

2022年9月・2023年4月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が 13 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。

◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

★問題 1，問題 2，問題 3 は必須問題である。

★問題 3 には問題 3A と問題 3B があります。必ず一方を選択し，解答しなさい。

★問題 4 から問題 12 は選択問題です。1 問を選択し，解答しなさい。

★この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名： 微分積分

問題番号

1

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ なる変換を考える。次の問に答えよ。

(1) 等式

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (x^2 + y^2) \frac{\partial v}{\partial x}$$

を示せ。

(2) 領域 $G = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < u < 1, 0 < v < \pi/4\}$ に対し, $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, v) \in G\}$ とおく。このとき

$$\iint_{\Gamma} xy \, dx dy$$

を求めよ。

変換 transformation

領域 domain

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：線形代数

問題番号 2

次の漸化式を満たす実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の全体が作るベクトル空間を V とする。

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (\sharp)$$

次の問に答えよ。

(1) $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}, \{z_n\}_{n \geq 1}$ を、最初の3項がそれぞれ

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), (y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0), (z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 1)$$

であるような V の元とする。このとき、 $\{\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}, \{z_n\}_{n \geq 1}\}$ は V の基底になることを示せ。

(2) $T: V \rightarrow V$ を $T(\{a_n\}_{n \geq 1}) = \{a_{n+1}\}_{n \geq 1}$ とする。ただし、 $\{a_{n+1}\}_{n \geq 1}$ は各 $n \geq 1$ について第 n 項が a_{n+1} である数列を表す。このとき T は線形写像になることを示せ。

(3) T の、基底 $\{\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}, \{z_n\}_{n \geq 1}\}$ に関する行列 A を求めよ。

(4) A の固有値を求めよ。

(5) 漸化式 $(\sharp)$ を満たす数列の一般項を求めよ。

漸化式	recurrence relation
実数列	real sequence
ベクトル空間	vector space
基底	basis
線形写像	linear mapping
固有値	eigenvalue
一般項	general term

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号 3

問題3には3Aと3Bがある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号 3A

$\mathbb{R}^2$ 上に、以下の5通りの二項関係 $\sim$ を考える。これらはいずれも同値関係である。次の問に答えよ。

- (i) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1 - y_1 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$
- (ii) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ または } (x_1, x_2) = (-y_1, -y_2)$
- (iii) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 = y_1 + y_2$
- (iv) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1^2 - x_2^2 = y_1^2 - y_2^2$
- (v) $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \in 2\mathbb{Z}$

- (1) (i), (ii), (iii) について、 $\sim$ が同値関係であることを示せ。
- (2) (i) - (v) について、それぞれ完全代表系を一つ与えて図示せよ。
- (3) $\mathbb{R}^2$ にユークリッド距離による位相を与えるとき、(i) - (v) について、商位相空間 $\mathbb{R}^2 / \sim$ がコンパクトであるかどうか、それぞれ理由をつけて答えよ。

二項関係	binary relation
同値関係	equivalence relation
完全代表系	a complete set of representatives
商位相	quotient topology
コンパクト	compact
ユークリッド距離	Euclidean metric

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：基礎数理

問題番号 3

問題3には3Aと3Bがある。必ず一方を選び、解答すること。

問題番号 3B

数列 $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が漸化式

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たし、 $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ であるとする。このとき、べき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

を考える。次の問に答えよ。

- (1) 任意の $n \geq 0$ に対して $1 \leq a_n \leq 4^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) べき級数 $f(z)$ は $z = 0$ の近傍で収束することを示せ。
- (3) $f(z)$ は有理関数になる。 $f(z)$ を求めよ。

数列	sequence
漸化式	recurrence relation
べき級数	power series
有理関数	rational function

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：代数

問題番号 4

X を有限集合, G を X に作用している有限群とする。軌道の個数を $O(X, G)$, 任意の $x \in X$ に対して,

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\},$$

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

また, 任意の $g \in G$ に対して,

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

とおく。次の問に答えよ。

(1) 任意の $x \in X$ に対して次を示せ。

$$|Gx| = |G/G_x|$$

(2) 次の集合を A とおく。

$$A = \{(x, g) \in X \times G \mid gx = x\}$$

A の元の個数を数えることにより, 次を示せ。

$$|O(X, G)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

(3) 立方体の各面に2色以下で色を付ける。ただし回転操作で移りあう塗り方は同じものとする。
全部で何通りの塗り方があるか。(2)を用いて答えよ。

有限集合	finite set
有限群	finite group
軌道	orbit
立方体	cube
回転	rotation

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：代数

問題番号

5

A を単位元 1 を持つ可換環とし、 $1 \neq 0$ とする。

- $e \in A$ がベキ等元であるとは、 $e \neq 0, 1$ であり、 $e^2 = e$ を満たすことである。
- $a \in A$ が零因子であるとは、 $a \neq 0$ であり、ある $b \neq 0$ が存在して $ab = 0$ が成り立つことである。
- $a \in A, a \neq 0$ に対して、ある正の整数 n が存在して $a^n = 0$ が成り立つ時、この a を A のベキ零元と呼ぶ。

次の問に答えよ。

- (1) A がベキ等元をもつならば、 A は零因子をもつことを示せ。
- (2) A が整数の環 $\mathbb{Z}$ の剰余環であるとし、さらに A はベキ零元を持たないとする。このとき、もし A が零因子を持てば A はベキ等元を持つことを示せ。
- (3) 一般の可換環 A でベキ零元をもたないものに対して、 A が零因子をもつならば A はベキ等元をもつと言えるか。成り立つならば証明し、成り立たないならば反例をあげて論証せよ。

可換環	commutative ring
単位元	identity element
ベキ等元	idempotent
零因子	zero-divisor
ベキ零元	nilpotent element
整数の環	the ring of (rational) integers

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：解析

問題番号 6

$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ とおく。 $z \in \Omega_0$ が $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \log z < \frac{\pi}{2}$ をみたす $\log$ の分枝をとる。
 $z \in \Omega_0$, $t > 0$ に対して $t^z = e^{z \log t}$ とおき, $\Gamma(z)$ を広義積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) t^z がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ。
- (2) $\Gamma(z)$ は Ω_0 で正則であることを示せ。
- (3) $z \in \Omega_0$ に対して $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ が成り立つことを示せ。
- (4) $\Gamma(z)$ は $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ 上の正則関数に拡張され, この拡張は一意的であることを示せ。

分枝

branch

広義積分

improper integral

コーシー・リーマンの関係式

the Cauchy-Riemann equations

正則

holomorphic

一意的

unique

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名: 解析

問題番号 7

$L^1(\mathbb{R})$ を、実数軸 $\mathbb{R}$ 上で定義されたルベーグ積分可能な関数全体の族とする。ただし、ほとんど至るところで等しい2つの関数を同一視する。各 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対してそのノルムを

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

と定める。また、 $C_\infty(\mathbb{R})$ を、すべての実数に対して定義された連続関数で、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ を満たすものの全体の族とする。各 $g \in C_\infty(\mathbb{R})$ に対してそのノルムを

$$\|g\|_\infty = \sup_{-\infty < x < \infty} |g(x)|$$

と定める。さらに、各 $f \in L^1(\mathbb{R})$ および $u \in \mathbb{R}$ に対して作用素 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

と定める。これが $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ の有界作用素になることを示したい。次の問に答えよ。

(1) $\mathcal{F}$ は任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して定義され、 $\mathcal{F}f$ は $\mathbb{R}$ 上の有界関数となることを示せ。

(2) $\mathcal{F}f(u)$ は u についての連続関数になることを示せ。

(3) $-\infty \leq a < b \leq \infty$ とする。开区間 (a, b) の定義関数 $\phi(x) = \chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & (a < x < b) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ に

対して、 $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}\phi(u) = 0$ となることを示せ。

(4) 任意の $\varepsilon > 0$ 、および各 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、単関数 (区間の定義関数の有限個の線形和) ψ で $\|f - \psi\|_1 < \varepsilon$ を満たすものが存在する。このことを用いて、任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、 $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(u) = 0$ が成り立つことを示せ。

(5) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\phi_n(x) = n \cdot \chi_{(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})}(x) = \begin{cases} n & (-\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定めるとき、 $\mathcal{F}\phi_n(u)$ および $\|\phi_n\|_1$ を計算せよ。

(6) $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ の作用素ノルムを求めよ。

ルベーグ積分可能

Lebesgue integrable

ほとんど至るところで等しい関数

functions which coincide almost everywhere

関数

function

連続

continuous

有界

bounded

作用素

operator

単関数

simple function

ノルム

norm

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：幾何

問題番号 8

S^1 を単位円周 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 上の1次微分形式

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx)$$

に対して $d\omega = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ とし I から S^1 への写像 ϕ を $\phi(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ により定める。

ϕ が I から $U = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$ の上への微分同相写像を与えることを示せ。

(3) ϕ による ω の引き戻し $\phi^*\omega$ を $f(x)dx$ の形に表せ。ここに $f(x)$ は I 上の C^∞ 級関数である。

(4) $i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ を埋め込み写像とする。次を示せ。

$$\int_{S^1} i^*\omega = 2\pi$$

(5) $i^*\omega = dg$ を満たす S^1 上の C^∞ 級関数 g が存在しないことを示せ。

(6) 1次ド・ラームコホモロジー群 $H_{DR}^1(S^1)$ が $\mathbb{R}$ と同型であることを示せ。

単位円周	unit circle
微分形式	differential form
微分同相写像	diffeomorphism
引き戻し	pull back
C^∞ 級関数	C^∞ function
埋め込み写像	embedding
ド・ラームコホモロジー群	de Rham cohomology group
同型	isomorphic

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名： _____ 幾何

問題番号

9

2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える。 S^2 の点 p における接ベクトル空間を $T_p S^2$ と書く。次の問に答えよ。

(1) S^2 上のベクトル場

$$p = (x, y, z) \mapsto w(p) = (y, -x, 0) \in T_p S^2$$

を考える。点 $(a, b, c) \in S^2$ に対して、 $\gamma(0) = (a, b, c)$ を満たす w の積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ を求めよ。

(2) C^∞ 級関数 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 $f = F|_{S^2}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f の勾配ベクトル場 ∇f の定義を述べよ。 $F(x, y, z) = x^2$ のとき、 ∇f を計算せよ。

(3) ベクトル場 $p = (x, y, z) \mapsto w(p) = (y, -x, 0)$ を考える。 $w = \nabla f$ を満たす C^∞ 級関数 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は存在するか。存在する場合には f の例を求めよ。存在しない場合にはその理由を説明せよ。

2次元球面	2-dimensional sphere
接ベクトル空間	tangent space
ベクトル場	vector field
積分曲線	integral curve
C^∞ 級関数	C^∞ function
勾配ベクトル場	gradient vector field

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名：確率・統計

問題番号 10

実数値確率変数 X, Y は独立で、それぞれ分布 F, G に従うとする。このとき、確率

$$p = \mathbb{P}(X < Y)$$

の推定を考えたい。今、分布 F からの m 個の独立な標本 $X_1, \dots, X_m$ と、分布 G からの n 個の独立な標本 $Y_1, \dots, Y_n$ が得られたとして、次の問に答えよ。

- (1) X が平均 1 のポアソン分布、 Y が平均 1 の指数分布に従うとき、 p の値を求めよ。
- (2) p の不偏推定量を 1 つ構成し、その不偏性を示せ。
- (3) $n, m \rightarrow \infty$ の下で p の一致推定量を 1 つ構成し、その一致性を示せ。

実数値確率変数	real valued random variable
独立	independent
確率	probability
分布	distribution
標本	sample
平均	mean
ポアソン分布	Poisson distribution
指数分布	exponential distribution
不偏推定量	unbiased estimator
一致推定量	consistent estimator

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名： 応用数理

問題番号 11

母関数

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \quad (b)$$

で定義されるエルミート多項式 $H_n(x)$ (n は 0 以上の整数) とエルミート多項式を解に持つ微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (*)$$

について、次の問に答えよ。 x, t は実変数とする。

(1) $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ を (b) より求めよ。

(2) 等式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n \geq 0)$$

が成り立つことを示せ。

(3) エルミート多項式 $H_n(x)$ が微分方程式 (*) の解となることを用いて、 $H_n(x)$ は以下の2つの関係式を満たすことを示せ。

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) &= 0 & (n \geq 1) \\ \frac{dH_n(x)}{dx} &= 2nH_{n-1}(x) & (n \geq 1) \end{aligned}$$

(4) 直交関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

母関数	generating function
エルミート多項式	Hermite polynomial
解	solution
微分方程式	differential equation
実変数	real variable
直交関係式	orthogonality relation

2022年9月・2023年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科目名： 応用数理

問題番号 12

$\mathbb{F}_2$ を位数 2 の有限体, $C \subset \mathbb{F}_2^n$ を $\mathbb{F}_2$ 上の m 次元部分ベクトル空間とする。 $C^\perp$ を次で定義する。

$$C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid \text{任意の } c \in C \text{ に対して } (x, c) = 0\},$$

ただし

$$(x, c) = x_1c_1 + \cdots + x_nc_n$$

である。また $C = C^\perp$ のとき C は自己双対とよぶ。 $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$ の重さ $\text{wt}(c)$ を次で定義する。

$$\text{wt}(c) = \left| \{i \mid 1 \leq i \leq n, c_i = 1\} \right|$$

次の問に答えよ。

- (1) C を自己双対とする。任意の $c \in C$ に対して $\text{wt}(c)$ は偶数であることを示せ。
- (2) C を自己双対とする。 C の基底を並べて $m \times n$ 行列 M を作る。このとき $MM^T = O$ を示せ。
ただし, M^T は M の転置行列, O は零行列である。
- (3) C を自己双対とする。このとき $m = \frac{n}{2}$ を示せ。
- (4) C の基底を $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ とする。任意の $v_i \in B$ に対して $\text{wt}(v_i)$ は 4 の倍数, 任意の $v_i, v_j \in B$ に対して $(v_i, v_j) = 0$ とする。このとき $C \subset C^\perp$ であり, かつ, 任意の $c \in C$ に対して $\text{wt}(c)$ は 4 の倍数であることを示せ。
- (5) 次の行列の行ベクトルで生成されるベクトル空間は, 自己双対であることを示せ。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

位数	order
有限体	finite field
重さ	weight
自己双対	self-dual
偶数	even number
転置行列	transposed matrix
零行列	zero matrix
基底	basis
倍数	multiple

受験番号					
氏 名					

2022年9月・2023年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

No.

1	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

必須 問題番号	1	科目名	微分積分
---------	---	-----	------

受験番号					
氏 名					

2022年9月・2023年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

No.

2	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	必須	問題番号	2	科目名	線形代数

受験番号					
氏 名					

2022年9月・2023年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

No.

3	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可

必須 問題番号	3A 3B
科目名	基礎数理

3A，3Bのうちどちらを解答するか○で囲むこと。

受験番号					
氏 名					

2022年9月・2023年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

No.

4	/	4
---	---	---

採点欄

※裏面の使用は不可	選択 問題番号		科目名	
-----------	---------	--	-----	--

選択する問題番号と科目名を記載すること。