

2023年9月・2024年4月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

- ◎問題用紙が 6 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が 8 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

- 以下の6題の中から任意の4題を選択して解答すること。

科目	問題番号	
数学一般	1	2
力学および電磁気学	3	4
量子力学および熱・統計力学	5	6

【解答方法】

- (1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
- (2) 受験番号・氏名を解答用紙8枚すべてに記入すること。
- (3) 解答用紙には、選択した問題番号と科目名を明記すること。1問の解答が解答用紙2枚以上にわたる時には、それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き、かつ何枚目か分かるように解答欄に明記すること。
- (4) 1枚の解答用紙に2問以上を解答しないこと。
- (5) 4題を超えて解答しないこと。
- (6) 使わなかった解答用紙には、解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて、すべての解答用紙(8枚)を提出すること。
- (7) 選択問題届け出用紙には、選択した問題について、「問題選択」欄に○を記入すること。

2023年9月・2024年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

科目名: 数学一般

問題番号

1

$\mathbb{R}$ は実数 (real number) 全体とする。 2×2 行列 (matrix) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ と、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ とおいたベクトル値関数 (vector-valued function) を用いて、次の常微分方程式 (ordinary differential equation) の系 (system) を考える。

$$(S) \quad \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + b(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ただし、 $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は、ベクトル値の未知関数 (unknown function) とし、 $\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$ である。

(1) A の固有値 (eigenvalue) を求めよ。その固有値を λ_1, λ_2 とする。

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる正則行列 (regular matrix) P を一つ求めよ。

(3) $t \in \mathbb{R}$ に対し、行列 e^{At} を求めよ。

(4) 任意の定数 (constant) $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$ に対し、 $Y(t) = e^{At} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおく。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合、 $Y(t)$ が (S) の解 (solution) になることを示せ。

(5) 一般に、 b がベクトル値関数の場合を考える。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $\alpha(t), \beta(t)$ において、 $X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$

が (S) の解になるとする。そのとき、 $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ が満たす常微分方程式の系を導け。

(6) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $b_1(t) = e^{-t}$, $b_2(t) = 0$ の場合に、(5) で導いた常微分方程式の系の一般解 (general solution) $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ を求めよ。

(7) (6) における b_1, b_2 に対し、 $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす (S) の解を求めよ。

2023年9月・2024年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

科目名: 数学一般

問題番号 2

$\mathbb{C}$ を複素数 (complex number) 全体, $\mathbb{R}$ を実数 (real number) 全体, $\mathbb{Z}$ を整数 (integer) 全体, $\mathbb{N}$ を自然数 (natural number) 全体とする。 $N \in \mathbb{N}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対し, $D_N(x)$ を次で与える。

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$$

(1) 次の等式 (equality) が成り立つことを示せ。

$$D_N(x) = \begin{cases} 2N+1 & (x=0 \text{ のとき}) \\ \frac{e^{-iNx} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 2\pi$ となることを示せ。

複素数値連続関数 (complex-valued continuous function) $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, 次のベッセルの不等式 (inequality) が成り立つことは知られているので, この事実は用いてよい。

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iky} dy \text{ とおくと, } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx$$

さらに, 複素数値連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が 2π 周期関数 (periodic function) であると仮定する。つまり, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して次の等式が成り立つとする。

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

この時, 複素フーリエ級数 (complex Fourier series) の部分和 (partial sum) $T_N[f]$ を次で定める。

$$T_N[f](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{ik(x-y)} dy$$

以下, $x \in (-\pi, \pi)$ を固定し, f が x で微分可能 (differentiable) であると仮定する。

(3) $T_N[f](x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x-z) - f(x)\} D_N(z) dz$ となることを示せ。

(4) $g(z) = \frac{f(x-z) - f(x)}{1 - e^{iz}}$ とおく。 $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$ を求めよ。

(5) $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N[f](x) = f(x)$ となることを示せ。

(6) 0 でない整数 k に対し, $\int_{-\pi}^{\pi} y^2 e^{-iky} dy$ を求めよ。

(7) (5) を用いて, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ の値 (value) を求めよ。

2023年9月・2024年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科目名：力学および電磁気学

問題番号

3

半径 (radius) R , 質量 (mass) M の一様な球 (sphere) の運動について考える。重力加速度 (gravitational acceleration) の大きさを g とする。

- (1) この球の重心 (center of gravity) を通る軸 (axis) のまわりの慣性モーメント (moment of inertia) I が次式であることを示せ。

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

この球を粗い斜面 (rough slope) に置いたときの運動を考える。

この球を水平 (horizontal) とのなす角 θ の粗い斜面上に置き、静かに手を離すと、球は斜面上を滑らずに転がりながら (rolling without slipping) 斜面下方へ移動した。斜面と球の間の静止摩擦係数 (coefficient of static friction) を μ とする。

- (2) 球が滑らずに転がるための条件を、 $\tan \theta$ と μ の関係で示せ。
- (3) 球の重心の加速度 (acceleration) の大きさを求めよ。
- (4) この系における球の運動では力学的エネルギーが保存 (conservation of mechanical energy) されることを示せ。必要であれば自身で変数 (variable) 等を設定して良い。ただし、自身で設定した変数等については定義 (definition) を記述すること。

次に、この球を粗い水平面上 (rough horizontal plane) に置いて力を作用させたときの運動を考える。

球を水平面上に静止させた後、球の水平面から高さ (height) h の位置を太さが無視できる棒 (a rod of negligible thickness) で水平方向に突く場合を考える。球と水平面の間の動摩擦係数 (coefficient of kinetic friction) を μ' とする。球を突いたときに球が棒から受けた力積 (impulse) J は他の力の力積より大きく、球が棒から受けた力以外は無視できるものとする。

- (5) 球を突いた直後の球の重心の速さ (speed) v_0 および球の回転の角速度 (angular velocity) ω_0 の大きさを求めよ。
- (6) 球が滑らずに転がりだす場合の h の値を h_0 とする。 h_0 を R を用いて表せ。
- (7) 球を突いた位置の高さ h が $R < h < h_0$ であったとき、球は滑りながら転がって (rolling with slipping) いくが、やがて滑りがなくなり転がり運動だけになる。球を突いた直後から滑りがなくなるまでの時間を $v_0, \omega_0, R, g, \mu'$ を用いて表せ。また、それまでに重心が水平方向に進む距離を求めよ。

2023年9月・2024年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻
科目名： 力学および電磁気学

問題番号 4

以下の各設問に答えよ。

図1に示すように、半径 (radius) a, b , 高さ (height) h の円筒 (hollow cylinder) 状の2つの極板 (electrode) が、 z 軸 (axis) を中心におかれている。ただし、以下の (1)–(3) において、極板の端の効果は無視する。

- (1) 極板間が真空 (vacuum) であるとき、極板間の静電容量 (capacitance) を求めよ。ただし、真空の誘電率 (dielectric constant) を ϵ_0 とする。
- (2) 極板間の媒質 (medium) が誘電体 (dielectric) であり、その誘電率が $\epsilon(r) = \epsilon_0 + \beta r$ であるとき、極板間の静電容量を求めよ。ただし、 $\beta > 0$ であり、 r は z 軸からの距離 (distance) である。
- (3) 極板間の媒質が導体 (conductor) であり、その電気伝導率 (electrical conductivity) が σ で一様であるとする。極板間に電圧 (voltage) V を加えたときに流れる電流 (current) を求めよ。

図2に示すように、半径 a の一巻きコイル (single-loop coil) が原点 (origin) を中心に xy 平面 (plane) 上におかれている。ただし、真空の透磁率 (permeability) を μ_0 とする。

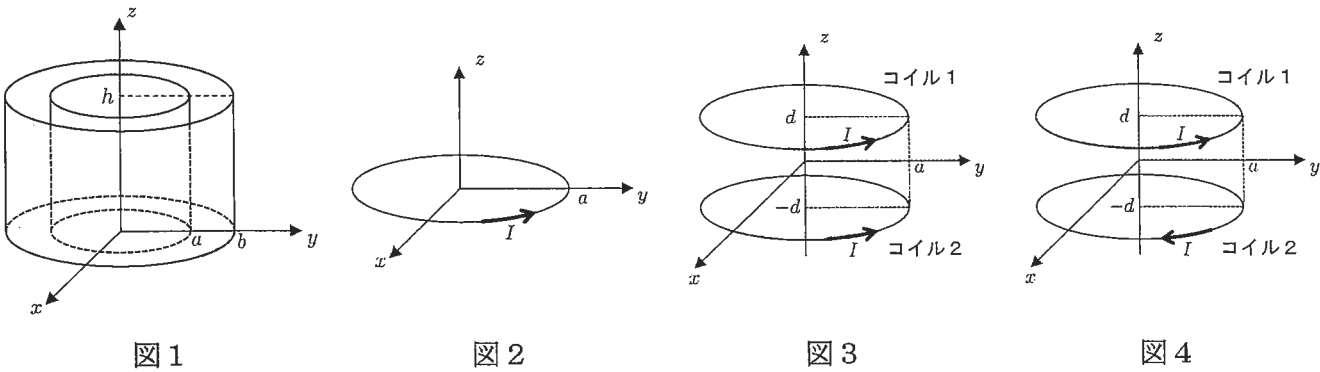
- (4) 図2に矢印 (arrow) で示す向きに定常電流 (steady current) I を流すとき、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁束密度 (magnetic flux density) $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

図3に示すように、いずれも半径 a の一巻きコイル1、一巻きコイル2が、それぞれ点 $(0, 0, d)$ 、点 $(0, 0, -d)$ を中心に xy 平面に平行 (parallel) におかれている。

- (5) 図3に矢印で示す向きに、それぞれのコイルに定常電流 I を流すとき、磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ に関して、原点において $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0$ となるための d の条件を求めよ。

図4に示すように、コイル2に流す定常電流の向きを逆にした。

- (6) 原点において $\left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|$ が最大になるための d の条件を求めよ。
- (7) 原点において $\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3} = 0$ となるための d の条件を求めよ。



2023年9月・2024年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

科目名：量子力学および熱・統計力学

問題番号

5

正準変数 (canonical variable) Q とその共役運動量 (conjugate momentum) P を量子化 (quantize) した演算子 (operator) をそれぞれ $\hat{Q}$ と $\hat{P}$ で表すと、これらはエルミート (Hermitian) 演算子で、交換関係 (commutation relation) $\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} \equiv [\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ を満たす。ここで $\hbar$ はプランク定数 (Planck constant) を 2π で割った量を表す。 f を正の実数 (real positive number), i を虚数単位 (imaginary unit) として、 $\hat{Q}$ と $\hat{P}$ の特定の線形結合 (linear combination) の演算子 $\hat{O} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(f\hat{Q} + i\frac{1}{f}\hat{P} \right)$ とそのエルミート共役の演算子 $\hat{O}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(f\hat{Q} - i\frac{1}{f}\hat{P} \right)$ を定義 (define) し、 $\hat{N} \equiv \hat{O}^\dagger \hat{O}$ とする。

(1) $\hat{O}$ と $\hat{O}^\dagger$ 及び $\hat{N}$ と $\hat{O}$ の交換子は、それぞれ $[\hat{O}, \hat{O}^\dagger] = a_0$ と $[\hat{N}, \hat{O}] = a_1 \hat{O} + a_2 \hat{O}^\dagger$ のように表すことができる。定数 (constant) a_0, a_1, a_2 を求めよ。

(2) 非負整数 (non-negative integer) $j = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $\hat{O}|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$ を満たす状態 (state) $|0\rangle$ を用いて $|j\rangle = \frac{1}{j!} (\hat{O}^\dagger)^j |0\rangle$ を定義すると、これは $\hat{N}$ の固有状態 (eigenstate) となっている。 $\hat{N}|j\rangle = n|j\rangle$ と表したとき、この固有値 (eigenvalue) n を求めよ。

(3) $\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle$, $\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = 1$ を満たす $\hat{Q}$ の連続 (continuous) 固有値 q の固有状態 $|q\rangle$ と、(2) で定義した $|j\rangle$ との内積 (inner product) を $\psi_j(q) \equiv \langle q|j\rangle$ としたとき、 $j = 0$ に対して $\frac{\psi_0(q)}{\psi_0(0)}$ を求めよ。必要であれば $\langle q|\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q|$ を用いよ。

(4) 1次元調和振動子 (one-dimensional harmonic oscillator) の位置 (position) を表す正準変数 Q を x , その共役運動量 P を p で表記すると、量子力学的ハミルトニアン (quantum mechanical Hamiltonian) は $\hat{H}_\omega = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2$ となる。ここで m は振動子の質量 (mass), ω は角振動数 (angular frequency) を表す。 $f = \sqrt{m\omega}$ として $\hat{O}$ を定義したとき、 $\hat{N}$ を用いて $\hat{H}_\omega$ を表せ。

(5) (4) の $\hat{H}_\omega$ に対し、ハイゼンベルグ描像 (Heisenberg picture) における時刻 t での $\hat{O}$ を $\hat{O}(t)$ で表す。 $\hat{O}(0)$ を用いて $\hat{O}(t)$ を表せ。

3次元デカルト座標 (three-dimensional Cartesian coordinates) で粒子 (particle) の位置を表す正準変数を x, y, z , これらの共役運動量をそれぞれ p_x, p_y, p_z で表記すると、静 (static) 磁場 (magnetic field) 中の荷電 (charged) 粒子の量子力学的ハミルトニアンは $\hat{H}_B = \frac{1}{2m} \sum_{k=x,y,z} \left(\hat{p}_k - \frac{e}{c} A_k(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \right)^2$ で表される。ここで $A_k(x, y, z)$ はベクトルポテンシャル (vector potential) の k 軸方向の成分 (component) ($k = x, y, z$), e は電荷 (charge), c は光 (light) の速さ (speed) を表す。以下では z 軸に沿った大きさ B の一様 (uniform) 磁場を考え、 $A_x(x, y, z) = -\frac{1}{2}By$, $A_y(x, y, z) = \frac{1}{2}Bx$, $A_z(x, y, z) = 0$ とする。

(6) $\hat{Q}_1 \equiv \frac{c}{eB} \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} A_x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \right)$, $\hat{P}_1 \equiv \hat{p}_y - \frac{e}{c} A_y(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{Q}_2 \equiv \hat{y} - \hat{Q}_1$, $\hat{P}_2 \equiv \frac{eB}{c} \hat{x} + \hat{P}_1$ とすると、これらの間の交換子は $[\hat{Q}_1, \hat{P}_1] = b_1$, $[\hat{Q}_2, \hat{P}_2] = b_2$, $[\hat{Q}_1, \hat{P}_2] = b_3$, $[\hat{Q}_2, \hat{P}_1] = b_4$, $[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = b_5$, $[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = b_6$ のように表すことができる。定数 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ を求めよ。

(7) $\omega_B \equiv \frac{eB}{mc}$ として、 $\hat{p}_z$ の固有値を p_z で表したとき、 ω_B と p_z を用いて $\hat{H}_B$ の固有値 E_B を書き表せ。

(8) $\hat{H}_B$ に対し、ハイゼンベルグ描像における時刻 t での (6) の $\hat{Q}_1, \hat{P}_1, \hat{Q}_2, \hat{P}_2$ をそれぞれ $\hat{Q}_1(t), \hat{P}_1(t), \hat{Q}_2(t), \hat{P}_2(t)$ で表す。 $\hat{Q}_1(0), \hat{P}_1(0), \hat{Q}_2(0), \hat{P}_2(0)$ を用いて $\hat{Q}_1(t), \hat{P}_1(t), \hat{Q}_2(t), \hat{P}_2(t)$ を表せ。

問題番号 6

N 個の理想気体分子(ideal gas molecule)が立方体容器(一辺の長さ L)に閉じ込められた N 個の粒子系を考える。 N 個の粒子は全て同一種類の単原子分子(monatomic molecule)であり、ひとつの粒子の運動エネルギー(kinetic energy)は正の整数 n_x, n_y, n_z を用いて $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ で与えられるものとする。 m は粒子の質量(mass), $\hbar$ はプランク定数(Planck constant)を 2π で割った値である。気体は古典領域(classical regime)下にあるものとする。基本温度 $\tau \equiv k_B T$ (k_B : ボルツマン定数(Boltzmann constant), T : 絶対温度(absolute temperature)) に比べて隣接する運動エネルギー値の間隔は十分に小さいものとする。また、粒子間の相互作用は無視できる。解答で温度を用いる場合は τ を用いよ。

(1) 立方体容器に閉じ込められた N 個の粒子系の分配関数 Z_N (partition function, Z_N) をカノニカル集団(canonical ensemble)の考え方で求めよ。 n_x, n_y, n_z に関する和を積分に置き換えて計算すること。必要があれば、 $\int_0^\infty \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いよ。

(2) 上記で求めた分配関数を用いて、 N 個の粒子系のヘルムホルツの自由エネルギー F (Helmholtz free energy, F) を求めよ。スターリングの近似式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いよ。

(3) 上記で求めたヘルムホルツの自由エネルギーを用いて、 N 個の粒子系のエントロピー σ (entropy, σ) と内部エネルギー U (internal energy, U) を求めよ。

(4) N 個の粒子系において、 ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ ($\varepsilon \gg d\varepsilon > 0$) の間の運動エネルギーをもつ粒子の数を求めよ。 $d\varepsilon$ の一次の項まで求めれば良い。

(5) 微小時間 dt の間に立方体内壁面の微小面積領域 dS に飛来する ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間の運動エネルギーを持った粒子の数を求めよ。

(6) 立方体容器内壁の微小領域に理想気体分子を吸着する板を設置した。立方体内部の空間から吸着サイト(adsorption site)に至るポテンシャル分布(potential distribution)は図1のようになっており、 E_A を超える運動エネルギーを持った粒子しか吸着サイトに到達できない。かつ、 E_B を超える運動エネルギーを持った粒子は吸着サイトに捕捉されることなく、弾性散乱されて再び容器内部の空間に戻ってくるものとする。分子が吸着していない吸着サイトに到達した理想気体分子の内、吸着サイトに捕捉される理想気体分子の割合を求めよ。吸着分子の数は理想気体分子の総数 N よりも十分に小さく、気体分子のエネルギー分布は変わらないと見なして良い。

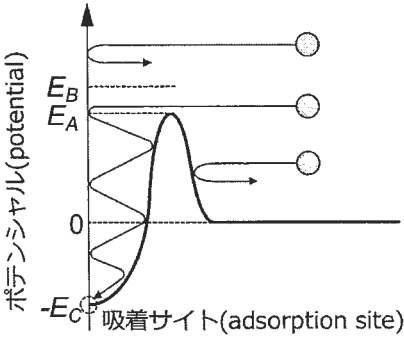


図1 吸着サイトを含むポテンシャル分布

(7) 吸着板には理想気体分子が吸着可能なサイトが M 個ある。ただし、 $N \gg M$ とする。ひとつの吸着サイトには、最大1個の理想気体分子しか吸着できない。また、吸着した理想気体分子は運動エネルギーを失い、ポテンシャルエネルギー $-E_C$ を持つものとする。熱平衡状態(thermal equilibrium condition)においては、吸着サイトに吸着している分子数 n はポテンシャル障壁 E_A には依存せず、吸着サイトのポテンシャルエネルギー $-E_C$ のみに依存する。熱平衡状態(基本温度 τ)における被覆率 n/M (coverage, n/M) を求めよ。

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

No.

1	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

No.

2

/

8

採点欄

※裏面の使用は不可

選択	問題番号		科目名	
----	------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

No.

3

 /

8

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

No.

4	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

No.

5	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択	問題番号		科目名	
----	------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

No.

6	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

No.

7	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択 問題番号		科目名	
---------	--	-----	--

受験番号					
氏 名					

2023年9月・2024年4月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及应用物理学専攻

No.

8	/	8
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

選択	問題番号		科目名	
----	------	--	-----	--