

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科

修士課程 一般・外国学生入学試験問題

[専門科目] 【数学教育専攻】

解答上の注意

1. 数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。
 - ①「専門科目・共通」（問題Ⅰ（線形代数）～問題Ⅱ（微分積分））は、志願者全員が解答する問題です。
 - ②「専門科目・選択」は、問題Ⅲ～問題Ⅺから二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	宮川 健	問題Ⅲ～問題Ⅺ から、二問題選択
数学科教育研究指導	高木 悟	
解析学・応用解析学研究指導	新井 仁之	
解析学研究指導	梁 松	
解析学研究指導	戸松 玲治	
代数学研究指導	村井 聡	
幾何学研究指導	小森 洋平	
情報数学研究指導	高島 克幸	
トポロジー研究指導	谷山 公規	
トポロジー研究指導	山口 祥司	

2. 解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。

また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

3. 解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。
4. 解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。
5. 問題用紙は「6枚」（本ページ含む）、解答用紙は「4枚」です。必ず枚数を確認すること。

以 上

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・共通] 【数学教育専攻】

I (線形代数)

次の問に答えよ.

- (1) 次で定義される線形写像 $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R}^5).$$

(i) f の像 $\text{Im}(f)$ の次元を求めよ.

(ii) f の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 + 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能となる実数 a をすべて求めよ.

- (3) すべての成分が整数である行列を整数行列と呼ぶ. x, y を整数とし, 次の整数行列 X を考える

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}.$$

(i) $\det(X)$ を求めよ. また, 求めた結果を用いて X が正則行列であることを示せ.

(ii) X^{-1} が整数行列となる整数の組 (x, y) で $xy \neq 0$ をみたすものをすべて求めよ.

II (微分積分)

次の問に答えよ.

- (1) 関数項級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{n^3 (\cos x - 1)^4 (\cos x)^n\}$$

は $I \subset (0, \pi)$ をみたす任意の有界閉区間 I 上で一様収束することを証明せよ.

- (2) x が $(0, \pi)$ を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ.

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択] 【数学教育専攻】

III 近年、学校教育において ICT やコンピュータの利用が強く求められている。数学科でしばしば利用される ICT には、関数のグラフを描画してくれる「関数グラフツール」や図形を作図できる「作図ツール」などがある。「関数グラフツール」と「作図ツール」のいずれかを選択し、次の問に答えよ。

- (1) 選択したツールがどのようなものか、その特徴を具体的に述べよ。
- (2) 選択したツールを用いた教材を一つ具体的に示し、その教材が可能にする学習が紙と鉛筆の環境での学習といかに異なるのか述べよ。

IV $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が次の 4 つの条件 (i) ~ (iv) を満たしているとする。

- (i) $\forall p, q \in [0, 1] [T(p, q) = T(q, p)]$
- (ii) $\forall p, q, r \in [0, 1] [T(p, T(q, r)) = T(T(p, q), r)]$
- (iii) $\forall p, q, r, s \in [0, 1] [(p \leq q \wedge r \leq s) \Rightarrow T(p, r) \leq T(q, s)]$
- (iv) $\forall p \in [0, 1] [T(p, 0) = 0 \wedge T(p, 1) = p]$

$S(p, q) = 1 - T(1 - p, 1 - q)$ ($p, q \in [0, 1]$) とするとき、次の各命題について真偽を調べ、真であれば証明し、偽であれば反例を 1 つあげよ。

- (1) $\forall p, q, r \in [0, 1] [S(p, S(q, r)) = S(S(p, q), r)]$
- (2) $\forall p, q, r, s \in [0, 1] [(p \leq q \wedge r \leq s) \Rightarrow S(p, r) \leq S(q, s)]$

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
〔専門科目・選択〕 〔数学教育専攻〕

Ⅴ 次の問に答えよ.

(1) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを証明せよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1+y^2)^n e^{-2ny^2} dy$ を求めよ.

Ⅵ $\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とし, $B(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素のなす空間を表す. $a \in B(\mathcal{H})$ のスペクトラム $\sigma(a)$ を次のように定める

$$\sigma(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \text{ は可逆でない} \}.$$

一般に, 任意の $a, b \in B(\mathcal{H})$ に対して次の等式 (A) が成り立つ

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}. \quad (\text{A})$$

このことを認めて次の問に答えよ.

- (1) $\mathcal{H}$ が有限次元のとき, 任意の $a, b \in B(\mathcal{H})$ に対して $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ が成り立つか. 成り立つならば証明を, 成り立たなければ反例をあげよ.
- (2) $\mathcal{H}$ が無限次元のとき, $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$ となるような $a, b \in B(\mathcal{H})$ の例をあげよ.
- (3) $xy - yx = 1$ となる $x, y \in B(\mathcal{H})$ は存在しないことを (A) を用いて示せ.
- (4) $xy - yx = 1$ となる $x, y \in B(\mathcal{H})$ は存在しないことを (A) を用いずに示せ.

Ⅶ 一般線形群 $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$ を考える. 2つの行列 $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が生成する $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群を G とする. 次の問に答えよ.

- (1) G の位数を求めよ.
- (2) G の共役類をすべて求めよ.
- (3) G の正規部分群をすべて求めよ.

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
〔専門科目・選択〕 〔数学教育専攻〕

VIII n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の部分集合 S を

$$S = \{\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

と定義する. S 上に以下のような同値関係を考える.

$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n), \vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in S$ に対し

$$\vec{z} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \text{ある } c \in \mathbb{C} \text{ が存在して } \vec{w} = c\vec{z} = (cz_1, \dots, cz_n).$$

この同値関係 $\sim$ による S の商集合を P とし, S の元 $\vec{z}$ をその同値類 $[\vec{z}]$ に対応させる商写像を $\pi: S \rightarrow P$ とする. そして S には $\mathbb{C}^n$ のユークリッド距離位相による相対位相を入れ, P には商写像 π による商位相を入れる. 次の問に答えよ.

- (1) P はコンパクト空間になることを示せ.
- (2) P の任意の点の π による逆像は円周と同相になることを示せ.
- (3) P はハウスドルフ空間になることを示せ.
- (4) P は $2n-2$ 次元 C^∞ 級多様体になることを示せ.

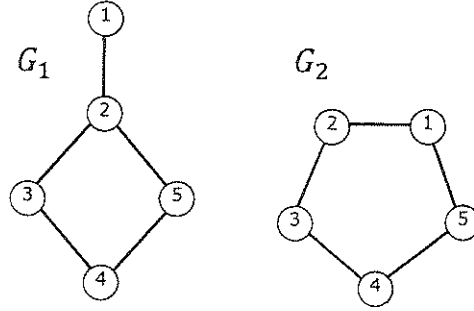
IX $X = \{a, b, c\}$ を 3 点からなる集合とし, $\mathcal{D}$ を X 上の位相とする. すなわち $\mathcal{D}$ は X の開集合族である. この位相 $\mathcal{D}$ に関する X から X への自己同相写像は恒等写像だけであるという. このような X 上の位相 $\mathcal{D}$ をすべて求めよ.

X X を位相空間とし A を X の部分位相空間とする. このとき対 (X, A) を位相空間対と云う. 2 つの位相空間対 (X, A) と (Y, B) が対同相であるとは, X から Y への同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在して $f(A) = B$ を満たすときを云う. この同値関係による同値類を対同相類と云う.

- (1) 単位閉区間 $I = [0, 1]$ と, I の 2 点からなる部分位相空間 A がなす位相空間対 (I, A) を考える. このようにして得られる位相空間対の対同相類をすべて求めよ.
- (2) トーラス T と, T の部分位相空間 A で円周と同相であるものがなす位相空間対 (T, A) を考える. このようにして得られる位相空間対の対同相類をすべて求めよ.

2024年度 早稲田大学大学院教育学研究科
 修士課程 一般・外国学生入学試験問題
 [専門科目・選択] 【数学教育専攻】

XI 下に図示した5頂点からなる無向グラフ G_1, G_2 に関して, 以下の (1) – (4) に答えよ.



- (1) 頂点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して, 5 行 5 列の隣接行列 $A = (a_{ij})$ を, もし $\{i, j\} \in E$ であれば $a_{ij} = a_{ji} = 1$, そうでなければ $a_{ij} = a_{ji} = 0$ と定める. 上記の G_1, G_2 に対して, それぞれの隣接行列 A_1, A_2 を求めよ.
- (2) A_1 と A_2 の 3 乗である $B_1 := A_1^3$, $B_2 := A_2^3$ を求めよ. 更に, B_1, B_2 のうち, 対角成分以外の成分がすべて正の整数になる行列はどれであることを答えよ.
- (3) 無向グラフ $G = (V, E)$ が 2 部グラフであるとは, $V' \cap V'' = \emptyset, V' \neq \emptyset, V'' \neq \emptyset$ を満たす V', V'' による V の 2 分割 $V = V' \cup V''$ が存在して, 両端点が V' の元である辺や両端点が V'' の元である辺が存在しないグラフであることである. 上記の G_1 と G_2 のうち, どちらか一つのみが 2 部グラフである. それを (1), (2) で求めた行列 A_1, A_2, B_1, B_2 の性質を使って証明せよ.
- (4) $C_1 := A_1^{99}$, $C_2 := A_2^{99}$ とする. C_1, C_2 それぞれにおいて, 0 になるのはどの (i, j) 成分であるかをその証明と共に答えよ.

▼ 裏面を使用する場合はここから記入すること

▲ ここまで

▼ 裏面を使用する場合はここから記入すること

▲ ここまで



▼ 裏面を使用する場合はここから記入すること

▲ ここまで