2022年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目 ］　　　　【数学教育専攻】

解答上の注意

1．数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。

①**「専門科目・共通」**（問題Ⅰ（線形代数）～問題Ⅱ（微分積分））は、志願者全員が解答する問題です。

②**「専門科目・選択」**は、問題Ⅲ～問題ⅩⅣから二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	宮川　健	問題 Ⅲ ～ 問題ⅩⅣ から、二問題選択
数学科教育研究指導	高木　悟	
解析学・応用解析学研究指導	新井　仁之	
解析学研究指導	梁　松	
解析学研究指導	戸松　玲治	
代数学研究指導	村井　聡	
幾何学研究指導	小森　洋平	
情報数学研究指導	小柴　健史	
情報数学教育研究指導	髙島　克幸	
トポロジー研究指導	谷山　公規	

2．解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。

また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

3．解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。

4．解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。

5．問題用紙は「８枚」（本ページ含む）、解答用紙は「４枚」です。必ず枚数を確認すること。

以　上

I (線形代数)

次の問いに答えよ.

(1) 行列式の定義を述べよ.

(2) A を n 次正方行列, $\det(A)$ を A の行列式, ${}^tA$ を A の転置行列とする. (1) で述べた定義にもとづき $\det({}^tA) = \det(A)$ が成り立つことを示せ.

(3) 行列 X_n を, 対角成分が x, $(i, i+1)$ 成分と $(i+1, i)$ 成分が y $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, その他の成分が 0 である次の $n \times n$ 行列とする.

$$X_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y & x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y & x & y \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

行列 X_n の行列式を x, y に関する 2 変数斉次多項式として,

$$\det(X_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(n)\, x^{n-k} y^k \quad (a_0(n), a_1(n), \ldots, a_n(n) \in \mathbb{Z})$$

と表すとき, $a_2(n)$ および $a_4(n)$ を求めよ. ただし, n は 4 以上の整数とする.

II (微分積分)

$$f(x, y, t) = \left(x^2 - 1\right) \sin y - tx + \frac{1}{2}t^2$$

とする. $t > 0$ に対して, $D_t = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq t,\ 0 \leqq y \leqq \pi\}$ とし,

$$F(t) = \min_{(x,y) \in D_t} f(x, y, t)$$

とする. $F(t)$ を求めよ.

２０２２年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・選択 ］ 【数学教育専攻】

$\boxed{\text{III}}$ 平成 29 年，平成 30 年に改訂された算数科・数学科の学習指導要領に関して次の問いに答えよ．

(1) 算数科・数学科において育成を目指す資質・能力が三つの柱に沿って明確化されるようになった．この「三つの柱」とはどのようなものか説明せよ．

(2) 今回の改訂によるもっとも大きな指導内容の変化はどのようなものか，小学校，中学校，高等学校のいずれかの場合にあなたの考えを具体的に述べよ．

$\boxed{\text{IV}}$ $p, q \in [0,1]$，$\lambda > 1$ に対して

$$T(p,q) = \frac{pq}{\lambda + (1-\lambda)(p+q-pq)}$$

とするとき，以下の命題が真であることを示せ．

(1) $\forall p, q, r \in [0,1]\ [T(T(p,q),r) = T(p,T(q,r))]$

(2) $\forall p, q, r, s \in [0,1]\ [(p \leqq q \wedge r \leqq s) \Rightarrow T(p,r) \leqq T(q,s)]$

$\boxed{\text{V}}$ H を複素ヒルベルト空間，$B(H)$ を H 上の有界線形作用素全体のなす集合とする．
作用素 $S \in B(H)$ に対して，次のことが同値であることを示せ．

(i) $\|S\| \leqq 1$，ただし $\|S\|$ は作用素ノルムを表す．

(ii) 次の作用素 T は非負作用素である．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & S^* \\ S & 1 \end{pmatrix} \in B(K),$$

ただし 1 は H の恒等作用素を表し，K は直和ヒルベルト空間

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in H \right\}$$

を表す．

$\boxed{\text{VI}}$ $[0,1]$ 上のルベーグ測度の可算直積を μ とする．このとき，

$$\mu\left(\left\{(x_1, x_2, \cdots) \in [0,1]^{\mathbb{N}} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x_n} > 4\right\}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

が成り立つことを証明せよ．

２０２２年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択]　　　　【数学教育専攻】

Ⅶ　G を群とする．G の交換子群 $D(G)$ とは，G の交換子全体

$$\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$$

で生成される G の部分群である．次の問いに答えよ．

(1) N が G の正規部分群であり，G/N がアーベル群であるとき，$D(G) \subseteq N$ が成り立つことを示せ．

(2) 4 次対称群 S_4 の交換子群 $D(S_4)$ を求めよ．

(3) $D(D(S_4))$ を求めよ．

(4) $D(D(D(S_4)))$ を求めよ．

Ⅷ　次の問いに答えよ．

(1) R を単位元を持つ可換環，$\mathfrak{m} \subsetneq R$ を R のイデアルとする．次の 2 条件が同値であることを示せ．

(i) $\mathfrak{m}$ が R の極大イデアルである．

(ii) 剰余環 $R/\mathfrak{m}$ が体である．

(2) 2 変数多項式環 $\mathbb{Q}[x, y]$ を考える．集合

$$I = \left\{ f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y] \mid f(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}) = 0 \right\}$$

が $\mathbb{Q}[x, y]$ の極大イデアルであることを示せ．

(3) $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし，1 変数多項式環 $\mathbb{F}_2[x]$ を考える．$\mathbb{F}_2[x]/J$ が位数 8 の有限体となる $\mathbb{F}_2[x]$ のイデアル J を一つ与えよ．

IX $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して $S(n) = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leqq m \leqq n\}$ とおき，$\mathcal{D} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{S(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．

(1) $\mathcal{D}$ は $\mathbb{N}$ 上の位相であることを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{N}, \mathcal{D})$ から自分自身への自己同相写像は恒等写像に限ることを証明せよ．

X 以下の問いに答えよ．

(1) 連結な 1 次元多様体の同相類をすべて挙げよ．答えのみでよい．

(2) 2 つの連結な 1 次元多様体の直積位相空間と同相であるような位相空間の同相類をすべて挙げよ．

２０２２年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択]　　　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\text{XI}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面 $\mathbb{C}$ の点 z_0 の近傍で正則な関数 $f(z)$ と十分小さな任意の正の実数 R について，次の不等式を示せ．

$$|f(z_0)| \leqq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|z| \leqq R} |f(z_0 + z)| dx\, dy$$

(2) 上の不等式を用いて，最大値の原理「連結開集合 D 上の正則関数 $f(z)$ に対し，絶対値 $|f(z)|$ が D で最大値を取れば，$f(z)$ は定数関数になる」を証明せよ．

$\boxed{\text{XII}}$ M, N をそれぞれ C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級写像 $f : N \to M$ がはめ込みであるとは，N の任意の点 p における f の微分 $df_p : T_p(N) \to T_{f(p)}(M)$ が単射となることである．自然数 m, n に対し，次の問いに答えよ．

(1) $m > n$ ならば，n 次元球面 S^n から m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ へのはめ込みが存在することを示せ．

(2) $m \leqq n$ ならば，S^n から $\mathbb{R}^m$ へのはめ込みは存在しないことを示せ．

２０２２年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
[専門科目・選択]　　　　【数学教育専攻】

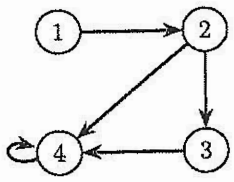
XIII　代表的なデータ構造としてスタックとキューが存在する．

(1) まず，2つのスタックを用いて1つのキューを実装する方法を示せ．

(2) 次に，2つのキューを用いて1つのスタックを実装する方法を示せ．

なお，スタックやキューが空であるかどうかを判定する手続きを仮定してよい．また，エラー処理については考慮する必要はない．

XIV　頂点集合 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ に対する以下の有向グラフ $G = (V, E)$ に関して，4行4列の隣接行列 $A = (a_{ij})$ を，もし $(i, j) \in E$ であれば $a_{ij} = 1$，そうでなければ $a_{ij} = 0$ と定める．例えば $a_{12} = 1$ である．



(1) A^2 を答えよ．また，計算した A^2 の $(2, 4)$ 成分の値は，有向グラフ G に関して何の個数を表すか答えよ．

(2) A^{100} を答えよ．

(3) $X = \sum_{\ell=0}^{3}(A + {}^t\!A)^\ell$ を答えよ．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列とする．また，X のすべての成分は正になるが，それはグラフ G に関するどういう性質を表すかについても答えよ．

(4) 有向辺 $e = (1, 2) \in E$ を除いたグラフ $G' = G - e$ の隣接行列 A' に対して，(3) と同様に定義される $X' = \sum_{\ell=0}^{3}(A' + {}^t\!A')^\ell$ において 0 になる成分は，どの (i, j) 成分か答えよ．また，それらの成分が 0 になる理由を G' の性質として答えよ．