

2023年度

数学（理系）

（問題）

<R05174581>

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は2ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
4. 解答用紙の裏面は計算のために使用してよいが、採点の対象とならない。
5. 受験番号および氏名は、試験が開始されてから、解答用紙の所定欄に正確に丁寧に記入すること（以下の記入例参照）。所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。なお、解答用紙が複数枚ある場合には、それぞれの所定欄に記入すること。
6. 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入すること。読みづらい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので、注意すること。

(記入例)

57001番



万	千	百	十	一
5	7	0	0	1

(数字見本)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

7. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き、解答用紙を裏返しにすること。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1 関数 $f(x) = xe^{-x}$ とする。 a を正の実数として、 $y = f(x)$ のグラフ、 x 軸、 直線 $x = a$ によって囲まれた部分を D とする。 次の問に答えよ。 ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0$ は証明なしに使って良い。

- (1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。 凹凸も調べよ。
- (2) D の面積 $S(a)$ を求めよ。 また、 極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ も求めよ。
- (3) D を x 軸の周りに一回転して出来る立体の体積 $V(a)$ を求めよ。 また、 極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ も求めよ。

問2 次の確率を求めよ。

- (1) 正方形の4辺に、2色を2回ずつ使って無作為に色をつける。同色の辺が必ず頂点を共有する確率。
- (2) 正六面体の6面に、3色を2回ずつ使って無作為に色をつける。同色の面が必ず辺を共有する確率。
- (3) 正八面体の8面に、4色を2回ずつ使って無作為に色をつける。同色の面が必ず辺を共有する確率。

問3 (1) 全ての正の実数 x, y に対し、 $2x + y \leq a\sqrt{x^2 + y^2}$ となるような実数 a の最小値を求めよ。

(2) 全ての正の実数 x, y, z に対し、 $x + y + z \leq b\sqrt{3x^2 + 2y^2 + z^2}$ となるような実数 b の最小値を求めよ。

問4 $x = \cos\theta$ とおく。 自然数 n について、 $\cos(n\theta)$ を x の多項式で表したものを $T_n(x)$ と書く。 次の問に答えよ。

- (1) $T_2(x), T_3(x)$ を求めよ。
- (2) 次の式を示せ。

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) $T_n(x)$ の定数項、 および x の1次の係数を求めよ。

[以下余白]

<R05174581>

受験 番号	万	千	百	十	一
か氏名					
氏名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2023年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

1	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 1

(裏面使用不可)

2023年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

2	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 2

(裏面使用不可)

<R05174681>

受験 番号	万	千	百	十	一
姓 氏名					
氏 名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2023年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

3	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 3

(裏面使用不可)

2023年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

4	/	4
---	---	---

採 点 欄

--	--

問 4

(裏面使用不可)