２０１９年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

材料科学専攻

問題表紙

◎問題用紙が１０ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が３枚綴りが１組あることを試験開始直後に確認しなさい。

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：数学

問題番号 1

関数 (function)

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を考える。以下の問に答えよ。

1) 積分 (integral)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y)dxdy$$

を求めよ。

2) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

を求めよ。

3) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos kx\,dx$$

を求めよ。ただし，a は正定数 (positive constant)，k は実定数 (real constant) であるとする。

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科 目 名：基礎数値計算

問題番号 2

以下において，n を正の整数 (positive integer)，A を n 行 n 列の複素数 (complex number) を要素とする行列 (matrix) とする。また，さらに，b と x を複素数を要素とする n 次元ベクトル (n dimensional vectors) とする。以下の問に答えよ。

問 1 A と b が与えられたとして

$$Ax = b \tag{1}$$

を考える。式 (1) の解 x が存在して一意になるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition) として正しいものを以下よりすべて選べ。

(a) $\det A = 0$,

(b) $\det A \neq 0$,

(c) A は全単射 (bijective),

(d) A は全射 (surjective),

(e) A は単射 (injective)

ただし，$\det A$ は A の行列式 (determinant) とする。

問 2 1) B を n 行 n 列の複素数を要素とする行列で逆行列 (inverse matrix)B^{-1} をもつとする。$B^{-1}AB$ のすべての固有値 (eigenvalues) からなる集合 (set) を Λ_1 とし，A のすべての固有値からなる集合を Λ_2 とする。$\Lambda_1 = \Lambda_2$ となることを示せ。

2) また，A が n 行 n 列の複素数を要素とする 2 つの行列 Q と R によって $A = QR$ と表されるとする。このとき，行列 $D = RQ$ を考える。D のすべての固有値からなる集合を Λ_1 とし，A のすべての固有値からなる集合を Λ_2 とする。Q が逆行列を持つとき，$\Lambda_1 = \Lambda_2$ を示せ。

問 3 1) $\mathbb{C}^n$ を n 次元複素ベクトルすべてからなる n 次元複素ベクトル空間とする。$\mathbb{C}^n$ 上のノルム (norm) を任意に定めるとする。このノルムについて f は $\mathbb{C}^n$ からその上への連続な写像 (continuous map) とし，

$$N(x) = x - Af(x)$$

とおく。このとき，このノルムによって N は $\mathbb{C}^n$ からその上への連続な写像となることを示せ。

2) さらに，A が逆行列をもつとき，x が

$$N(x) = x$$

を満たすことと

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

を満たすことは同値 (equivalent) であることを示せ。ただし，式 (2) の右辺の 0 は n 次元ゼロベクトル (zero vector) である。

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：物理

問題番号 3

問１ 自然長 (natural length) a，ばね定数 (spring constant) k のばねの一端（A 端）に取り付けられた質量 (mass) m のおもりの運動を考える。以下の問では，ばねは，たわんだり，曲がらないものとし，ばねの質量およびおもりの大きさと，空気抵抗 (air resistance) は無視できるものとする。座標軸は下向きを正とし x 軸に，水平方向に y 軸をとる。重力加速度 (gravitational acceleration) の大きさは g，向きは x 軸正方向とする。

1) 図１のように，ばねのもう一端（B 端）を原点 O に固定する。おもりが x 軸方向のみ運動し，時刻 t のおもりの位置 $x(t)$ を一般化座標 (generalized coordinate) として，ラグランジアン (Lagrangian) を示せ。また，このラグランジアンから導かれるラグランジュ方程式 (Lagrange's equation) を書き下せ。

2) 次に，図２のように，ばねの B 端が原点 O に固定されているのではなく，x 軸上を時間とともに，おもりの運動に比べて十分ゆっくり，外部から強制的に移動させる。移動するばねの B 端の x 座標は $w(t)$ とする。おもりの位置の $x(t)$ を一般化座標として，おもりの運動に対するラグランジアンを示せ。また，このラグランジアンから導かれるラグランジュ方程式を書き下せ。

3) 図３のように，ばねの B 端は原点 O に固定されていて，おもりは y 方向にも運動するものとする。時刻 t のおもりの位置を $(x(t), y(t))$ とする。$x(t), y(t)$ を一般化座標として，ラグランジアンを示せ。また，このラグランジアンから導かれるラグランジュ方程式を書き下せ。

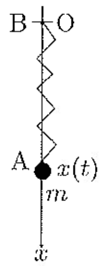

図 1

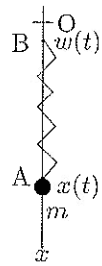

図 2

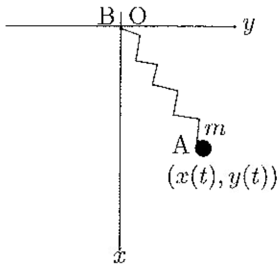

図 3

問２ 図４に示すような原点 O を頂点として z 軸を中心軸とする円錐 (cone) の面上を運動する質量 m の質点 (point mass) の運動について，以下の問に答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g，重力の向きは下向き（z 軸負方向）とし，空気抵抗は無視できるものとする。

1) 質点の座標 (x, y, z) を球座標 (spherical coordinates) (r, α, ϕ) を用いて表せ。ただし，角度 α の定義に注意せよ。

2) 一般化座標を r と ϕ として，質点のラグランジアンを示せ。

3) 2) で求めたラグランジアンから，一般化運動量 (generalized momenta) p_r, p_ϕ を求めよ。

4) 2), 3) を用いて，ハミルトニアン (Hamiltonian) を求めよ。

5) 4) で求めたハミルトニアンを基に，質点の運動に対するハミルトンの正準方程式 (Hamilton's canonical equations) を書き下せ。

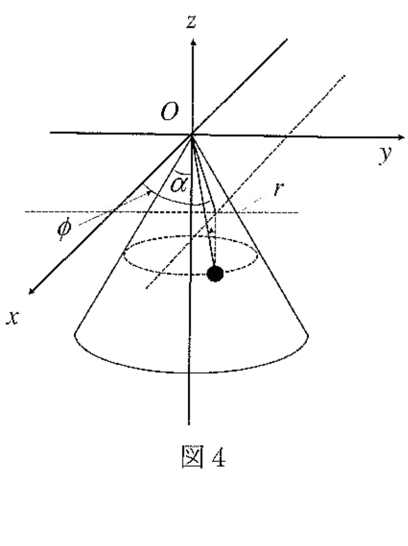

図 4

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：化学

問題番号 4

問 1

1) ある容器内に一種類の気体分子が均一に分布し，分子の並進運動 (translation motion) は等方的 (isotropic) である。つまり，容器内の重力は無視できる。分子の速さを示す確率分布 (probability distribution) は下記の式で表される。

$$F(u)du = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} u^2 e^{-mu^2/2k_B T} du \qquad (1)$$

ここで，u は分子の速さ（速度ベクトルの大きさ），$F(u)$ は分子の速さが u と $u+du$ の間にある確率，m は分子の質量，T は温度，k_B はボルツマン定数である。速さの平均 (mean velocity) および速さの二乗平均 (mean square velocity) は，それぞれ $\langle u\rangle = \int_0^\infty uF(u)du$ および $\langle u^2\rangle = \int_0^\infty u^2F(u)du$ と定義される。根平均二乗速さ (root mean square velocity) $u_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle u^2\rangle}$ は $\langle u\rangle$ よりも大きいことを証明せよ。

必要に応じて下記の積分結果を引用してもよい。ただし，$n = 0, 1, 2, \cdots$とする。

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad n \geq 1 \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} \qquad n \geq 0 \qquad (3)$$

2) 上記の系においては分子間の衝突頻度 (collision frequency) は $z = \sqrt{2}\rho\sigma\langle u\rangle$ と表される。ここで，ρ は分子の数密度 (number density)，σ は衝突断面積 (collision cross-sectional area) である。衝突間に分子が移動する平均距離である平均自由行程 (mean free path) l を，σ，温度 T，圧力 P，アボガドロ数 $\mathrm{N_A}$ および気体定数 (gas constant) R を用いて示せ。気体は理想気体 (ideal gas) とする。

問 2

1) A 分子から C 分子が生成する反応は逐次反応 (sequential reaction) であり，実際には (I) A → B および (II) B → C の二つの素反応からなる。つまり，中間体 (intermediate) B は生成するが不安定であるため，段階 (II) の反応へ進む。段階 (I) の速度定数 (reaction rate coefficient) は k_{I}，段階 (II) の速度定数は k_{II} とし，それぞれの段階の逆反応は起きないとすると，例えば A 分子のモル濃度 [A] の変化は下記のように表される。

$$\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t} = -k_{\mathrm{I}}\mathrm{[A]} \qquad (4)$$

中間体 B に対して定常状態近似 (steady-state approximation, d[B]/dt = 0) を適用し，[A] および [C] の時間的な変化を模式的にグラフで示せ。

2) 上記の逐次反応では，速度定数 k_{I} および k_{II} の関係（どちらが大きいか）によって [B] の挙動は異なる。極端に異なった $k_{\mathrm{I}} \gg k_{\mathrm{II}}$ および $k_{\mathrm{I}} \ll k_{\mathrm{II}}$ の場合に，[B] の挙動ついて述べよ。

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：物質の構造

問題番号 5

問 1 図 1 に示す面心立方構造 (face centered cubic structure) について以下の設問に答えよ。

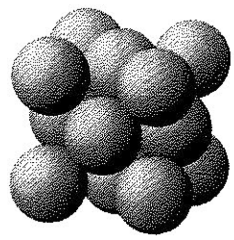

図 1

1) 面心立方構造を特徴づける回転軸 (rotation axis) の名称をすべて書き出せ。

2) 面心立方構造は最密充填構造 (close packed structure) である。原子 (atom) を剛体球 (hard sphere) と仮定し，原子の空間充填率 (atomic packing factor) を求めよ。

3) 面心立方構造の単位胞 (unit cell) 内の原子座標 (atomic coordinates) ($0 \leqq x, y, z < 1$) をすべて書き出せ。ただし，原子座標は合計 4 つで，x, y, z の値はいずれも 0 または 1/2 である。

4) X 線回折 (X-ray diffraction) による回折強度 (diffraction intensity) を考えたとき，結晶構造因子 (crystal-structure factor) は

$$F(h\,k\,l) = \sum_n f_n \exp(2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n))$$

で与えられる。ここで，f_n は n 番目の原子の原子散乱因子 (atomic scattering factor)，h, k, l はミラー指数 (Miller indices)，x_n，y_n，z_n は n 番目の原子座標である。面心立方構造のすべての原子位置に銅原子 (Cu atom) が配置されているとき，

1. h, k, l がすべて偶数 (even number) または奇数 (odd number)
2. h, k, l が偶数・奇数混合

のそれぞれの場合での結晶構造因子を導出し，面心立方構造から得られる回折強度の特徴を説明せよ。銅原子の X 線原子散乱因子は f_{Cu} とする。

5) 4)の結果をもとに面心立方構造の逆格子 (reciprocal lattice) を $0 \leqq h, k, l \leqq 2$ の範囲で描け。

問 2 構造欠陥の一つである転位 (dislocation) について以下の設問に答えよ。

1) 結晶中の刃状転位 (edge dislocation) について模式図を描いて説明せよ。ただし，模式図は 2 次元の図で良い。また，図中にはバーガース・ベクトル (Burgers vector) も記入すること。

2) 透過型電子顕微鏡 (transmission electron microscope) を用いて刃状転位のバーガース・ベクトルの方向 (direction) を決定したい場合，どのような実験を行えばよいか。バーガース・ベクトル，散乱ベクトル (scattering vector)，および転位コントラスト (dislocation contrast) の 3 つの用語を用いて説明せよ。

3) 転位は金属結晶 (metallic crystal) の変形機構 (deformation mechanism) においてどのような役割を果たすか説明せよ。

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：　材料熱力学

問題番号 6

図 1 は，1atm 下における A-B 二成分系 (binary system) の平衡状態図 (equilibrium phase diagram) である。この状態図について，以下の問に答えよ。

1) 図中の点 E_1，E_2 のそれぞれについて，平衡する相 (phase) をすべて記述せよ。
2) Gibbs の相律 (phase rule) を示し，E_1，E_2 における自由度 (degree of freedom) を求めよ。
3) $X_B = 0.8$ の組成 (composition) の液体を冷却して温度 T_3 に保持した。この時，各相の割合 (fraction) を求めよ。
4) 温度 T_3 における Gibbs エネルギー－組成線図 (Gibbs energy - composition diagram) を模式的に (schematically) 示せ。
5) 全組成範囲で液相 (liquid phase) として存在する任意の温度 T において，A-B 二成分系溶液 (binary solution) は，正則溶液 (regular solution) として振舞う (behave) ことが分かっており，成分 B の活量係数 (activity coefficient) γ_B は，式(1)で与えられるものとする。

$$RT \ln \gamma_B = \alpha (1 - X_B)^2 \qquad (1) \qquad R：気体定数(gas\ constant),\ \alpha：定数$$

この溶液 1 モルの混合エンタルピー変化 (enthalpy change of mixing) ΔH_{mix} と，混合エントロピー変化 (entropy change of mixing) ΔS_{mix} は，どのように表されるか。

6) この溶液に固体 C を添加すると，溶液成分 B と反応して固体化合物 B_2C_3 を生成する。

$$2B\,(l) \ + \ 3C\,(s) \ \rightarrow \ B_2C_3\,(s) \qquad (2)$$

温度 T で溶液が固体 C および固体 B_2C_3 と平衡しているとき，式(2)の反応の標準 Gibbs エネルギー変化 (standard Gibbs energy change) ΔG^o を，平衡組成 $X_B{}^o$ を用いて表せ。

7) 式(2)の反応の平衡定数 (equilibrium constant) を K としたとき，一定圧力 (constant pressure) 下における K の温度依存性 (temperature dependency) を表す式を導け。
8) 式(2)の反応が吸熱反応 (endothermic reaction) の時，反応を右に進めるにはどのようにすればよいか。その理由も記述すること。

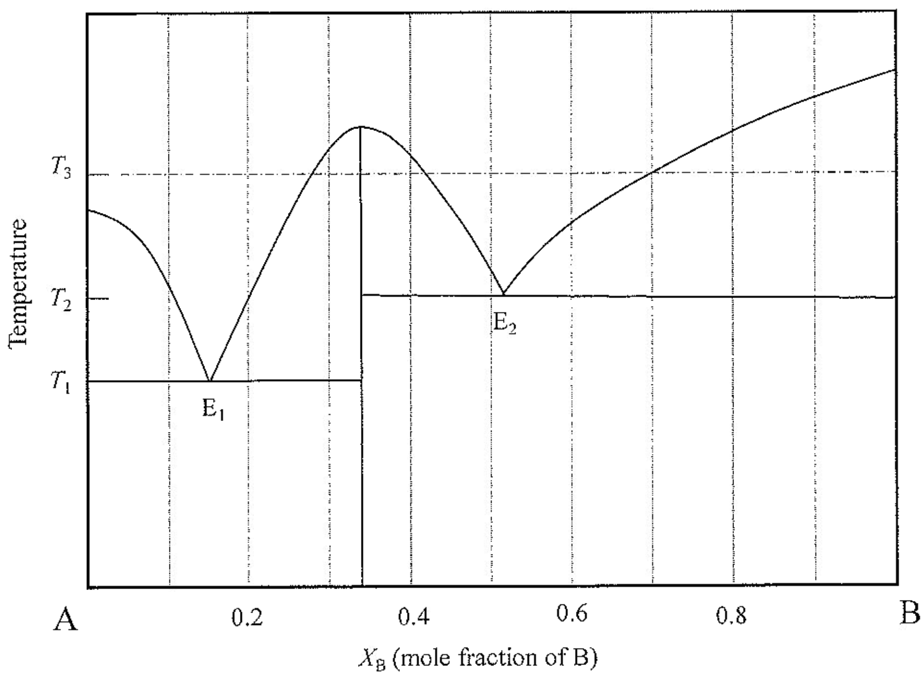

図 1

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：材料電子論

問題番号 7

問 1　図 1 に示すような，幅 (width) が a で，ポテンシャル V が $x < 0, x > a$ で $V = \infty$，$0 \leq x \leq a$ で $V = 0$ となる井戸型ポテンシャル (square well potential) 中に存在する質量 (mass) m の粒子 (particle) の x 方向での一次元運動 (one-dimensional motion) について，以下の問に答えよ。

1) この粒子に対する定常状態 (stationary state) におけるシュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation) を，固有関数 (eigenfunction) を $\psi(x)$，エネルギー固有値 (energy eigenvalue) を E として示せ。

2) 1）で示したシュレーディンガー方程式を解いて，すべてのエネルギー固有値 E と固有関数 ψ を求めよ。

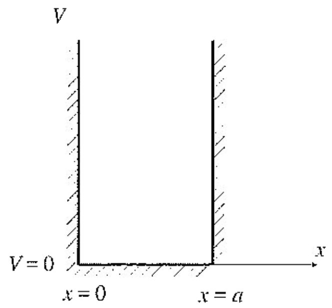

図 1

問 2　分子軌道法 (molecular orbital method) を用いて，水素分子 (hydrogen molecule) 中の電子 (electron) の波動関数である分子軌道 (molecular orbital) を ϕ と表すとき，以下の問に答えよ。

1) 分子軌道 ϕ を LCAO 近似 (Linear Combination of Atomic Orbitals approximation) を用いて表せ。ただし，水素分子を構成する 2 つの水素原子 (hydrogen atoms) を H_A と H_B として，分子軌道 ϕ は，それぞれの 1s 軌道である χ_A と χ_B のみを用いて表せるものとする。

2）レイリー・リッツの変分原理 (Rayleigh-Ritz's variational principle) を用いて，水素分子中の電子のエネルギー固有値 E と分子軌道関数 ϕ を求めよ。

3）2）で求めた分子軌道関数について，2 つの水素原子 H_A と H_B の原子核 (atomic nuclei) を結ぶ直線上の $|\phi|^2$ の分布を図示せよ。また，それを基に結合軌道 (bonding orbital)，反結合軌道 (antibonding orbital) について説明せよ。

2019年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：　機械材料学

問題番号 8

図1および2に示すFe-C系二元系平衡状態図（binary equilibrium phase diagram）（Fe-Fe_3C準安定系）を見て以下の問に答えよ。図2は，図1の低濃度部域を拡大したものであり，図を見やすくするよう横軸の比率を変えて示している。計算問題では，途中の式を示すこと。

1) 図中に示されている①～⑤の相の名前をそれぞれ答えよ。

2) ①の相を構成する炭素(C)の質量割合（mass fraction）を計算により求めよ。ただし，Fe及びCの原子量（atomic weight）をそれぞれ56及び12とする。

3) 図中(a)～(f)のそれぞれの領域で，平衡状態で存在する相（phase）の名前をすべて答えよ。

4) 平衡状態を保ちながらS45Cを1600°Cから室温まで冷却したときの冷却曲線(cooling curve)を描け。

5) S45Cを4)のように冷却した後に室温で見られるミクロ組織（microstructure）の模式図を図示し，各相の名前を記せ。

6) S45Cを800°Cに加熱・保持し，平衡状態にしたときに存在するそれぞれの相の質量割合をてこの原理（lever rule）を用いて計算せよ。図2のうち必要な箇所を解答用紙に写し，補助線をそこに描き，必要に応じて交点にX,Yなどの名前を示して，交点間の長さを＜XY＞のように表して記号で答えよ。

7) 上記③～⑤の結晶構造（crystal structure）および単位胞（unit cell）に存在する原子の個数をそれぞれ答えよ。

8) ⑤の結晶構造について以下の問に答えよ。原子を半径rの球とし，最近接原子同士は接触しているものとする。

[a] 原子が最も密に配置された面のミラー指数（Miller index）を示せ。

[b] [a]で解答した面における単位面積当たりの原子の個数を計算せよ。

[c] [a]で解答した面において，最もすべりが生じやすい方向のミラー指数を示せ。

9) ⑤の単位胞を軸がxyz座標に一致するように置き，z軸方向に垂直な面に均一なσの垂直応力（normal stress）を与えて，主すべり系（primary slip system）でのすべり変形を生じさせるとする。すべり面（slip plane）上におけるすべり方向（slip direction）のせん断応力（shear stress）をτとする。考えられるすべり面，すべり方向のうち，z軸とのなす角が最も小さいものを選択する。応力比τ/σを計算せよ。

10) S45Cの焼き入れ（quenching）について以下の問に答えよ。

[a] 水冷する前に加熱保持しているときの相をすべて答えよ。

[b] 水冷した直後の相を答えよ。

11) S45C平板を950°Cで平衡相となるまで保持し，室温まで徐冷した後（以下,徐冷材と呼ぶ），圧下率20%で冷間圧延(cold rolling)により加工した（冷間圧延材）。以下の問に答えよ。

[a] 徐冷材と冷間圧延材とを比較したとき，どちらの降伏強度（yield strength）が高いか答えよ。

[b] [a]のように考えた理由を100字以内で説明せよ。

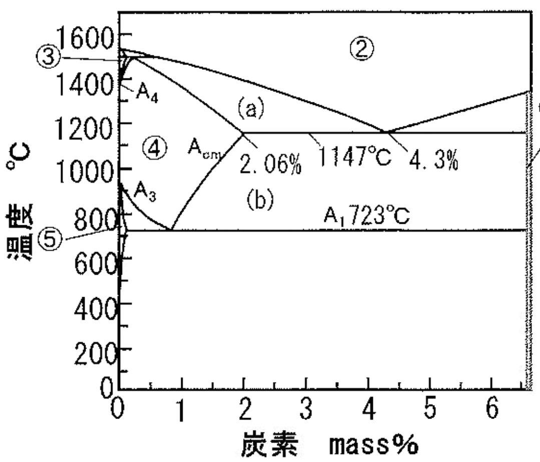

図1

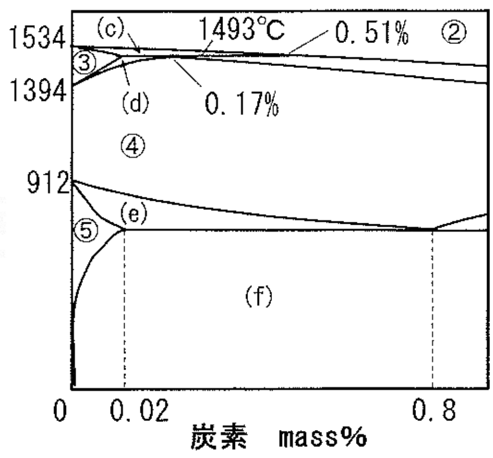

図2

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：　材料力学

問題番号　９

問１　長さlの異なる伸び剛性（elongation rigidity）を有する４本の弾性棒（elastic bars）（部材①の伸び剛性は$2EA$，部材②はEA，部材③は$4EA$）が，図１のように中央の剛体（rigid body）を介して結合されていて，それぞれ両端で壁に固定されている。中央の剛体には左向きの集中荷重（concentrated load）$P\,(P=2ql)$と，部材③には分布荷重（distributed load）（単位長さ当たりの軸方向の力）qが右方向に作用している。

このときの壁からの反力（reaction force）をそれぞれR_1, R_2, R_3（図の向き）として，以下の問いに答えよ。

1）集中荷重Pおよび分布荷重qと反力R_1, R_2, R_3のつり合い式を示せ。
2）部材③の軸力（axial force）$N(\xi)$を右の壁からξだけ離れた断面上の内力（internal force）として求めよ。
3）部材③の伸びδ_3を求めよ。
4）反力R_1, R_2, R_3を決定せよ。
5）以上より，中央の剛体のx方向変位（displacement）を求めよ。

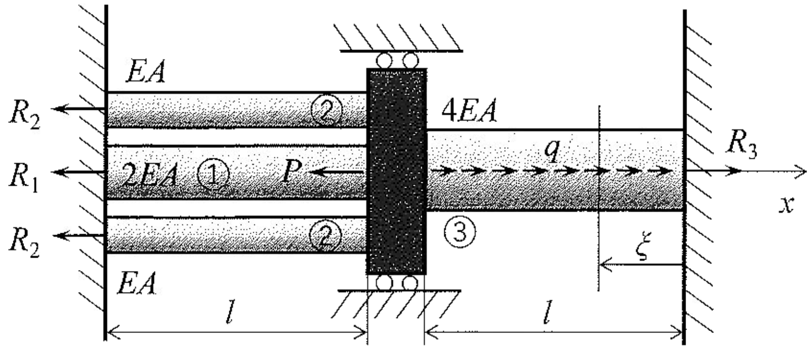

図１　連結された弾性棒

問２　図２のようなＨ型の断面形状を有する長さ$2l$，ヤング率（Young's modulus）Eのはり（beam）が，両端を単純支持（simple support）されている。今，曲げモーメント（bending modulus）M_Oと$2M_O$が，はりの両端にそれぞれ作用している。以下の問いに答えよ。

1）断面の図心（centroid）に関する断面２次モーメント（moment of inertia of area）I_zを求めよ。

以下の設問では，曲げ剛性（bending rigidity）をEIとして答えること。

2）はりのせん断力線図（Shearing Force Diagram, SFD），曲げモーメント線図（Bending Moment Diagram, BMD）を求めよ。
3）はりの中央部Ａ点におけるたわみ（deflection）v_Aを求めよ。

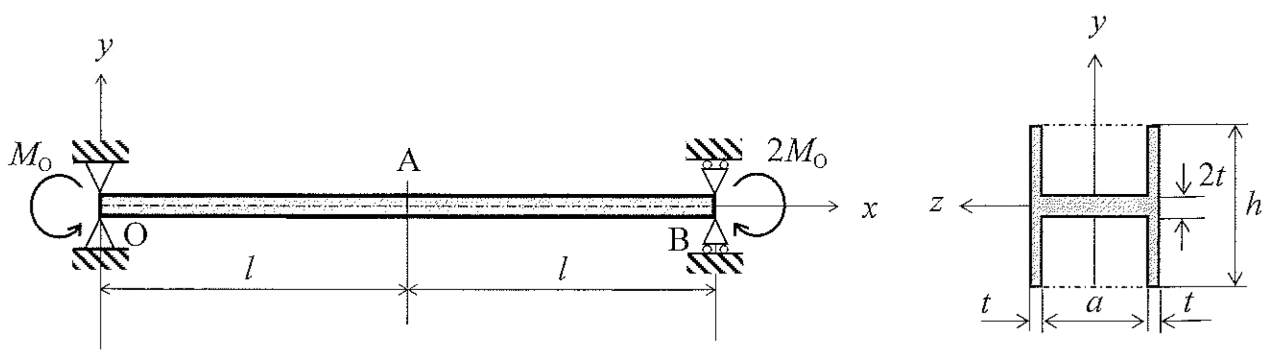

図２　両端単純支持はりとその断面形状

２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

科　目　名：材料強度学

問題番号　１０

図 1 に示すように半無限板（semi-infinite plate）の側面から荷重方向と垂直に長さ a のき裂が導入されている。遠方から最大応力（maximum stress）$\sigma_{max} = 60$ [MPa]，最小応力（minimum stress）$\sigma_{min} = 10$ [MPa] の繰返し負荷（cyclic loading）を与えた。この材料の疲労破壊じん性（fatigue fracture toughness）は $K_{fc} = 60$ [$\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$] であり，き裂進展速度（crack growth rate）$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N$ [m/cycle] と応力拡大係数範囲（stress intensity factor range）ΔK [$\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$] の関係において，式（1）に示すパリス則（Paris' law）が成り立つものとする。なお，半無限板中の片側き裂の応力拡大係数（stress intensity factor）は，$K = 1.12\sigma\sqrt{\pi a}$ [$\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$] で表され，ここでは $1.12\sqrt{\pi} \approx 2$ として計算してよい。以下の設問に答えよ。

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = 1.0 \times 10^{-11} (\Delta K)^4 \qquad (1)$$

1) 疲労破壊（fatigue fracture）させた破面を走査型電子顕微鏡（scanning electron microscope）で観察したところ図 2 に示すような縞模様が観察された。このような疲労破壊特有の破面形態を何というか答えよ。

2) 繰返し負荷によって不安定破壊を生じる臨界き裂長さ（critical crack length）a_c を求めよ。

3) 繰返し負荷によって初期き裂長さ $a_i = 4$ [mm] からき裂長さ $a_f = 20$ [mm] に進展するまでの繰返し数を求めよ。

4) き裂長さ $a_f = 20$ [mm] に進展するまでの繰返し数を設問 3）の 2 倍にするためには，初期き裂長さ a_i を何 mm にすればよいか答えよ。

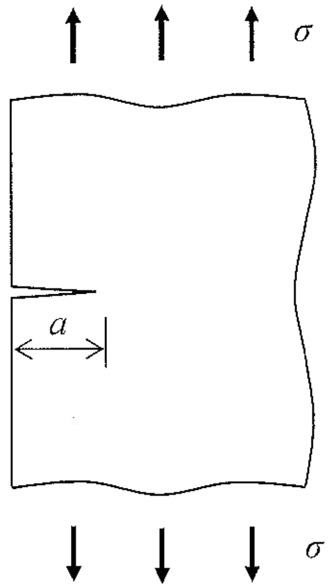

図 1　半無限板中の片側き裂

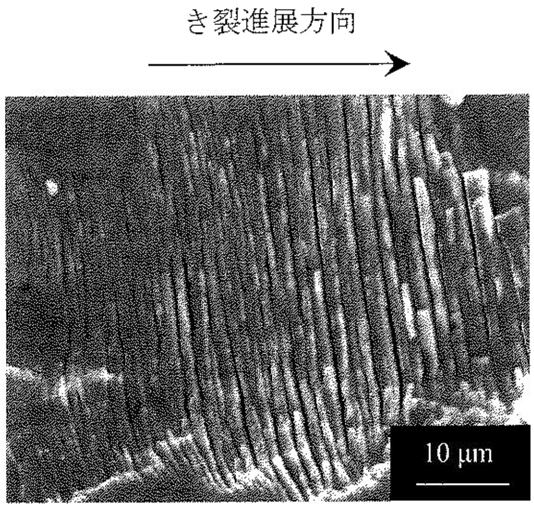

図 2　走査型電子顕微鏡で観察された疲労破面

受験番号					
氏　名					

No. 1 ／ 3

採点欄

２０１９年４月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

※裏面の使用は不可

選択　問題番号		科目名	

受験番号					
氏　　名					

2019年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

No. 2 ／ 3

採点欄

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名

受験番号					
氏　　名					

2019年4月入学試験解答用紙
大学院基幹理工学研究科修士課程材料科学専攻

No. 3 ／ 3

採点欄

※裏面の使用は不可　選択　問題番号　　科目名