２０１９年９月・２０２０年４月入学試験

大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿6＿ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が＿8＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

【選択方法】

○ 下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1　2
力学および電磁気学	3　4
量子力学および熱・統計力学	5　6

【解答方法】

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2) 受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること。
(3) 解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目かがわかるように解答欄に明記すること。
(4) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。
(5) ４題を超えては解答しないこと。
(6) 使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（８枚）を提出すること。

2019年9月・2020年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名 : 数学一般

問題番号 1

次の (a) と (b) の行列 (matrix) を考える。

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 & -1 \\ 1+\mathrm{i} & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i は虚数単位 (imaginary unit) である。また, 以下の問において, E は 3 行 3 列 (three rows and three columns) の単位行列 (identity matrix) を表し, 正方行列 M の指数関数 (exponential function) e^M は $\mathrm{e}^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義 (define) されるものを採用する (ただし, M^0 は単位行列)。

(1) (a) と (b) の行列それぞれのエルミート共役 (Hermitian conjugate) を答えよ。

(2) (a) と (b) の行列は, 一方は対角化でき (diagonalizable), もう一方は対角化できない (nondiagonalizable)。対角化できる行列は (a) と (b) のどちらか答えよ (対角化してみせることや証明 (proof) は求めない)。

以下では, (a) と (b) の行列のうち, 対角化できる方の行列を A, 対角化できない方の行列を B とする。

(3) 行列 A のトレース (trace) $\mathrm{Tr}\, A$ と $(A-E)^2$ をそれぞれ計算せよ。

(4) 行列 A の固有値 (eigenvalue) とそれぞれの重複度 (multiplicity) を答えよ。

(5) $\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} A}$ を計算せよ。

(6) 行列 B の固有値を求めよ。

(7) $(B-E)(B-3E)^2$ を答えよ。

(8) 行列 $P = \alpha(B-3E)^2$ が $P^2 = P$ を満たす射影行列 (projection matrix) になるように係数 (coefficient) α を定めよ。

(9) 行列 $Q = E - P$ と行列 $N = B - P - 3Q$ を定義した場合に, N^2 と NQ と QN をそれぞれ答えよ。

(10) 自然数 (natural number) $n = 1, 2, \ldots$ に対して B^n を計算せよ。

(11) t を複素数 (complex number) として e^{-tB} を計算せよ。

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 2

ユークリッド空間 (Euclid space) $\mathbb{R}^3$ の標準内積 (standard inner product) を $\cdot$ で表し，内積から定まるノルム (norm) を $|\cdot|$ と表す。即ち $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ に対し $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $|a|=(a\cdot a)^{1/2}=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$ と定める。$V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を C^2 級としニュートンの運動方程式 (Newton's equation of motion)

$$\ddot{x}(t)=-\nabla V\left(x(t)\right) \tag{1}$$

を初期条件 (initial condition) $(x(0),\dot{x}(0))=(x_0,v_0)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ の下で考える。但し，上つきドット (upper dot) は時間微分 (time derivative) を表すものとする。∇V は C^1 級であり，特に局所リプシッツ条件 (locally Lipschitz condition) を満たすので，式 (1) の時間局所 C^2 解は存在する。以下，時間大域 C^2 解 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ が存在するものと仮定して，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 t におけるエネルギー (energy) を $E(t)=\dfrac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2+V\left(x(t)\right)$ とするとき，エネルギー保存則 (energy conservation law) を示せ。即ち任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，等式

$$E(t)=E(0)$$

が成立することを示せ。

(2) 次の等式を示せ。

$$\frac{d^2}{dt^2}|x(t)|^2=2\left(|\dot{x}(t)|^2-x(t)\cdot\nabla V\left(x(t)\right)\right),\ t\in\mathbb{R}$$

(3) V は任意の $x\in\mathbb{R}^3$ に対し，$V(x)+\dfrac{1}{2}x\cdot\nabla V(x)\le 0$ なる条件を満たし，(x_0,v_0) は $\dfrac{1}{2}|v_0|^2+V(x_0)\ge 0$ なる条件を満たしているものとする。このとき，次の不等式を示せ。

$$|x(t)|^2\ge 2E(0)t^2+2(v_0\cdot x_0)t+|x_0|^2,\ t\in\mathbb{R}$$

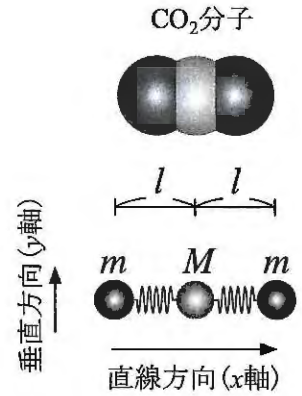
(4) V は任意の $x\in\mathbb{R}^3$ に対し，$x\cdot\nabla V(x)\le 0$ なる条件を満たしているものとする。
さらに，$t_0<t_1$ なる時刻 t_0,t_1 において $x(t_0)=x(t_1)=0$ となっているものとする。
このとき x は恒等的に 0(identically zero) であることを示せ。

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 3



二酸化炭素(CO_2)のような直線三原子分子(linear triatomic molecules)構造の振動(vibrations)を考える。直線三原子分子を線形対称分子(symmetric linear molecules)とし，質量のない長さ l，バネ定数 k_x のバネに，図のように質量 m の質点２個と，質量 M の質点１個をつけた構造であると考え，以下の問に答えよ。

まず，直線上の振動について考える。
バネに沿って x 軸をとり，それぞれの質点の座標を左から順に x_1, x_2, x_3 とする。バネが静止した状態における平衡位置(equilibrium position)の座標を x_1^0, x_2^0, x_3^0 とする。

(1) バネの振動時における３つの質点の運動方程式(equation of motion)をそれぞれ記せ。
(2) 平衡点からの変位を x_1', x_2', x_3' としたとき，(1)の運動方程式を x_1', x_2', x_3' を用いて書き直せ。
(3) 各基準振動(normal mode)の振動数(frequency) ω を求めよ。なお，$\lambda = k_x/m$, $\mu = k_x/M$ を用いよ。
(4) (3)で得られた ω に対応する固有ベクトル(eigenvector)を求めよ。
(5) (4)の結果がどのような運動状態を示すか，概略を図示せよ。

次に，バネのたわみ(bending)によって生じる垂直な方向の振動について考える。
バネが静止した状態において，質点 M の平衡点を原点として垂直方向に y 軸をとる。たわみによる垂直方向の変位は微小であり，それに比例した復元力(restoring force)が垂直方向に働くものとする(比例定数 k_y)。バネの振動による各質点の変位は，x 軸方向には左から順に x_1', x_2', x_3' であり，y 軸方向には y_1', y_2', y_3' とする。以下では，$l \gg |x'|, |y'|$ であるとし，２次の微小量は無視して良い。

(6) バネのたわみによる垂直方向の振動に対する運動方程式を記せ。
(7) 以下，簡単のために系全体の並進運動がないとすると，分子の質量中心(center of mass)は静止していると考えることができる。このときに y_1', y_2', y_3' の満たす関係を式で表せ。また，回転運動もないとすると，質点 M の平衡位置まわりの角運動量の和はゼロであるので，このとき力のモーメント(moment of force)がゼロであることを式で表せ。
(8) (7)で求めた関係式を用いて，垂直方向の角振動数 ω' の固有値を求めよ。また，対応する固有ベクトルを求めよ。
(9) (8)の結果がどのような運動状態を示すか，概略を図示せよ。

2019年9月・2020年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名: 力学および電磁気学

問題番号 4

電場(electric field)を $\boldsymbol{E}$, 磁束密度(magnetic flux density)を $\boldsymbol{B}$, 電流密度(electric current density)を $\boldsymbol{j}_e$, 電荷密度(electric charge density)を ρ_e, 真空(vacuum)の誘電率(permittivity)を ε_0, 透磁率(permeability)を μ_0 とする。国際単位系(SI units)を用い, 以下の設問に答えよ。解答だけでなく, 途中の計算式も記述せよ。

(1) マックスウェルの方程式(Maxwell's equations)を上記の物理量のみを用いて微分形(differential formulation)で書き出し, それぞれの物理的な意味を説明せよ。

(2) 単独の磁荷をもつ磁気単極子(magnetic monopole) が存在し, 磁場の源になっている世界では, (1)のマックスウェル方程式をどのように書き換えるべきか答えよ。必要であれば, 磁荷密度(magnetic charge density) ρ_m, 磁流密度(magnetic current density) $\boldsymbol{j}_m$ を用いてよい。

(3) 通常のマックスウェル方程式に戻り, 電荷も電流もない真空中の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁速密度 $\boldsymbol{B}$ は波動方程式(wave equation) に従うことを示し, この波動方程式を満たす解は, 光速(speed of light) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で伝搬することを説明せよ。

(4) ある慣性系K(x, y, z, t)において波動方程式が成立しているとする。この波動方程式を, K系に対して x 軸正方向に相対速度 v で運動しているK$'(x', y', z', t')$系にガリレイ変換(Galilean transformation)すると波動方程式はどうなるか, 物理的意味も含めて答えよ。
なお, $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ とする。

(5) (4)をガリレイ変換でなく, ローレンツ変換(Lorentz transformation)に変えた場合, 波動方程式はどう変換されるか書き下せ。また, そのとき光速が変換の前後で不変になることも示せ。
なお, 座標変換は以下のように与えられる。

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma v}x + \gamma t \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}\right)$$

(6) $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{A}/\partial t - \nabla\phi$ を満たす電磁ポテンシャル(ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラーϕ) を考える。
微分可能な任意関数 χ を用いて, $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$ のように表せる新しい電磁ポテンシャル$(\boldsymbol{A}', \phi')$も, $(\boldsymbol{A}, \phi)$と同じ電磁場$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$を与えることを示せ。また, この電磁ポテンシャルの自由度によって, $\nabla\cdot\boldsymbol{A}' + \varepsilon_0\mu_0\,\partial\phi'/\partial t = 0$ (Lorenz gauge)を満たすような$(\boldsymbol{A}', \phi')$を選ぶことができる。このとき, χ が満たすべき条件を書け。

(7) 真空中に半径(radius) a, 巻数密度(turns density) n の無限に長いソレノイドコイル(solenoid coil)があり, コイルには電流 I が流れている。系の対称性(symmetry)を考慮し, コイルの軸方向を z 軸, 半径方向を r (軸中心で $r = 0$), 円柱の円周方向を θ とする円柱座標系(cylindrical coordinate system)を用いて, ソレノイド内側と外側の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ をそれぞれ求めよ。また, 半径 r と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ の関係をそれぞれ図示せよ。

(8) 電磁ポテンシャルは, 単に数学的に導入されたポテンシャルではなく, 物理的な実在(ゲージ場)であることが知られている。この実在を検証するためには, 磁場の影響はないがベクトルポテンシャルは存在する場を用いる必要がある。実際にどのような実験系を構築し, なにを測定・観測すればよいか, 論じよ。
ヒントワード: 電子の経路(path), 干渉縞(interference fringes), ソレノイド(トロイド)

2019年9月・2020年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

ハミルトニアン(Hamiltonian) $\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ をもつ１次元調和振動子(one-dimensional harmonic oscillator)を考える。ここで$\hat{x}$と$\hat{p}$はそれぞれ座標と運動量の演算子(operator)であり，mとωは振動子の質量とその固有振動数(eigenfrequency)である。$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$とする座標表示を用いて，以下の問に答えよ。

(1) $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)$, $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)$で定義される演算子$\hat{a}^\dagger$と$\hat{a}$，および$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$で定義される演算子$\hat{N}$を導入する。このとき，交換関係(commutation relation) $[\hat{x}, \hat{p}]$，$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$，$[\hat{N}, \hat{a}]$ および $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$ をそれぞれ求めよ。

(2) $\hat{p}, \hat{x}$の代わりに$\hat{a}^\dagger, \hat{a}$を用いてハミルトニアンを表せ。さらに変形して，$\hat{a}^\dagger, \hat{a}$の代わりに$\hat{N}$を用いてハミルトニアンを表せ。

ここで，演算子$\hat{N}$に対する固有値(eigenvalue)をn，その規格直交化(orthonormalized)された固有状態(eigenstate)を$|n\rangle$とする。ただし，nは整数である。

(3) nが負の値にはなり得ないことを証明せよ。

(4) $\hat{a}^\dagger|n-1\rangle$ および $\hat{a}|n+1\rangle$ を計算し，$|n\rangle$を用いて表せ。

(5) ハミルトニアン$\hat{H}_0$の固有値を求めよ。ただし，エネルギーの低い方から$E_n, n = 0, 1, 2, \cdots$と表記するものとする。

(6) 座標演算子の行列要素$\langle n'|\hat{x}|n\rangle$，および運動量演算子の行列要素 $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$をそれぞれ求めよ。

(7) 座標の２乗の行列要素$\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$，および運動量の２乗の行列要素$\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$をそれぞれ求めよ。

(8) n番目の固有状態における座標と運動量の不確定さの積$\Delta x \cdot \Delta p$を求めよ。
なお，xの平均値を$\bar{x}$，x^2の平均値を$\overline{x^2}$とした場合，$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$と計算できる。

(9) $\hat{a}|0\rangle = 0$であることを利用して，基底状態(ground state) $|0\rangle$ の波動関数(wave function)を求めよ。必要があれば，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

(10) $\hat{H}_0$に$\lambda\hat{x}$を加えたハミルトニアン$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \lambda\hat{x}$をもつ系を考える。ただし，$\lambda$は定数とする。$\lambda\hat{x}$を摂動(perturbation)と考え，２次の摂動項までを考慮して基底状態の固有値を求めよ。

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名： 量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

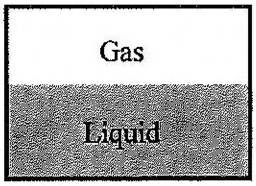


Fig. 1

分子数Nの単成分物質を体積V_0の容器に閉じ込めて温度をTにしたところ，物質はFig. 1 のように液体相(Liquid)と気体相(Gas)に分離して平衡（equilibrium）となった。この状態で温度を保ちながら，２相を分割している平面の面積(interfacial area)Aを準静的にdAだけ変化させると，系の内部エネルギーは次式のように変化する。

$$dU = TdS - pdV_L - pdV_g + \mu dN^L + \mu dN^g + \mu dN^\sigma + \gamma dA \qquad ①$$

Sは系全体のエントロピー（entropy），pは圧力(pressure)，μは１分子当たりの化学ポテンシャル(chemical potential)，V_LとV_g は液体相と気体相の体積(volume)，N^L，N^g，N^σはそれぞれ液体相，気体相，分割面での分子数(number of molecules)，γは表面張力(surface tension)である。２相の界面(interface)を$N^\sigma = 0$となる分割面にとり，界面の Helmholtz 自由エネルギーF^σとエントロピーS^σを，$F^\sigma = F - (F^L + F^g)$，$S^\sigma = S - (S^L + S^g)$と表す。$F$，$F^L$，$F^g$，$S$，$S^L$，$S^g$は，系全体，液体相，気体相の Helmholtz 自由エネルギーとそれぞれの相のエントロピーである。

(1) 界面の Helmholtz 自由エネルギーF^σの全微分dF^σを，S^σを含む式で表せ。
(2) 温度一定の下で界面の面積をλ倍すると（λは正の実数），自由エネルギーF^σもλ倍になる。このことを使って，$F^\sigma = \gamma A$となることを導け。
(3) 界面のエントロピーS^σと界面の内部エネルギーU^σをT，A，γのみが含まれる式でそれぞれ表せ。
(4) (3)を元に，温度Tにおける界面の表面張力γを，温度T，内部エネルギーU_σ，面積Aのみを含む式で表せ。

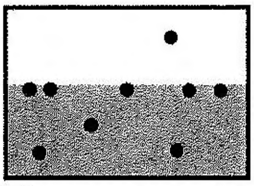


Fig. 2

上記の物質（成分１と表す）に，微量の溶質（solvent）（成分２と表す）を，モル比（molar ratio）$x_1 : x_2$ の割合で混合して理想希薄溶液（ideal dilute solution）を作った。ただし$x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \gg x_2$である。この溶液を温度Tで先と同じ容器に閉じ込めたところ，液体相と気体相に分離して平衡となった（Fig.2 参照）。成分１の分子数がゼロとなる分割面を界面として，この面での成分２の分子数を${N_2}^\sigma$とすると，界面の Helmholtz 自由エネルギーは$F^\sigma = \gamma A + \mu_2 {N_2}^\sigma$と表される。界面における成分２の単位面積当たりの吸着量を$\Gamma_2 \equiv {N_2}^\sigma / A$と定義し，以下でこれについて考える。

(5) 界面の Gibbs-Duhem の式を元に，一定温度TにおけるΓ_2を，γとμ_2の式で与えよ。

理想希薄溶液において，温度T，圧力pでの i 成分の化学ポテンシャルは以下の近似式で表される。

$$\mu_i = {\phi_i}^0(T) + k_B T \ln p_i \qquad ②$$

ここで${\phi_i}^0(T)$は温度の関数，p_iは i 成分の分圧である。この関係を用いて，以下の問に答えよ。

(6) 温度Tにおける純粋な溶媒の飽和蒸気圧(saturated vapor pressure)をp_1^0とすると，理想希薄溶液での溶媒の分圧は$p_1 = x_1 p_1^0$と近似できる。このとき理想希薄溶液の溶質の分圧(partial pressure)が$p_2 = k_2 x_2$（k_2は比例定数）と表されることを，式②と温度・圧力一定での液体相の Gibbs-Duhem の式を使って導け。
(7) (5)と(6)の結果の式を使って，Γ_2を，γと溶質モル濃度x_2の関係式で表せ。
(8) 右下の表は，室温（25℃）におけるアルコール水溶液のアルコールのモル比と表面張力のデータである。モル比 0.05 の濃度のアルコール水溶液表面には，1nm^2 あたり何個のアルコール分子が吸着しているか。ボルツマン定数k_Bを1.38×10^{-23} J/Kとして概算せよ。

x_2	0	0.05	0.10	0.15
γ [N/m]	0.072	0.048	0.036	0.033