早稲田大学大学院 先進理工学研究科
修士課程 入試問題の訂正内容

<2018年9月・2019年4月入学 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻>

【専門科目】

●問題冊子2ページ 問題番号 2 設問(1) 2行目

(誤)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\sin x)^2}{x^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(正)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)^2}{x^2} & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

●問題冊子2ページ 問題番号 2 設問(2) 3行目

(誤)

～収束する(converge)する・・・

(正)

～収束(converge)する・・・

以上

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験
大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿6＿ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が＿8＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

【選択方法】

○　下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1　2
力学および電磁気学	3　4
量子力学および熱・統計力学	5　6

【解答方法】

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2) 受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること。
(3) 解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目かがわかるように解答欄に明記すること。
(4) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。
(5) ４題を超えては解答しないこと。
(6) 使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（８枚）を提出すること。

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき，多項式 (polynomial)

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ に対し $P_n(A)$ を

$$P_n(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

で定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　ケイリー・ハミルトン (Cayley-Hamilton) の定理により

$$A^2 = 2A - E \qquad \text{(Eq.1)}$$

が成立することを示せ。

(2)　任意の次数 (degree) と係数 (coefficients) をもつ多項式 $P(x)$ に対して

$$P(A) = P(1)\, Z_1 + P'(1)\, Z_2 \quad (P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}) \qquad \text{(Eq.2)}$$

を満たす 2×2 行列 (matrix) Z_1, Z_2 が存在することを以下の (i)-(ii) によって示し，(iii) に答えよ。

(i)　任意の一次の多項式 (any affine function) に対して (Eq.2) を成り立たせる Z_1, Z_2 を求めよ。

(ii)　(i) で求めた Z_1, Z_2 に対して (Eq.2) が任意の次数の多項式に対して成り立つことを数学的帰納法 (mathematical induction) によって証明せよ。

(iii)　A^{2018} を求めよ。

(3)　任意の実数 (real number) a, b に対して $\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくとき $\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} b_N = 0$ を示せ。

(4)　$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$ $(t > 0)$ を求めよ。

(5)　次の常微分方程式 (ordinary differential equation) の解 (solution) を求めよ。

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) - 4y_2(t), \ t > 0, \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 3y_2(t), \ t > 0, \\ y_1(0) = C_1, \ y_2(0) = C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は与えられた定数 (given constant)}). \end{cases}$$

2018年9月・2019年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　数学一般

問題番号 2

以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathbb{R}^1$ 上の関数 $\varphi(x)$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\sin x)^2}{x^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

で定義 (define) すれば，$\varphi(x)$ は $\mathbb{R}^1$ で連続 (continuous) かつ可積分 (integrable) となることを示せ。

(2)　次の等式 (identity)

$$\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x)\,dx \quad (0 < a < b < \infty) \quad \text{(Eq.1)}$$

を示し $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy$ は収束する (converge) することを確かめよ。

(3)　$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\,t}{\sin t}\,dt \quad (n = 0, 1, \cdots)$ とおく。このとき $I_{n+1} - I_n$ を計算することによって $I_n = I_0$ を示せ。

(4)　$h(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ $(t \in (0, \frac{\pi}{2}])$ に対して

$h(+0) = \displaystyle\lim_{t \to +0} h(t)$,　$h'(+0) = \displaystyle\lim_{t \to +0} \frac{dh}{dt}(t)$ を計算せよ。

(5)　部分積分 (integration by parts) を用いて

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,e^{imt}\,dt = 0 \quad \text{(Eq.2)}$$

を示せ。

(6)　$J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ とおくとき $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \lim_{n \to \infty} J_n$ を示せ。

(7)　等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,\sin(2n+1)t\,dt = I_n - J_n$ を利用して J の値 (value) を求めよ。

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：力学および電磁気学

問題番号 3

水平な路面上を一様な速度vで水平方向(x軸方向)に走行する車輪が路面の起伏を乗り越える状況を考えてみよう。質量mの車輪にはバネ定数kのバネを介して，鉛直上方（y軸方向）に質量Mの物体が取り付けられ，転倒することなく常にバランスが保たれたまま進行するものとする。路面上の起伏は $x = 0$ を開始点として $0 \leq x \leq 2l$ の範囲に対して $y = a(1 - \cos\frac{\pi x}{l})$ と表現されるものとする。この起伏を乗り越えた後には，再び水平な路面が続く。$l \gg a$であり，起伏があってもx軸方向には等速運動を続けるとする。

起伏に差し掛かるまでの区間 $-\infty < x < 0$では，バネは完全に静止状態を維持している。また起伏があっても物体は常に車輪の鉛直上方（y軸方向）に保持されるものとする。重力加速度をgとし，車輪の半径および物体の大きさは無視できるものとする。この時，下記の問いに答えよ。

(1) 車輪が起伏に差し掛かるまでの区間においてバネの長さがy_0であったとする。バネのつり合いの式から，バネの自然長を求めよ。

(2) 路面に対して垂直な方向の車輪の位置を$y_1(t)$，物体の位置を$y_2(t)$とする時，起伏に差し掛かる時刻を$t = 0$として，起伏を通過中の車輪および物体に関する運動方程式をたてよ。ただし，車輪は路面との接地状態を常に保ち，この時の路面から車輪への抗力は常に鉛直方向にかかるものと仮定し，その大きさをNとする。

(3) この区間では車輪は路面から浮き上がらないものとすると，$y_1(t)$は路面の起伏を表す関数から直接導かれることを利用して，バネの長さの変化$y(t) = y_2(t) - y_1(t)$についての方程式を導け。

(4) (3)が強制振動の問題になっていることを利用して，$\omega = \frac{\pi v}{l}$，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$とおき，$0 \leq t < \infty$の区間の$y(t)$に関する一般解を求めよ。

(5) (4)において，$\omega \to \omega_0$となるような極限を与える速度vにしたときの$y(t)$を求めよ。

(6) (5)の極限($\omega \to \omega_0$)において，yを縦軸，tを横軸として，$y(t)$の時間的変化の概略を，区間$0 \leq t < \infty$に関してグラフに表現せよ。

次に先の起伏が$x = 0$を起点に，無限に繰り返す路面状況を想定する。すなわち路面は，$0 \leq x < \infty$の範囲において，$y = a(1 - \cos\frac{\pi x}{l})$と表現される。ここで車輪にダンパーを取り付けた。このダンパーはバネの長さ$y(t)$の時，$y(t)$の時間的変化に比例する$-b\dot{y}(t)$の抵抗力を発生する。車輪は同様に一様な速度vで水平方向(x軸方向)に進行している。この時，下記の問いに答えよ。ただし車輪は路面への接地状況を常に維持するものと仮定せよ。また起伏を連続的に乗り越えても物体は常に車輪の鉛直上方（y軸方向）に保持されるものとする。

(7) バネの長さ$y(t)$に関する運動方程式を立てよ。ただし$\beta = \frac{b}{2M}$とおくこと。

(8) $t \to \infty$ではバネの運動は定常状態に達し，$\omega_0(= \sqrt{\frac{k}{M}})$で振動する項が消滅する。この時のバネの運動を求めよ。

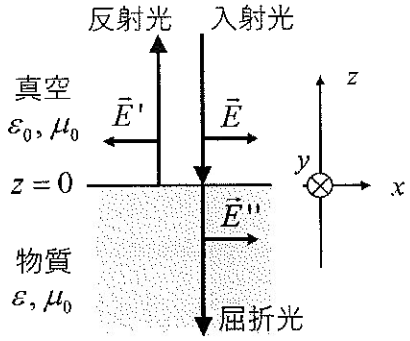
(9) (8)の結果に対して，$\omega = \omega_0$となるような速度vの場合の$y(t)$を求めよ。また，その時の$y(t)$の時間変化の様子をグラフに表現せよ。

2018年9月・2019年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 4



右図のように，$z<0$に誘電率(dielectric constant)がεの物質があって，z軸正方向から負の方向に向かって入射する光（入射光 incident light）が，$z=0$の物質表面で一部が反射し（反射光 reflected light），残りが物質内に侵入する（屈折光 refracted light）問題について考える。$z>0$は真空で，真空の誘電率と透磁率(magnetic permeability)をε_0, μ_0とする。また，物質の透磁率は真空の透磁率と同じμ_0とする。

今，入射光の電場(electric field)を$\vec{E}=\vec{E}_0\exp\{i(-kz-\omega t)\}$，ただし$\vec{E}_0=(E_0,0,0)$とする。そのときの反射光の電場を$\vec{E}'=\vec{F}_0\exp\{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)\}$，ただし$\vec{F}_0=(-F_X,0,F_Z)$，$\vec{k}'=(k'_X,0,k'_Z)$，屈折光の電場を$\vec{E}''=\vec{T}_0\exp\{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)\}$，ただし$\vec{T}_0=(T_X,0,T_Z)$，$\vec{k}''=(k''_X,0,-k''_Z)$とおく。また$\vec{r}=(x,y,z)$である。

(1) $z=0$の界面で電場の界面方向(direction along the interface)の成分が x の位置によらず連続(continuous)であるという条件から，$k'_X=k''_X=0$が導かれることを示せ（$z>0$の側は入射光と反射光の足し合わせ，$z<0$は屈折光のみであることに留意せよ）。また，以上の結果より$E_0=F_X+T_X$が成り立つことを示せ。

(2) $z>0$で$\mathrm{div}\,\vec{E}'=0$が成り立つことと$k'_X=0$から，$F_Z=0$が導かれることを示せ。同様に，$z<0$で$\mathrm{div}\,\vec{D}''=0$（ただし$\vec{D}''=\varepsilon\vec{E}''$）が成り立つことと$k''_X=0$から，$T_Z=0$が導かれることを示せ。

以下では(1)，(2)で得られた$F_Z=T_Z=0$，$k'_X=k''_X=0$を用いることにする。入射光，反射光，屈折光の磁束密度(magnetic flux density)をそれぞれ$\vec{B}=\vec{B}_0\exp\{i(-kz-\omega t)\}$，$\vec{B}'=\vec{B}'_0\exp\{i(k'_Z z-\omega t)\}$，$\vec{B}''=\vec{B}''_0\exp\{i(-k''_Z z-\omega t)\}$とおく。ただし$\vec{B}_0=(0,B_0,0)$，$\vec{B}'_0=(0,B'_0,0)$，$\vec{B}''_0=(0,B''_0,0)$とする。

(3) $\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$（ただし$\vec{E},\vec{B}$は一般の電場と磁束密度）を用いて$B_0$，$B'_0$，$B''_0$をそれぞれ求めよ。

(4) 界面では磁場（magnetic field, $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$，ただし$\vec{H},\vec{B}$は一般の磁場と磁束密度）の界面方向の成分が連続であることと(3)の結果から，$kE_0+k'_Z F_X=k''_Z T_X$が導かれることを示せ。

(5) $\mathrm{rot}\,\vec{H}=\partial\vec{D}/\partial t$（電束密度 electric flux density $\vec{D}$は真空中で$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$，物質中では$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$。ただし$\vec{H},\vec{D}$は一般の磁場と電束密度）を含むマクスウェルの方程式から，$\vec{E}$に関する波動方程式(wave equation)が導かれることを示せ。

(6) (5)の結果から$k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$，$k'^2_Z=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$，$k''^2_Z=\omega^2\varepsilon\mu_0$が導かれることを示せ。

(7) (1)，(4)，(6)の結果から，屈折率 $n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ を用いて，入射光と反射光の強度の比（反射率 reflectivity）$|F_X/E_0|^2$を表せ。

(8) 物質が金属(metal)の場合，ある周波数以下での誘電率εは負になる。このときの反射率を求めよ。またこのときの屈折光の電場強度のz依存性を議論せよ。

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

以下の問いに答えよ。

正規直交基底 (orthonormal basis)$|0\rangle, |1\rangle$ で表される 2 準位系 (two-level system) を考える。$\langle 0|, \langle 1|$ をそれぞれ $|0\rangle, |1\rangle$ のエルミート共役 (Hermitian conjugate) としたとき，$\hat{a} = |0\rangle\langle 1|$ に対して $\hat{a}^\dagger$ を $\hat{a}$ のエルミート共役，$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$，$\hat{x} = \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)/2$ とする。また，恒等演算子 (identity operator) を $\hat{I}$ で表し，プランク定数 (Planck constant) を 2π で割った量を $\hbar$ とする。

まず，系のハミルトニアン (Hamiltonian) が $\hat{H}_1 = E_0\left(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|\right)$ で与えられる場合を考える。ただし，$E_0 > 0$ とする。

(1) $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ に対する反交換子 (anticommutator)$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を求めよ。

(2) $\hat{H}_1$ を $\hat{n}$ と $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$ で表せ。

(3) 状態 (state) $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ に対して，$\langle\psi|\hat{n}|\psi\rangle$ を求めよ。

(4) 状態 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ に対して，$\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle$ を求めよ。

つぎに，系のハミルトニアンが $\hat{H}_2 = E_0\left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\right)$ で与えられる場合を考える。

(5) $\hat{H}_2$ の固有値 (eigenvalue) と固有状態 (eigenstate) を求めよ。

(6) 時間発展演算子 (time-evolution operator) $\hat{U}_2(t) = \exp[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_2 t]$ を求めよ。

(7) 時刻 $t = 0$ において系の状態が $|\phi(t=0)\rangle = |0\rangle$ であるとする。時刻 $t > 0$ における系の状態 $|\phi(t)\rangle$ を求めよ。

さらに，系のハミルトニアンが $\hat{H}_3 = \hat{H}_1 + \gamma\hat{H}_2$ で与えられる場合を考える。

(8) $\gamma \ll 1$ として，$\hat{H}_3$ の基底状態 (ground state) の固有値を摂動 (perturbation) の 1 次の近似 (first-order approximation) で求めよ。

(9) $\gamma \ll 1$ として，$\hat{H}_3$ の基底状態の固有値を摂動の 2 次の近似 (second-order approximation) で求めよ。

(10) $\hat{H}_3$ の基底状態の固有値を近似によらずに求めよ。また，その結果から，**(8)**, **(9)** の結果の妥当性 (validity) について論じよ。

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

N 個の原子（atom）からなる一次元鎖（one-dimensional chain）を考える。原子１個の振動エネルギー（vibration energy）は，$\varepsilon_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ と与えられる。ただし，$\hbar\omega$ は振動のエネルギー量子（energy quantum）であり，定数であるとする。また，n はゼロ以上の整数（integer number）である。ボルツマン定数（Boltzmann constant）を k_B と書く。

まず，この系をミクロカノニカル集団（microcanonical ensemble）として扱い，系の全振動エネルギーを E とおき，その固体振動（solid vibration）を考える。

(1) 系のエネルギー量子（$\hbar\omega$）の全個数 M を E と N を用いて答えよ。

(2) 系の状態数（number of states）W を N と M を用いて書け。

(3) 整数 L が１より十分大きいときに成り立つスターリングの公式（Stirling's formula）$\log_e L! \approx L\log_e L - L$ を用いて計算すると，系のエントロピー（entropy）S は N と M を用いて次のように書くことができる。

$$S = k_\mathrm{B}\left[(N+M)\log_e\left(1+\frac{M}{N}\right) - M\log_e\left(\frac{M}{N}\right)\right]$$

ただし計算の途中で１が N や M に比べて十分小さいとして無視する近似を使った。この時，エントロピー S を全振動エネルギー E の関数（function）として書き下せ。

(4) $\dfrac{dS}{dE}$ を計算すると，$\dfrac{k_\mathrm{B}}{\hbar\omega}\log_e \boxed{}$ となる。$\boxed{}$ に入る数式を書け。

(5) 温度（temperature）T とエントロピー S との関係式 $\dfrac{dS}{dE} = \dfrac{1}{T}$ を使って，温度 T における全振動エネルギーの期待値（expectation value）$\langle E\rangle$ を計算すると $\dfrac{N\hbar\omega}{2}\boxed{}$ となる。$\boxed{}$ に入る数式を書け。

次に，この系をカノニカル集団（canonical ensemble）として扱い，温度 T における固体振動を議論する。ただし $\dfrac{1}{k_\mathrm{B}T}$ を β とおく。

(6) 低温（$k_\mathrm{B}T < \hbar\omega$）では，原子１個の分配関数（distribution function）z が，

$$z = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

となることを示せ。

(7) 全振動エネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ $(= -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log_e z^N)$ を計算すると $\dfrac{\boxed{}}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ となる。$\boxed{}$ に入る数式を書け。