

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
 修士課程 一般・外国学生入学試験問題
 [専門科目] 【数学教育専攻】

解答上の注意

1. 数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。
- ①「専門科目・共通」（問題Ⅰ（線形代数）～問題Ⅱ（微分積分））は、志願者全員が解答する問題です。
- ②「専門科目・選択」は、問題Ⅲ～問題ⅩⅡから二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	宮川 健	問題Ⅲ～問題ⅩⅡ から、二問題選択
数学科教育研究指導	高木 悟	
解析学・応用解析学研究指導	新井 仁之	
解析学研究指導	梁 松	
解析学研究指導	戸松 玲治	
代数学研究指導	村井 聡	
幾何学研究指導	小森 洋平	
情報数学研究指導	小柴 健史	
情報数学研究指導	高島 克幸	
トポロジー研究指導	谷山 公規	

2. 解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。

また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

3. 解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。
4. 解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。
5. 問題用紙は「6枚」（本ページ含む）、解答用紙は「4枚」です。必ず枚数を確認すること。

以 上

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
 修士課程 一般・外国学生入学試験問題
 [専門科目・共通] 【数学教育専攻】

I (線形代数)

次の問に答えよ.

- (1) s, t を実数とする. 次の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} s & t & 0 & s \\ 0 & 0 & s & t \\ t & s & 0 & t \\ 0 & s & t & s \end{pmatrix}$$

- (2) A を n 次正方行列, I_n を n 次単位行列, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする. λ が A の固有値であることと, $\det(A - \lambda I_n) = 0$ を満たすことが同値であることを示せ.
- (3) a を実数とする. 次で定義される線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が全射になるのは a がどのような値をとるときか答えよ.

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & a \\ a & 1 & a & a^2 - a \\ (-1 - a) & -1 & 1 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

II (微分積分)

$y = \tan x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) の逆関数を $\arctan y$ ($y \in (-\infty, \infty)$) により表す.

- (1) 不等式

$$\frac{5y^6 + 5y^4 - y}{1 + y^2} - \arctan y + 2 \cos y > 1$$

はすべての実数 y に対して成り立つか. あるいはこの不等式をみたさない実数 y が存在するか. 証明をつけて答えよ.

- (2) 开区間 I 上で定義される実数値 C^1 級関数 $y = f(x)$ で, 関係式

$$2x^2 e^{-x} - y^5 + y \arctan y - 2 \sin y = 0 \quad (x \in I)$$

をみたすものが存在する最大の开区間 I を求めよ. ただし求めた I が題意をみたすことの証明もつけること. なおここで开区間は区間 (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$ の総称とする ($-\infty < a < b < \infty$).

- (3) (2) の $f(x)$ と I について, $f(x)$ は I 上で最小値, 最大値をとるか否か証明をつけて答えよ. そして, もし $f(x)$ が I 上で最小値をとる場合は, 最小値と最小値をとる点も求め, もし $f(x)$ が I 上で最大値をとる場合は, 最大値と最大値をとる点も求めよ.

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
 修士課程 一般・外国学生入学試験問題
 [専門科目・選択] 【数学教育専攻】

III 学校教育においてなぜ数学を教える必要があるのか，数学教育の意義について具体的に述べよ。

IV $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f(x, y) : X \times X \rightarrow [0, 1]$ とする．また, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$ とする．4次正方行列

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = f(i, j) \quad (i, j \in X)$$

に対し,

$$A * A = [\tilde{a}_{ij}], \quad \tilde{a}_{ij} = (a_{i1} \wedge a_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge a_{2j}) \vee (a_{i3} \wedge a_{3j}) \vee (a_{i4} \wedge a_{4j}) \quad (i, j \in X)$$

と定めるとき, 次の問に答えよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{のとき, } A * A \text{ を成分で表せ.}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.4 & 1 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{のとき, 推移律}$$

$$\forall i, j \in X, \quad f(i, j) \geq \max_{k \in X} \min\{f(i, k), f(k, j)\}$$

を満たすかどうか調べよ.

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択] 【数学教育専攻】

V 次の問に答えよ.

(1) μ は $\mathbb{R}$ 上の有限ボレル測度とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(3 - 2 \sin x)^n} \mu(dx)$$

を求めよ.

(2) μ が $\mathbb{R}$ 上の無限ボレル測度である場合も, (1) と同じ結果が成り立つか. 証明もしくは反例を与えよ.

VI 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の単位円周 $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ 上の複素連続関数のなす集合を $C(\mathbb{T})$ と書く. $C(\mathbb{T})$ は上限ノルム $\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \mathbb{T}\}$ によって Banach 空間の構造をもつ. $C(\mathbb{T})$ の実部分空間 E を次式で定める.

$$E = \{b\bar{z} + a + bz \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

ここで z は恒等関数 $z(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{T}$ を意味する. 次の問に答えよ.

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して等式 $\|b\bar{z} + a + bz\|_{\infty} = |a| + 2|b|$ を示せ.

(2) 実線形写像 $\varphi: E \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ を

$$\varphi(b\bar{z} + a + bz) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{bmatrix}$$

と定めると, φ は等長であることを示せ. ただし $M_2(\mathbb{C})$ を作用素ノルムによる Banach 空間とみなす.

(3) 実数 α に対して実線形写像 $\varphi_{\alpha}: E \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ を

$$\varphi_{\alpha}(b\bar{z} + a + bz) = \begin{bmatrix} a & b\alpha \\ b\alpha & a \end{bmatrix}$$

と定める. $\|\varphi_{\alpha}\|$ を求めよ.

VII 次の問に答えよ.

(1) G が有限群で H が G の部分群であるとき, H の位数は G の位数の約数であることを示せ.

(2) G を位数が 10 の可換でない群とする. G は二面体群に同型であることを示せ.

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
〔 専門科目・選択 〕 【数学教育専攻】

Ⅷ 3次正方行列の全体 $M(3, \mathbb{R})$ を9次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^9$ と同一視して位相空間と思う. 3次直交行列の全体 $O(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = E\}$ を $M(3, \mathbb{R})$ の部分位相空間と思う. ここで tA は A の転置行列とし, E は単位行列とする. 次の問に答えよ.

- (1) $O(3)$ はコンパクトであることを示せ.
- (2) $O(3)$ は連結ではないことを示せ.
- (3) $O(3)$ は3次元可微分多様体であることを示せ. ここで次の結果を用いてもよい. 「自然数 n と r は $n > r$ を満たすとする. 可微分写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ に対し $M = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = 0\}$ とする. M の任意の点 p における f のヤコビ行列の階数が r ならば, M は $n - r$ 次元可微分多様体である.」

Ⅸ 次の問に答えよ.

- (1) 密着位相空間の部分位相空間は密着位相空間であることを示せ.
- (2) 位相空間 X は少なくとも3点を含むとする. X の任意の点 x について, X の部分位相空間 $X \setminus \{x\}$ は密着位相空間であるとする. このとき X は密着位相空間であることを示せ.

X 次の問に答えよ.

- (1) クラインの壺の部分位相空間でメビウスの帯と同相なものが存在することを示せ.
- (2) M をメビウスの帯とする. M の3つの部分位相空間 S_1, S_2, S_3 で, 以下の(a) (b) (c) をすべて満たすものが存在することを示せ.
 - (a) S_1, S_2, S_3 はすべて単位円周 S^1 と同相である.
 - (b) S_1, S_2, S_3 はすべて M の内部 $\text{int}(M)$ に含まれる.
 - (c) M の3つの部分位相空間 $M \setminus S_1, M \setminus S_2, M \setminus S_3$ のうちのどの2つも互いに同相ではない.

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択] 【数学教育専攻】

Ⓐ 次の問に答えよ。

- (1) アルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語 $L_1 = \{0^i 1^j 0^k \mid i, j, k \geq 0\}$ の補言語を認識する状態数最小の決定性有限オートマトンを与えよ。
- (2) 正則言語 L に対して、その要素数が無限に存在するとき L を無限正則言語と呼ぶことにする。 L_2 をアルファベット $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の無限正則言語とすると、 $L_2 = L_3 \cup L_4$ かつ $L_3 \cap L_4 = \emptyset$ を満たす無限正則言語 L_3 と L_4 が存在することを示せ。

Ⓑ どの2つの辺も交差しないように平面上に描画できるグラフを平面的グラフという。また、完全 n 部グラフ $K_{p_1, p_2, \dots, p_n} = (V, E)$ とは、互いに交わりのない頂点集合の n 分割 $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, $p_i = |V_i|$ ($i = 1, \dots, n$) が存在して辺集合が $E = \cup_{i \neq j} \{\{u, v\} \mid u \in V_i, v \in V_j\}$ で与えられるグラフである。平面的グラフに関する以下の問題に答えよ。

- (1) $p_2 \geq 1$ に対して、完全2部グラフ K_{2, p_2} が平面的であることを示せ。
- (2) $p_3 \geq 1$ に対して、完全3部グラフ $K_{1, 1, p_3}$ が平面的であることを示せ。
- (3) 平面的グラフを辺の交差なしに平面上に描画したグラフを平面グラフというが、平面グラフに対するオイラーの公式とは何かを答えよ。
- (4) 設問(3)で答えたオイラーの公式を用いて、完全2部グラフ $K_{3, 3}$ が平面的でないことを証明せよ。



研究指導	
教員名 ()	
受験番号	
氏 名	

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験 解答用紙
[専門科目] 【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号
Ⅱ



研究指導	
教員名 ()	
受験番号	
氏 名	

2023年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験 解答用紙
[専門科目] 【数学教育専攻】

大学記入欄

問題番号

