２０２３年９月・２０２４年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

機械科学・航空宇宙専攻

問題表紙

◎問題用紙が 6 ページあることを試験開始直後に確認してください。
◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認してください。
◎すべての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名を必ず記入してください。

注意事項

1. 選択方法

(1) 問題 1，問題 2 は共通科目である。これら 2 題はすべて解答すること。

(2) 問題 3，問題 4，問題 5，問題 6 は選択科目問題である。これら 4 題の中から合計 2 題を選択して解答すること。選択科目問題を 2 題よりも多く解答した場合には，すべての解答を無効とする。

区分	問題番号	科目名	解答方法
共通科目	1 2	数学 力学	左記 2 題をすべて解答すること。
選択科目	3 4 5 6	熱力学 流体力学 材料力学 制御工学	左記 4 題の中から合計 2 題を選択して解答すること。

2. 解答方法

(1) 解答は別紙の解答用紙のおもて面に記入すること。(裏面への記入は採点対象としない)。

(2) 問題 1，問題 2 の解答は対応する番号があらかじめ記載された解答用紙に記入すること。

(3) 選択科目問題の解答用紙は 2 枚ある。解答用紙 1 枚ごとに 1 科目ずつ解答し，選択した問題番号と科目名を解答用紙上部の当該欄に必ず明記すること。

3. 試験時間は，共通科目と選択科目あわせて 180 分である。

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　機械科学・航空宇宙専攻

科 目 名：　数　学

問題番号 1

(1) 実定数の n 次正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，行列の指数関数を $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ と定義する。以下の問いに答えなさい。

(i) P を正則な n 次の正方行列とすると，以下の式が成立することを示しなさい。

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$$

(ii) t を実変数とし，行列 A は t に依存しない実定数の n 次正方行列と仮定する。次の微分方程式の解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を行列 A，及び初期値 $\mathbf{x}_0$ を用いて示しなさい。ここに，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ である。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

(iii) いま，行列 A が相異なる固有値 λ_k，$k = 1, ..., n$ と固有ベクトル $\mathbf{p}_k$，$k = 1, ..., n$ を持つと仮定する。正則な行列 P を $P = [\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n]$ と定義する。このとき，(ii) で求めた解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を，固有値 λ_k，$k = 1, ..., n$，行列 $P = [\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_n]$ 及び初期値 $\mathbf{x}_0$ を用いて示しなさい。

(iv) $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ に関する次の微分方程式の解を求めよ。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad \text{但し，} \quad \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 複素領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ の点（複素数）を $z = x + iy$ として，$\mathbb{D}$ 上の複素関数を

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

とする。以下の問いに答えなさい。但し，i は虚数単位である。また，円周率を π とする。

(i) 複素関数 $f(z)$ が領域 $\mathbb{D}$ で正則であるための必要かつ十分条件を示しなさい。

(ii) 領域 $\mathbb{D}$ の点 z を極座標 (r, θ) で $z = re^{i\theta}$ と表すとき，(i) の条件はどのように表されるか。

(iii) 複素関数 $f(z)$ として，対数関数

$$f(z) = \log z$$

を考えよう。実数の対数関数を $\ln|z|$，偏角を $\arg z$ として，対数関数 $f(z) = \log z$ を $\ln|z|$ と $\arg z$ を用いて表しなさい。また，偏角として主値 $\mathrm{Arg}\, z$ を選ぶとき，主枝 $\mathrm{Log}\, z$ を $\ln|z|$ と $\mathrm{Arg}\, z$ を用いて表わした上で，対数関数 $f(z) = \log z$ を $\mathrm{Log}\, z$ と $n \in \mathbb{Z}$ で表しなさい。

(iv) 以下の式の値を求めなさい。

a) $\log(-3)$　b) $\log 3$　c) $\log(1-i)$　d) $\mathrm{Log}(-1)$　e) $\mathrm{Log}(1+i)$

(v) 複素関数 $f(z) = \log z$ の正則性について述べよ。

(vi) 複素数 z が曲線 $C : |z| = 1$ に沿って，原点の周りを正の向きに回転するとき，次の積分をしなさい。但し，$f'(z) = \frac{df}{dz}(z)$ である。

$$\oint_C f'(z)dz$$

（注意）定数や変数などの数学記号が必要であれば，適当に定めた上で用いても良い。

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　機械科学・航空宇宙専攻

科 目 名： 力 学

問題番号 2

二重振り子の力学模型として，図１のような２質点系の運動を考える。原点 O から長さ L の糸で吊り下げられた質量 m の質点があり，更に，長さ L の糸で吊り下げられた質量 M の質点がある。水平右向きを x 軸，鉛直上方を y 軸として，糸がたるむことなく $x-y$ 平面内の運動を行うものとする。糸の質量はないものとし，摩擦無く運動できるとする。重力加速度を g とする。

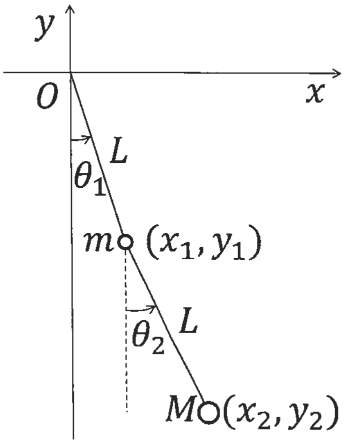

図１

(1) 質量 m の質点の座標を (x_1, y_1)，この質点を吊るす糸と鉛直下方とのなす角を θ_1 とするとき，x_1 と y_1 を θ_1 を用いて表しなさい。更に，質量 M の質点の座標を (x_2, y_2)，この質点を吊るす糸と鉛直下方とのなす角を θ_2 とするとき，x_2 と y_2 を θ_1，θ_2 を用いて表しなさい。
答えのみ示せばよい。

(2) 質量 m の質点を吊るす糸の張力を T_1，質量 M の質点を吊るす糸の張力を T_2 とするとき，2 質点の位置 x_1，y_1，x_2，y_2 に関する運動方程式を求めなさい。時間微分はドットで記し(ニュートンの記法)，答えのみ示せばよい。

(3) 本設問以降では，振れ角が小さく，$\sin\theta_1 \approx \theta_1$，$\sin\theta_2 \approx \theta_2$，$\cos\theta_1 \approx 1$，$\cos\theta_2 \approx 1$ と近似できるとする。この場合における糸の張力 T_1，T_2 を求めなさい。更に，設問(1)の関係を用いて整理し，θ_1，θ_2 に関する運動方程式を示しなさい。

(4) 設問(3)で求めた運動方程式の解が，$\theta_1 = A_1 \exp(i\omega t - \phi)$，$\theta_2 = A_2 \exp(i\omega t - \phi)$ の形で書けるとする。運動方程式に代入して整理した式を示しなさい。 i は虚数単位とし，t は時間とし，A_1，A_2，ω，ϕ は定数とする。

(5) 設問(4)で整理した式が，A_1，A_2 に関して非自明解をもつための条件を示しなさい。

(6) 全ての固有角振動数を求めなさい。更に，各々の固有角振動数に対応するモードについて，定数 A_1，A_2 が満たす関係を示しなさい。

(7) 各モードの運動について，図を描き説明しなさい。

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　機械科学・航空宇宙専攻

科 目 名：　熱力学

問題番号　3

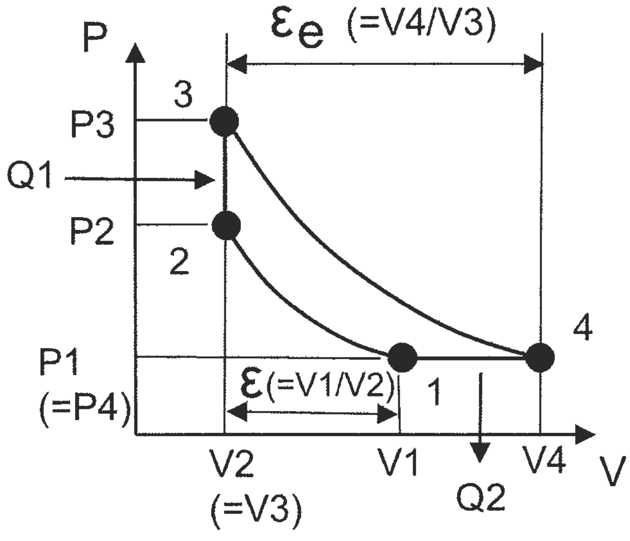

図１ アトキンソンサイクル(2→3 は定容過程, 4→1 は定圧過程, 1→2 と 3→4 は可逆断熱過程)

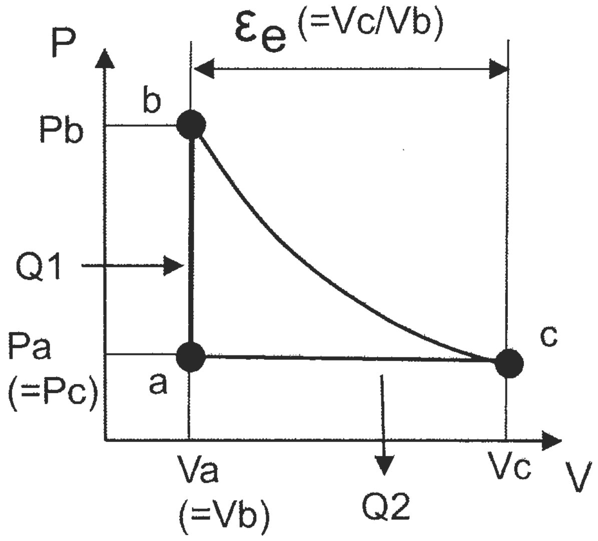

図２ ルノアールサイクル（a→b は定容過程, b→c は可逆断熱過程, c→a は定圧過程）

理想サイクルであるアトキンソンサイクル（１→２→３→４→１：図１）とルノアールサイクル（a→b→c→a：図 2）について以下の問いに答えよ。 ただし，気体は比熱比 $\kappa(>1)$ ，定圧比熱C_p，定容比熱C_v，ガス定数 R が一定の理想気体とし，圧力は P，体積は V，温度は T，圧縮比はε，膨張比はε_eとする。

（１） アトキンソンサイクル（図１）において，可逆断熱過程 1→2 での $\frac{T_1}{T_2}$と圧縮比ε $(=\frac{V_1}{V_2})$の関係，可逆断熱過程 3→４での $\frac{T_4}{T_3}$ と膨張比$\varepsilon_e(=\frac{V_4}{V_3})$の関係式を記せ。

（２） アトキンソンサイクル（図 1）において，入熱 $Q1(>0)$，出熱 $Q2(>0)$を，比熱比κとガス定数 R と温度の関数として書け。

（３） アトキンソンサイクル（図１）の熱効率 η_{th}を，圧縮比ε，膨張比ε_e，比熱比 κ の関数として導出せよ。

（４） アトキンソンサイクル（図１）において，圧縮比ε ＝8，膨張比ε_e＝27，比熱比 κ ＝4/3 とするとき，熱効率 η_{th}の値を計算せよ。

（５） アトキンソンサイクル(図１)において熱効率 η_{th}を増加させるためには，圧縮比ε，膨張比ε_e，比熱比 κ を増加・減少のいずれにすればよいかを記せ。 なお，圧縮比ε，膨張比ε_e，比熱比 κ それぞれについて答えだけ示せばよい。

（６） 可逆断熱過程 b→c を含むルノアールサイクル（図 2）の熱効率 η_{th}'を，膨張比ε_eと比熱比 κ の関数として記せ。

上記について，更に必要な変数や定数等が必要な場合は，定義した上で用いて答えよ。

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　機械科学・航空宇宙専攻

科 目 名：　流体力学

問題番号 4

流体中に固定された表面積 S, 体積 V の検査体積（図１参照）に対して積分形のバランス式を適用すると，式(1)および式(2)のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V + \int_S \left(\rho\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\vec{u}\,\mathrm{d}V + \int_S \rho\vec{u}\left(\vec{u}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S = \int_V \rho\vec{K}\,\mathrm{d}V + \int_S \left(\bar{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S \qquad (2)$$

ここで，ρ：流体の密度，$\vec{u}$：速度ベクトル，$\vec{n}$：面積要素 $\mathrm{d}S$ の外向き法線方向単位ベクトル，$\vec{K}$：単位質量の流体に作用する体積力，$\bar{\sigma}$：単位表面積に作用する面積力（応力テンソル）である。

（問 1）式(1)各項の意味を具体的に説明せよ。

（問 2）式(2)各項の意味を具体的に説明せよ。

（問 3）図２は，速度 U, 密度ρ（一定）の一様流体中に物体を設置した場合である。図中に破線で示したような高さ $2H$, 長さ L の検査体積 ABCD（紙面に垂直方向は単位幅）を設定したところ，下流側断面 CD での速度分布は $u(y)$となった。圧力は流れ場の至る所で一定であり，重力の影響は無視できるとする。このとき，この検査体積 ABCD に対して式(1)に示したバランス式を適用することで，単位時間内に検査体積の各面を出入りする流体の質量を求めよ。ただし，式(1)の各項をどのように適用したのかを詳細に説明すること。

（問 4）検査体積 ABCD に対して，式(2)に示したバランス式を適用することで，流体中に設置された物体に作用する流体力 D の大きさを求める式を導出せよ。ただし，式(2)の各項をどのように適用したのかを詳細に説明すること。

なお，解答の際に必要な記号がある場合には，各自で定義の上，任意に設定してよい。

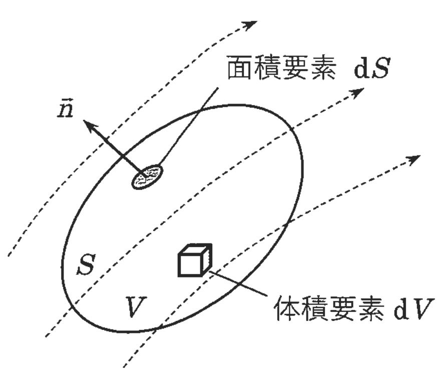

図１

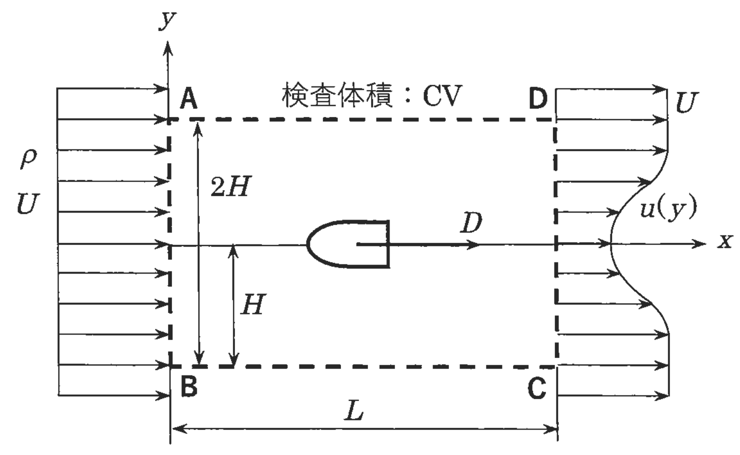

図２

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学・航空宇宙専攻

科　目　名：材料力学

問題番号 5

図１に示すように，両端が閉じた半径r，板厚tの薄肉円筒(a)および半径r，板厚tの球殻（球形の薄肉構造(b)）がある。円筒と球殻の材質は鋼製で同じヤング率E，ポアソン比νである。なお，半径rはいずれも板厚中央までの距離とする。今，内圧pが作用した状態にて，薄肉円筒に生じる円周方向応力をσ_θ，長手方向応力をσ_z，球殻の円周方向応力をσ_tとする。いずれの場合も板厚tは他の寸法に比べて十分に小さく，また半径方向応力σ_rは無視して良いと仮定する。以下の設問に解答せよ。

(1) 両端が閉じた薄肉円筒(a)に関して，長手方向と半径方向に関する力のつり合いをxy面，xz面でそれぞれ切断した面でフリーボディダイアグラム（FBD）を描けば，内圧pによる外力と断面上の内力がつり合っている状態を得る。薄肉円筒に生じる円周方向応力σ_θ，長手方向応力σ_zを求めなさい。

(2) 球殻(b)に関して，図１(c)のFBDを参考にすると，球殻上の半径$r\cos\theta$の円環部（斜線部）に内圧pの合計として作用する外力dPのz方向成分は，　$dP(\sin\theta)=p\sin\theta(2\pi r\cos\theta)rd\theta$で定義される。$z$方向の力のつり合いより，球殻の上半分にて積分した外力Pが，球殻の赤道上の切断面（xy面）に作用する円周方向応力σ_tによる内力とつり合う。この関係式を示しなさい。

(3) これより，球殻に生じる円周方向応力σ_tを求めなさい。

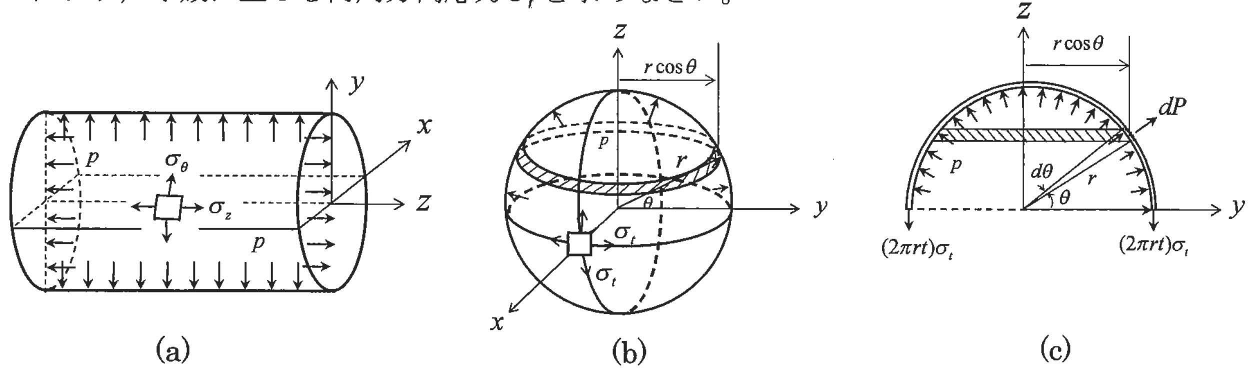

図１　内圧pが作用する薄肉円筒と球殻

次に，図２のように，両端が解放されている薄肉円筒（内半径r）の両端で，同じ形状の半球形の球殻（外半径r）が斜線部で接着されている圧力容器に，内圧pが作用している問題を考える。円筒部および半球部の厚さをt_1，t_2と変化させ，円筒部と半球部の内圧による半径方向の変位（伸び）を等しくして，接着部に曲げ変形が生じないようにしたい。円筒と球殻の材質は前問と同じ（ヤング率E，ポアソン比ν）で，いずれの場合も板厚t_1，t_2は他の寸法に比べて十分に小さい。

(4) 内圧pが作用して薄肉円筒の半径がδr_1だけ増加した場合，この時の円周方向のひずみε_θを求めなさい。

(5) さらに，円筒部は平面応力状態と見なせる。先に求めた応力値を参照して，応力とひずみの関係から半径方向の変位δr_1を求めなさい。

(6) 同様に，半球の半径がδr_2だけ増加した場合，円周方向のひずみε_tと，δr_2をそれぞれ求めなさい。

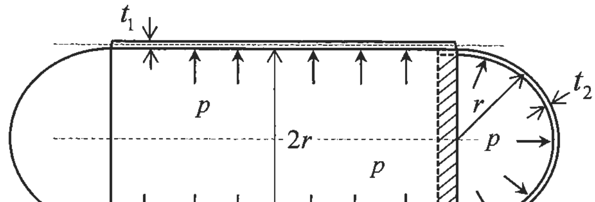

図２　内圧pが作用する圧力容器

(7) 以上より，円筒部の厚さt_1と半球部の厚さt_2に成り立つ関係式を求めなさい。

(8) (7)の条件のとき，ポアソン比$\nu=0.3$とすると，圧力容器に生じる最大せん断応力τ_{max}を求めなさい。

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程　機械科学・航空宇宙専攻

科 目 名： 制御工学

問題番号 6

図１に示すような，制御対象が１次遅れ系で，調節器が比例＋積分動作であるフィードバック制御系において，目標値$R(s)$に対する出力$Y(s)$の応答について考える。

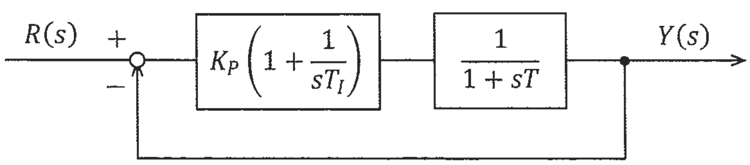

図１　フィードバック制御系のブロック線図

(1) このフィードバック制御系の一巡伝達関数を求めよ。

(2) 目標値$R(s)$に対する出力$Y(s)$の伝達関数を求めよ。ただし，固有角周波数をω_n，減衰係数をζとおき，分母は標準形で表せ。また，ω_nとζを，K_P，T_I，Tを用いて表せ。

(3) 目標値$R(s)$に角周波数ωの正弦波状入力が入った場合の出力$Y(s)$の周波数応答について考える。目標値$R(s)$に対する出力$Y(s)$の周波数伝達関数を求めよ。

(4) 目標値$R(s)$に対する出力$Y(s)$のゲインを求めよ。

(5) 表１のように，調節器における比例ゲインK_Pの値が同じで，積分時間T_Iの値が異なる３つのケース(a)，(b)，(c)について考える。それぞれのケースにおけるゲイン−周波数特性線図を下記の注意事項に従って描け。

表１　各ケースにおける比例ゲインK_Pと積分時間T_Iの値

Case	K_P	T_I
(a)	1	$0.2\ T$
(b)	1	T
(c)	1	$5\ T$

注意事項：
- １つのゲイン−周波数特性線図上に，３つのケースの特性を線種を分けて描け。
- 横軸は，$u \equiv \omega/\omega_n$とし，$0.1 \le u \le 10$の範囲で描け。
- 縦軸は，$-30 \le g \le 10$の範囲で描け。
- ３つのケースの特徴と違いが分かるように丁寧に描け。

(6) 上記の３つのケースにおける，接点周波数でのuの値をそれぞれ求めよ。

受験番号					
氏　　名					

No. 1 ／ 4

採点欄

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学・航空宇宙専攻

※裏面の使用は不可

共通　問題番号	1	科目名	数　学

受験番号					
氏　　名					

No. 2 ／ 4

採点欄

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学・航空宇宙専攻

※裏面の使用は不可

共通　問題番号	2	科目名	力　学

受験番号					
氏　　名					

No. 3 ／ 4

採点欄

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学・航空宇宙専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

受験番号					
氏　　名					

No. 4 ／ 4

採点欄

２０２３年９月・２０２４年４月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学・航空宇宙専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　科目名