

2024年度
数学（理系）
（問題）

<R06184581>

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は2ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
4. 解答用紙の裏面は計算のために使用してよいが、採点の対象とならない。
5. 受験番号および氏名は、試験が開始されてから、解答用紙の所定欄に正確に丁寧に記入すること（以下の記入例参照）。なお、解答用紙が複数枚ある場合には、それぞれの所定欄に記入すること。所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。
6. 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入すること。読みづらい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので、注意すること。

（記入例）

5 7 0 0 1 番



万	千	百	十	一
5	7	0	0	1

（数字見本）

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

7. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
8. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き、解答用紙を裏返しにすること。
9. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1 整数 x, y, z は $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす。次の問に答えよ。

- (1) x, y, z の少なくとも1つは3の倍数であることを示せ。
- (2) x, y, z の少なくとも1つは4の倍数であることを示せ。

問2 複素数 $\alpha = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ とし、 $\beta = \alpha - \alpha^4$ とする。次の問に答えよ。

- (1) $\alpha^n = -1$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) $\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ となることを示せ。
- (3) $\beta^2 - \beta$ の値を求めよ。
- (4) β の値を求めよ。
- (5) $\cos \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

問3 xyz 空間内で、2点 $A(7, 1, 1)$, $B(11, -2, 2)$ とする。直線 AB 上の動点 P と、原点 O を中心とする半径1の球面 S 上の動点 Q を考える。 PQ が最小となるような P, Q を、それぞれ P_0, Q_0 とする。直線 AB 上の P_0 と異なる点を P_1 とし、次の手順を $n = 1, 2, 3, \dots$ で繰り返し、球面 S 上の点 $Q_1, Q_2, \dots$ および直線 AB 上の点 $P_2, P_3, \dots$ を定める。

手順： $P_n Q$ が最小となるとき Q を Q_n とし、 PQ_n が最小となるとき P を P_{n+1} とする。

- (1) $P_0 Q_0$ を求めよ。
- (2) $\ell_n = P_0 P_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 $\frac{1}{(\ell_{n+1})^2}$ を $\frac{1}{(\ell_n)^2}$ を用いて表せ。
必要ならば $\triangle P_n P_0 O$ と $\triangle P_n P_{n+1} Q_n$ は相似であることを用いてもよい。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n Q_n$ を求めよ。

問4 関数 $f(x) = e^{-x} \cos x$ とする。 $y = f(x)$ のグラフを C とし、 C 上の点 $(0, 1)$ における C の接線 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とする。さらに $h(x) = f(x) - g(x)$ とする。次の問に答えよ。

- (1) $g(x)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で、 $h'(x)$ の増減を調べよ。
- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $f(x) \geq g(x)$ となることを示せ。
- (4) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 C と ℓ と直線 $x = \frac{\pi}{4}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[以下余白]

<R06184581>

受験 番号	万	千	百	十	一
姓 氏名					
氏名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2024年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

1	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 1

2024年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

2	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 2

<R06184681>

受験 番号	万	千	百	十	一
加氏名					
氏名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2024年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

3	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問3

2024年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

4	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問4