

数 学

問 題

2021年度

〈R03150017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1、その2、その3）を配付します。
2. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせてください。
4. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入してください。
5. 解答用紙記入上の注意
 - (1) 解答用紙の所定欄（2カ所）に、氏名および受験番号を正確に丁寧に記入してください。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入してください。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (4) 受験番号は右詰めで記入し、余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入しないでください。

(例) 3825番⇒

	万	千	百	十	一
		3	8	2	5

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入してください。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合があります。
7. 文字や数字は明瞭、かつ丁寧に記入してください。判別できない場合や読めない場合は、採点の対象外となることがあります。
8. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
9. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにしてください。
10. 問題冊子は持ち帰ってください。
11. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

[I] xy 平面上の曲線 $y = x^3$ を C とする。 C 上の 2 点 $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ をとる。さらに, C 上で原点 O と B の間に動点 $P(t, t^3)$ ($0 < t < 1$) をとる。このとき, 以下の間に答えよ。

- (1) 直線 AP と x 軸のなす角を α とし, 直線 PB と x 軸のなす角を β とするとき, $\tan \alpha, \tan \beta$ を t を用いて表せ。ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。
- (2) $\tan \angle APB$ を t を用いて表せ。
- (3) $\angle APB$ を最小にする t の値を求めよ。

[II] 整式 $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ について, 以下の間に答えよ。

- (1) x^6 を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 自然数 n が 3 の倍数であるとき, $(x^2 - 1)^n - 1$ が $f(x)$ で割り切れることを示せ。

[III] 複素数 $\alpha = 2 + i, \beta = -\frac{1}{2} + i$ に対応する複素数平面上の点を $A(\alpha), B(\beta)$ とする。このとき, 以下の間に答えよ。

- (1) 複素数平面上の点 $C(\alpha^2), D(\beta^2)$ と原点 O の 3 点は一直線上にあることを示せ。
- (2) 点 $P(z)$ が直線 AB 上を動くとき, z^2 の実部を x , 虚部を y として, 点 $Q(z^2)$ の軌跡を x, y の方程式で表せ。
- (3) 点 $P(z)$ が三角形 OAB の周および内部にあるとき, 点 $Q(z^2)$ 全体のなす図形を K とする。 K を複素数平面上に図示せよ。
- (4) (3) の図形 K の面積を求めよ。

[IV] n, k を 2 以上の自然数とする。 n 個の箱の中に k 個の玉を無作為に入れ、各箱に入った玉の個数を数える。その最大値と最小値の差が l となる確率を P_l ($0 \leq l \leq k$) とする。このとき、以下の間に答えよ。

(1) $n = 2, k = 3$ のとき、 P_0, P_1, P_2, P_3 を求めよ。

(2) $n \geq 2, k = 2$ のとき、 P_0, P_1, P_2 を求めよ。

(3) $n \geq 3, k = 3$ のとき、 P_0, P_1, P_2, P_3 を求めよ。

[V] 正四面体 $OABC$ に対し、三角形 ABC の外心を M とし、 M を中心として点 A, B, C を通る球面を S とする。また、 S と辺 OA, OB, OC との交点のうち、 A, B, C とは異なるものをそれぞれ D, E, F とする。さらに、 S と三角形 OAB の共通部分として得られる弧 DE を考え、その弧を含む円周の中心を G とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とし、以下の間に答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 三角形 OAB の面積を S_1 、四角形 $ODGE$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1 : S_2$ をできるだけ簡単な整数比により表せ。

[以下余白]

数 学(その1)

採 点 欄

<2021 R03150017>

受験番号	万	千	百	十	一
	8	8	8	8	8
氏名					

①

[I]

8	8
---	---

[II]

8	8
---	---

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

<2021 R03150017>

受験番号	万	千	百	十	一
	8	8	8	8	8
氏名					

[I]

[II]

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

数 学

(解答用紙)

(その1)

※問題を写す必要はありません。

※下書きには問題冊子の余白を使用してください。

※裏面は使用しないでください。

①

<2021 R03150017>

受験 番号	万	千	百	十	一
	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
氏 名					

2

[Ⅲ]

⊗	⊗
---	---

[Ⅳ]

⊗	⊗
---	---

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。
所定欄以外に受験番号・氏名を
記入してはならない。記入した
解答用紙は採点の対象外となる
場合がある。

<2021 R03150017>

受験 番号	万	千	百	十	一
	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
氏 名					

[Ⅲ]

[Ⅳ]

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。
所定欄以外に受験番号・氏名を
記入してはならない。記入した
解答用紙は採点の対象外となる
場合がある。

数 学

(解答用紙)

(その2)

※問題を写す必要はありません。

※下書きには問題冊子の余白を使用してください。

※裏面は使用しないでください。

2

数 学(その3)

<2021 R03150017>

受験番号	万	千	百	十	一
	○	○	○	○	○
氏名					

3

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

採 点 欄

[V]

○	○
○	○

<2021 R03150017>

受験番号	万	千	百	十	一
	○	○	○	○	○
氏名					

[V]

(注意) 受験番号は右詰で記入すること。所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

数 学

(解答用紙)

(その3)

※問題を写す必要はありません。

※下書きには問題冊子の余白を使用してください。

※裏面は使用しないでください。

3