辺 $\{u, r\}, \{r, v\}$ で置き換えた木 T' を作り，T' の各辺を r から遠ざかる方向の有向辺に置き換えると，根（入次数が 0，出次数が 2 の頂点）として頂点 r を有し，葉の集合と頂点ラベルの集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ に一対一対応の関係がある有向二分木 $\widetilde{T}$ が得られる（下図参照)。この手順で $\mathcal{T}_n$ の要素から構成されうる有向二分木の集合を $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ で表す。そのような有向木の総数 $|\widetilde{\mathcal{T}}_n|$ を求めよ。また，$\widetilde{\mathcal{T}}_n$ と $\mathcal{T}_{n+1}$ の関係を述べよ。

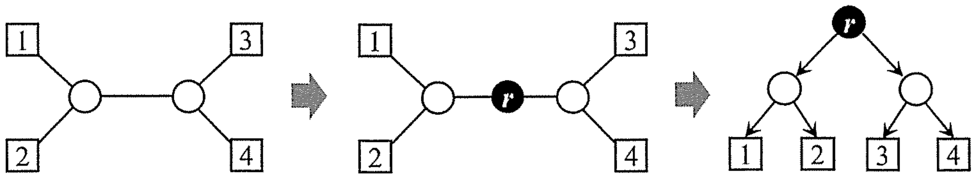

図 1　左：$\mathcal{T}_4$ の要素 T. 中央：T の一辺 $\{u, v\}$ を二辺 $\{u, r\}, \{r, v\}$ で置き換えた木 T' の例. 右：T' の各無向辺を r から遠ざかる方向の有向辺に置き換えて得られる有向二分木 $\widetilde{T}$（$\widetilde{\mathcal{T}}_4$ の要素).

受験番号					
氏　　名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

No. 1 ／ 4

採点欄

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

※裏面の使用は不可

必須　問題番号	1	科目名	微分積分

受験番号					
氏　名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

No. 2 ／ 4

採点欄

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

※裏面の使用は不可

必須　問題番号	2	科目名	線形代数

3 験番号					
氏　　名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

No. 3 ／ 4

２０２４年９月・２０２５年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

採点欄

※裏面の使用は不可

必須　問題番号	3A 3B	科目名	基礎数理

３Ａ，３Ｂのうちどちらを解答するか○で囲むこと。

受験番号					
氏　　名					

※「1」と「7」、「4」と「9」は明確に区別すること

採点欄

2024年9月・2025年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　数学応用数理専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

選択する問題番号と科目名を記載すること。