２０２２年９月・２０２３年４月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿6＿ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が＿8＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

○ 下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1　2
力学および電磁気学	3　4
量子力学および熱・統計力学	5　6

【解答方法】

（１）解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
（２）受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること。
（３）解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたる時には，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目か分かるように解答欄に明記すること。
（４）１枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。
（５）４題を超えて解答しないこと。
（６）使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（８枚）を提出すること。

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻
科　目　名：　数学一般

問題番号 1

次の各設問に答えよ。

(1) 時刻 (time) t を変数 (variable) とする関数 (function) $y(t)$ が，微分方程式 (differential equation)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=\mathrm{e}^t$$

を満たしている。ここで，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ は y の t による微分 (differential), e^t は指数関数 (exponential function) である。時刻 $t=0$ での初期条件 (initial conditions) が $y(0)=0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=1$ で与えられているとき，時刻 t における解 $y(t)$ を求めよ。

(2) 区間 (interval) $-1\leq x\leq 1$ において，$f(x)=x^2$ で定義される関数を考える。この関数に対して，n を 0 以上の整数 (integer) として，次の 2 つの積分 (integrals)

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x\,,\qquad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$$

を具体的に計算せよ。a_n については，$n=0$ と $n\neq 0$ で場合分けせよ。また，区間 $-1\leq x\leq 1$ における関数 $f(x)=x^2$ のフーリエ級数展開 (Fourier series expansion) は,

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\right]$$

と表される。このことを用いて，無限級数和 (infinite series sum)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

を求めよ。

(3) 2 つの変数 x, y に依存する関数 $u(x,y)$ が，偏微分方程式 (partial differential equation)

$$2y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=1$$

を満たしている。この偏微分方程式の解を，任意関数 (arbitrary function) f を用いて表せ。

(4) ベータ関数 (beta function) は，$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ と定義される。ここで，x と y はともに正の変数である。正の整数 n に対して，積分

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

をベータ関数を用いて表せ。

(5) 正の整数 n と実数 x に対して，

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$$

で定義される関数を，エルミート多項式 (Hermite polynomial) と呼ぶ。この定義を用いて，$H_n(x)$ の x に関する微分 $H_n'(x)$ を，$H_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

2022年9月・2023年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名：数学一般

問題番号 2

平面 (plane) $\mathbb{R}^2$ を実ベクトル空間 (real vector space) と見做し，平面の点は縦ベクトル表示 (column vector representation) するものとし，
ユークリッドノルム (Euclidean norm) $|\cdot|$ を導入する。即ち $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\left|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$ と定義する。
2 次正方行列 (2nd order matrix) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，$\|A\|$ を

$$\|A\| = \sup_{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} \left|A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right| \Big/ \left|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right|$$

で定義する。次の問に答えよ。

(1) $A \mapsto \|A\|$ は 2 次正方行列全体の成すベクトル空間のノルム (norm) である事を示せ。

(2) 任意の $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，次の不等式 (inequality) を示せ。

$$\left|A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right| \leq \|A\| \left|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right|$$

(3) 次の不等式を示せ。

$$\|A\| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

(4) (3) の不等式が等式 (equality) である為の必要十分条件 (necessary and sufficient condition) は $ad-bc=0$ である事を示せ。

(5) 非負整数 n と $t \in \mathbb{R}$ に対し，2 次正方行列 $E_n(t)$ を

$$E_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}A^j = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

で定義する。このとき $E_n(t)$ は唯一つの行列 $E(t)$ にノルム収束 (norm convergence) する事を示せ。

(6) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対し，$E(t)$ を求めよ。

2022年9月・2023年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名： 力学および電磁気学

問題番号 3

以下の設問に答えよ。

（1） 質点（material point）が$\boldsymbol{r}$の位置にあり，運動量（momentum）$\boldsymbol{p}$をもつとする。質点に働く力（force）が原点（the origin）O からの中心力（central force）のみのとき，原点 O のまわりの質点の角運動量（angular momentum）が保存されることを示せ。

（2） 前問（1）において原点 O と質点の位置を結ぶ線分（line segment）が掃過（sweep）する面積の面積速度（areal velocity）が一定（constant）になることを示せ。

（3） 原点を O とする空間に物体（object）A と物体 B のみが存在する状況を考える。物体 A の位置を$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$，物体 B の位置を$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$とする。物体 A と物体 B はそれぞれ質点とみなせるとする。物体 A の運動量と原点 O のまわりの角運動量をそれぞれ$\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{l}_{\mathrm{A}}$とし，物体 B の運動量と原点 O のまわりの角運動量をそれぞれ$\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}$，$\boldsymbol{l}_{\mathrm{B}}$とする。物体 A と物体 B には両者間の重力（万有引力（gravity））のみが働いているとする。このとき，角運動量の総和$\boldsymbol{l}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{l}_{\mathrm{B}}$が保存されることを示せ。

（4） 前問（3）において物体 A からみた物体 B の相対位置（relative position）を$\boldsymbol{r}$とし，物体 B に働く物体 A からの重力を$\boldsymbol{F}$とする。物体 A と物体 B の質量（mass）をそれぞれM，mとする。物体 A からみた物体 B の相対運動（relative motion）の運動方程式（equation of motion）を$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$，M，mを用いて示せ。また，得られた運動方程式からどのようなことが分かるか述べよ。

（5） 物体 A の位置が原点 O に固定されているとし，物体 A を中心とする極座標（polar coordinate）で物体 B の位置を表す。物体 B の動径方向の位置（radial coordinate）をr，速度の動径方向成分をv_r，物体 A のまわりの角運動量の大きさをlとする。物体 B には物体 A からの重力のみが働いているとして，物体 B の全エネルギー（力学的エネルギーの総和（total mechanical energy））Eをr，v_r，l，M，mを用いて表せ。万有引力定数（gravitational constant）はGとする。

（6） 前問（5）において，全エネルギーEのうち，物体 B の動径方向の運動の運動エネルギー（kinetic energy）以外を物体 B の動径方向の運動のポテンシャルエネルギー（potential energy）$V(r)$と考えることができる。$V(r)$の概形を描け。また，$V(r)$の最小値V_{m}とそのときのrの値r_{m}をl，M，m，Gを用いて表せ。

（7） 前問（6）の$V(r)$をふまえ，物体 B の運動の特徴を動径方向の運動と関連づけて述べよ。その際，全エネルギーEを用いて場合分けをせよ。

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学

問題番号 4

図１に示すように半径（radius）aのy軸の正負（positive and negative）の方向（direction）に無限に長い（infinitely long）直線状完全導体（straight perfect conductor）A がデカルト座標(cartesian coordinates)(x,y,z) のy軸に沿って平行（parallel）におかれている。 導体Aは原点（origin）$(0,0,0)$を通る。導体が無い空間の誘電率（dielectric constant）は ϵ_0 ，透磁率（permeability)は μ_0 として問いに答えよ。

図１の導体Aは単位長さあたり（per unit length）ρ の電荷（charge）に帯電(charged)しているとする。以下の問いに答えよ。

1) 導体 A 内部（inside）のy軸からの距離（distance）r における電場（electric field）の大きさ（strength）を答えよ。
2) 導体Ａ外部（outside）の原点からの距離 r における電場の大きさを答えよ。

図 2 に示すように半径 a の 2 本の無限に長い直線状完全導体 A と B が中心軸間（between central axes）の距離 $d\ (d \gg a)$ を隔ててy軸に沿って平行におかれている。導体Ａは $(0,0,0)$ を通り，二本の円筒は電磁力（electromagnetic force）によって動かないとして問いに答えよ。

図２の導体Aは単位長さあたり ρ ，導体Bは $-\rho$ の電荷に帯電しているとする。以下の問いに答えよ。

3) 導体外部のx軸上の中心軸間（$a < x < d-a, y=0, z=0$）の電場ベクトル(electric field vector)のx成分，y成分，z成分を答えよ。
4) 導体Ｂに対する導体Ａの電位（potential）はいくらか答えよ。
5) 導体間の単位長さあたりの静電容量（capacitance）を答えよ。

図２の導体間に V_a の電位差を与えるときの以下の設問に答えよ。ここでは導体に電流は流れていないとする。 以下の問いに答えよ。

6) 導体間の単位長さあたりの静電エネルギー（electrostatic energy）を答えよ。
7) 導体間に働く単位長さあたりの力（force）の大きさを答えよ。

図２の導体A, Bにｙ軸で正の方向に電流密度（current density）Jの電流を流した。同じy軸座標上では導体の電位は等しいとして以下の問いに答えよ。 ここで d は，導体の半径に対して十分に大きく導体を流れる電流は線電流（line current）とみなせるとする。

8) 座標（$2d,0,0$）での磁場ベクトル（magnetic field vector）のx成分，y成分，z成分を答えよ。
9) 導体間に働く単位長さあたりの力の大きさを答えよ。

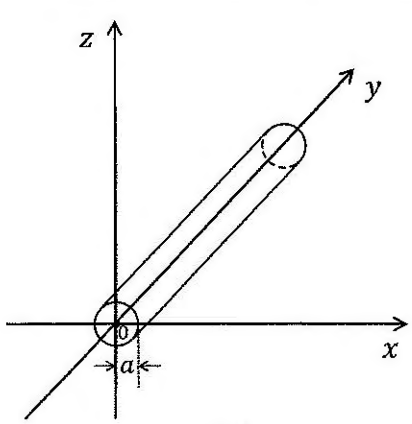

図１

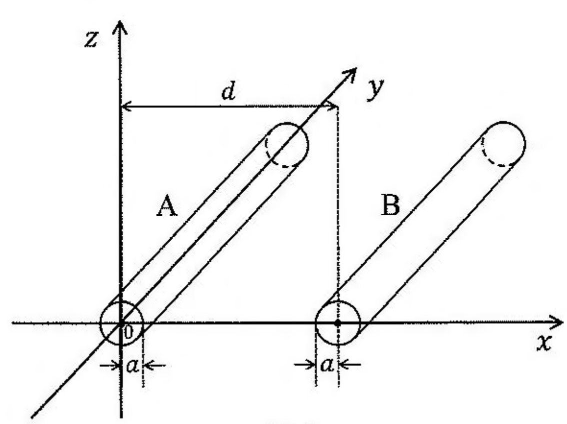

図２

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号　5

ある量子力学的粒子 (quantum-mechanical particle) の 2 つの異なる量子状態 (quantum states) $|\mathrm{L}\rangle$ と $|\mathrm{R}\rangle$ を考える。これらはそれぞれ規格化 (normalized) されており, 互いに直交 (orthogonal) している。

$$\langle \mathrm{L}|\mathrm{L}\rangle = \langle \mathrm{R}|\mathrm{R}\rangle = 1, \qquad \langle \mathrm{L}|\mathrm{R}\rangle = \langle \mathrm{R}|\mathrm{L}\rangle = 0$$

以下では, これら 2 つの状態と直交する状態は関与しない状況を考えるため, これら 2 つの状態の組 $\{|\mathrm{L}\rangle, |\mathrm{R}\rangle\}$ で完全系 (complete set) をなすものとして議論する。すなわち, $\hat{1}$ を恒等演算子 (identity operator) として,

$$|\mathrm{L}\rangle\langle \mathrm{L}| + |\mathrm{R}\rangle\langle \mathrm{R}| = \hat{1}$$

とする。

(1) ハミルトニアン演算子 (Hamiltonian operator)

$$\hat{H}_0 = \varepsilon_{\mathrm{L}}|\mathrm{L}\rangle\langle \mathrm{L}| + \varepsilon_{\mathrm{R}}|\mathrm{R}\rangle\langle \mathrm{R}|$$

の固有値 (eigenvalues) と固有状態 (eigenstates) を答えよ。

(2) $\hat{H}_0$ に加えて相互作用 (interaction)

$$\hat{V} = \Delta|\mathrm{L}\rangle\langle \mathrm{R}| + \Delta|\mathrm{R}\rangle\langle \mathrm{L}|$$

があるとき, ハミルトニアン演算子

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

の行列表示 (matrix representation) H を $\{|\mathrm{L}\rangle, |\mathrm{R}\rangle\}$ を基底 (basis) として答えよ。

(3) 前問 (2) で得たハミルトニアン行列 H の固有値を求めよ。

以下では $\varepsilon_{\mathrm{L}} = \varepsilon_{\mathrm{R}} = \varepsilon$ とする。

(4) ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ の固有値それぞれに属する (belong to) 規格化された固有状態をブラ・ケット記法 (bra-ket notation) で答えよ。

(5) $\hat{X} = |\mathrm{R}\rangle\langle \mathrm{R}| - |\mathrm{L}\rangle\langle \mathrm{L}|$, $\hat{Y} = |\mathrm{L}\rangle\langle \mathrm{R}| + |\mathrm{R}\rangle\langle \mathrm{L}|$ とするとき, 交換関係 (commutation relations) $\hat{Z} = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\hat{X}, \hat{Y}]$, $[\hat{Y}, \hat{Z}]$, $[\hat{Z}, \hat{X}]$ をそれぞれ求めよ。i は虚数単位 (imaginary unit) である。

(6) この系の時間発展演算子 (time-evolution operator) $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}$ を求めよ。t は時間であり, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ はプランク定数 (Planck constant) h を 2π で割った量である。

(7) この系が初期状態 $|\psi(0)\rangle = |\mathrm{L}\rangle$ から時間発展 (time evolution) を開始した場合, 時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

(8) 時刻 t におけるその状態 $|\psi(t)\rangle$ において状態 $|\mathrm{L}\rangle$ を見出す確率 (probability) $P_{\mathrm{L}}(t)$ と状態 $|\mathrm{R}\rangle$ を見出す確率 $P_{\mathrm{R}}(t)$ をそれぞれ求めよ。

(9) $P_{\mathrm{L}}(t)$ と $P_{\mathrm{R}}(t)$ のグラフを t の関数 (function) として描け。

2022年9月・2023年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

種類の異なる２つの原子が結合した分子(diatomic molecule)N個からなる温度Tの理想気体(ideal gas)が体積Vの容器に封入されている。ボルツマン定数をk_{B}，逆温度を$\beta \equiv \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$とし，分子間の相互作用は無視できるとする。

まず，エネルギー等分配則(law of equipartition of energy)を適用して内部エネルギーを求めよう。そのために，１つの分子を古典力学で記述し，重心運動(motion of center of mass)と相対運動(relative motion)に分解して考える。エネルギー等分配則によると，$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$のエネルギーが３自由度ある重心運動の各自由度の運動エネルギーにそれぞれ分配される。また，相対運動に関しては，$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$のエネルギーが振動，ポテンシャル，２つの回転運動のエネルギーにそれぞれ分配される。

(1) 容器の中の２原子分子の全エネルギーUをエネルギー等分配則により求めよ。

(2) (1)の結果を用いてこの理想気体の定積熱容量(heat capacity at constant volume)を求めよ。

次に統計力学(statistical mechanics)を適用しよう。この理想気体の分配関数(partition function)を$Z_{V,N}(\beta)$と表すことにする。１つの分子のハミルトニアンは重心運動と相対運動の部分に分解されるので，１つの分子の分配関数は，重心運動に対応する部分$z_{\mathrm{CM}}(\beta)$と相対運動に対応する部分$z_{\mathrm{rel}}(\beta)$の積となる。

(3) $Z_{V,N}(\beta)$を$z_{\mathrm{CM}}(\beta)$と$z_{\mathrm{rel}}(\beta)$を用いて表せ。

極低温でない限り$z_{\mathrm{CM}}(\beta) = V\left(\frac{M}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$となる。ここで$M$は分子の質量，$\hbar$は換算プランク定数である。

(4) $z_{\mathrm{rel}}(\beta)$はVに依存しないことに注意して，圧力Pを計算することによって，この理想気体の状態方程式(gas state equation)を求めよ。

古典的な統計力学(classical statistical mechanics)を適用すると，$z_{\mathrm{rel}}(\beta) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3\boldsymbol{r}\, e^{-\beta v(|\boldsymbol{r}|)}$となる。ここで，$m$，$\boldsymbol{r}$，および$v(|\boldsymbol{r}|)$はそれぞれ２つの原子の相対運動の換算質量(reduced mass)，相対座標，相互作用ポテンシャルである。

(5) $v(|\boldsymbol{r}|)$は，$|\boldsymbol{r}|$が２つの原子間の平均距離aに近いときは$\frac{1}{2}m\omega^2(|\boldsymbol{r}|-a)^2$と近似でき，それ以外では急激に大きくなると考えてよい。これより，$z_{\mathrm{rel}}(\beta) \cong \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dr\ a^2 \sin\theta\, e^{-\frac{\beta}{2}m\omega^2(r-a)^2}$と近似的に計算できる。この積分を実行し，$z_{\mathrm{rel}}(\beta)$を求めよ。

(6) (3)と(5)の結果から$Z_{V,N}(\beta)$を求め，それを利用してこの理想気体の定積熱容量を求めよ。

次に量子力学(quantum mechanics)に基づいて統計力学を適用しよう。相対運動に関する定常状態のシュレーディンガー方程式を解くことにより，エネルギー固有値は$E_{n,l,\nu} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2ma^2}$となる。ここで，第１項は振動に関するエネルギーであり，量子数$n = 0,1,2,\cdots$により指定される。第２項は回転運動に関するエネルギーであり，角運動量の大きさを表す量子数$l = 0,1,2,\cdots$と角運動量のz成分を表す量子数$\nu = 0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$により指定される（つまり$(2l+1)$重に縮退している）。これにより，分配関数$z_{\mathrm{rel}}(\beta)$は，振動に対応する部分$z_{\mathrm{vib}}(\beta)$と回転運動に対応する部分$z_{\mathrm{rot}}(\beta)$の積となる。

(7) $z_{\mathrm{vib}}(\beta)$と$z_{\mathrm{rot}}(\beta)$を求めよ。ただし，lに関する和は和記号で表したまま簡単化しなくてよい。

(8) Tが室温の場合，多くの２原子分子について$\frac{\hbar^2}{2ma^2k_{\mathrm{B}}} \ll T \ll \frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}}$という関係が成り立つ。このとき，この理想気体の定積熱容量を求めよ。

受験番号					
氏　　名					

No. 1 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号 ［　］　科目名 ［　］

受験番号					
氏　　名					

No. 2 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可

選択　問題番号		科目名	

受験番号					
氏　　名					

No. 3 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

受験番号					
氏　　名					

No. 4 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可

選択　問題番号		科目名	

受験番号					
氏　　名					

No. 5 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

受験番号					
氏　　名					

No. 6 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　科目名

受験番号					
氏　　名					

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

受験番号					
氏　　名					

No. 8 ／ 8

採点欄

２０２２年９月・２０２３年４月入学試験解答用紙
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名