早稲田大学大学大学院　教育学研究科
修士課程　一般入試問題の訂正内容

＜2019年度　一般・外国学生入試　専門科目＞

【数学教育専攻】

●問題冊子2ページ　Ⅰ　（2）（b）

（誤）

f（v4）は零ベクトル

（正）

f（u4）は零ベクトル

以上

２０１９年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題 専門科目
【数学教育専攻】

解答上の注意

１．数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。
　①**「専門科目・共通」**（問題Ⅰ（線形代数）～問題Ⅱ（微分積分））は、志願者全員が解答する問題です。
　②**「専門科目・選択」**は、問題（Ⅲ～ＸⅡ）から二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	瀧澤　武信	問題 Ⅲ ～ 問ＸⅡ から、二問題選択
解析学・応用解析学研究指導	新井　仁之	
代数学研究指導	広中　由美子	
代数学研究指導	村井　聡	
幾何学研究指導	小森　洋平	
情報数学研究指導	横森　貴	
情報数学研究指導	小柴　健史	
トポロジー研究指導	谷山　公規	

２．解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。
　また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

３．解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。

４．解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。

５．問題用紙は「５枚」（本ページ含む）、解答用紙は「４枚」です。必ず枚数を確認すること。

以　上

２０１９年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・共通 ］　　　　【数学教育専攻】

I 線形代数

線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ および像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底をそれぞれ一組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ で次の条件 (a), (b) を満たすものを一組求めよ．

(a) 各 $i = 1, 2, 3$ に対し $f(\boldsymbol{u}_i)$ は $\boldsymbol{v}_i$ または零ベクトル．

(b) $f(\boldsymbol{v}_4)$ は零ベクトル．

II 微分積分

(1) $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$, $-\infty < t < \infty$ に対して

$$\begin{aligned} x(r, \theta, t) &= r\cos\theta \\ y(r, \theta, t) &= r\sin\theta \\ z(r, \theta, t) &= t \end{aligned}$$

とする．x, y, z の r, θ, t に関するヤコビアンを求めよ．なおヤコビアンはヤコビの行列式，関数行列式ともいう．

(2) $M > 0, \varepsilon > 0$ に対して

$$\Omega_{M,\varepsilon} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \le \sqrt{x^2 + y^2} \le M,\ M^2 - (x^2 + y^2) \le z \le M^2 \right\}$$

とする．このとき次を求めよ．

$$\lim_{\substack{M \to +\infty \\ \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0}} \iiint_{\Omega_{M,\varepsilon}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}(1 + x^2 + y^2)} dxdydz$$

III I を $\mathbb{R}$ の開区間とする. 関数 f が区間 I で準凹 (quasi concave) であるとは, 任意の $a, b \in I$ と任意の $\theta (0 < \theta < 1)$ に対し不等式 $f(\theta a + (1-\theta)b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$ が成り立つことである.

次の問いに答えよ.

(1) 関数 f が区間 I で凹であることの定義を述べよ.

(2) 関数 f が区間 I で凹であれば, 関数 f は区間 I で準凹であることを証明せよ.

IV (1) $\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数 φ に対して，そのフーリエ変換を

$$\mathcal{F}[\varphi](x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-2\pi i x y} dy \ \ (x \in \mathbb{R})$$

により定義する．$\mathcal{F}[\varphi]$ が $\mathbb{R}$ 上で連続であることを証明せよ.

(2) g をコンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 級関数であるとする．$g^{(N)}$ により g の N 階導関数を表す（$N = 1, 2, \cdots$）．正の整数 N に対して

$$\mathcal{F}\left[g^{(N)}\right](x) = p_N(x) \mathcal{F}[g](x)$$

をみたす x の関数 $p_N(x)$ を求めよ.

(3) g を $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| < \infty\}$ にコンパクト台をもつ $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 級関数とし，$f(x) = \mathcal{F}[g](x) \ (x \in \mathbb{R})$ とおく．このとき任意の非負整数 N に対して

$$\int_{\mathbb{R}} x^N f(x) dx = 0$$

となることを証明せよ.

２０１９年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・選択 ］　　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\text{V}}$ $f(X) = X^5 + 3X^3 - 5X^2 - 15 \in \mathbb{Z}[X]$ とする．

(1) 剰余環 $\mathbb{Q}[X]/(f(X))$ は体の直和と同型になることを示し，そのとき現れる体と同型な体を $\mathbb{Q}(\alpha)$ の形で与えよ．

(2) $f(X) = 0$ の複素数における解の全体 A を $\mathbb{Q}$ に添加した体 $K = \mathbb{Q}(A)$ が考えられる．拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ．

(3) $f(X)$ の係数を $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で考えた多項式を $g(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ とする．$g(X)$ の $\mathbb{F}_5$ 上の最小分解体を L とするとき，ガロア群 $Gal(L/\mathbb{F}_5)$ を求めよ．

$\boxed{\text{VI}}$ G を有限群, 1_G を G の単位元とする．次の問いに答えよ．

(1) G の部分群 H の位数が G の位数の半分である時, H は G の正規部分群である事を示せ．

(2) G の位数が 6 で G が可換でないとき, ある $\sigma, \tau \in G$ があり,

$$G = \{1_G, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\} \text{ かつ任意の整数 } k \text{ に対し } \tau\sigma^k = \sigma^{3-k}\tau$$

となることを示せ．

$\boxed{\text{VII}}$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がユークリッド距離を保つとする．つまり $\mathbb{R}^n$ の２点 x, y のユークリッド距離を $d(x,y)$ とすると，$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ を満たすとする．さらに f は $\mathbb{R}^n$ の原点 O を O に移すとする．以下の問いに答えよ．

(1) f はユークリッド内積を保つ，つまり $\mathbb{R}^n$ の２点 x, y のユークリッド内積を (x,y) とすると，$(f(x), f(y)) = (x,y)$ を満たすことを示せ．

(2) f は線形写像であることを示せ．

$\boxed{\text{VIII}}$ (1) 正則関数の孤立特異点に関するリーマンの除去可能定理を述べよ（証明はしなくてよい）．

(2) 複素数平面 $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全単射かつ正則な写像 $g:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ はアファイン写像，つまり $g(z) = az + b \ (a, b \in \mathbb{C})$ の形の写像に限ることを示せ．

２０１９年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［専門科目・選択］　　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\text{IX}}$ (1) X を要素数 n の集合とする．このとき，X の二つの部分集合 A と B を無作為に選んだとき，「$A \subset B$ となる確率 $p(n)$」を求めよ．

(2) 確率 $p(n)$ に関して，$p(n) < \frac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ．

$\boxed{\text{X}}$ $G = (V, E)$ を (多重辺や自己ループ辺の無い) 無向グラフとする．ただし，V を頂点の有限集合，E を辺の有限集合とする．今，$m = |E|$ とするとき，以下をすべて満たす V の部分集合 V_1 および V_2 が存在することを示せ．

- $V_1 \cup V_2 = V$,
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
- $|\{\{u, v\} \in E \mid |\{u, v\} \cap V_1| = |\{u, v\} \cap V_2| = 1\}| \geq m/2$.

$\boxed{\text{XI}}$ (1) X をコンパクトハウスドルフ空間，A を X の閉集合，$f : A \to X$ を連続写像とする．$f(A)$ は X の閉集合であることを示せ．

(2) 位相空間 X と X の閉集合 A と連続写像 $f : A \to X$ で，$f(A)$ は X の閉集合ではないものの例を示せ．

(3) 位相空間 X と X の開集合 A と単射連続写像 $f : A \to X$ で，$f(A)$ は X の開集合ではないものの例を示せ．

$\boxed{\text{XII}}$ (1) クラインボトルは実射影平面と実射影平面の連結和であることを示せ．

(2) 連結なコンパクト曲面 X，Y，Z で，X と Y は同相でないが，連結和 $X \# Z$ と $Y \# Z$ は同相であることはあるかどうか考察せよ．