早稲田大学大学院 基幹理工学研究科
修士課程　入試問題の訂正内容

＜2018年9月・2019年4月入学　基幹理工学研究科 数学応用数理専攻＞

【専門科目】

●問題冊子2ページ　問題番号　２　:線形代数　問（4）

（誤）

（2）で得られた行列A・・・

（正）

（3）で得られた行列A・・・

以上

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が 12 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

★ 問題１，問題２，問題３は必須問題である。
★ 問題３には問題 3A と 3B がある。必ず一方を選択し，解答しなさい。
★ 問題４から問題 11 は選択問題である。1 問を選択し，解答しなさい。
★ この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：微分積分

問題番号 1

$F(k) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+k^2x^2)}{1+x^2}\,dx$ とおく。$k>0$ として，次の問に答えよ。

(1) $F'(k) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2kx^2}{(1+x^2)(1+k^2x^2)}\,dx$ を示せ。

(2) (1) の右辺の広義積分を計算し，$F'(k)$ を求めよ。

(3) $F(k)$ を求めよ。

広義積分　improper integral

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：線形代数

問題番号 **2**

ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^4$ を $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ として，$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 T を

$$T(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{2\langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle}{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle} \vec{a}_1 - \frac{2\langle \vec{x}, \vec{a}_2 \rangle}{\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle} \vec{a}_2$$

とおく。ただし，$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^4$ の標準内積である。次の問に答えよ。

(1) $T(\vec{a}_1)$, $T(\vec{a}_2)$ を求めよ。また，ベクトル $\vec{x}$ が $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ の両方と直交するとき，$T(\vec{x})$ を求めよ。

(2) すべてのベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して，$T(T(\vec{x})) = \vec{x}$ であることを示せ。

(3) $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ が $\mathbb{R}^4$ のすべてのベクトル $\vec{x}$ に対して成立するように 4 次正方行列 A を求めよ。

(4) (2) で得られた行列 A を適当な直交行列 P による相似変換 $A \mapsto P^{-1}AP$ によって対角行列に変換する。このときの直交行列 P と対角行列を求めよ。

$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換	linear transformation on $\mathbb{R}^4$
4 次正方行列	4×4 matrix
直交行列	orthogonal matrix
相似変換	similarity transformation
対角行列に変換する	transform to diagonal matrix

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。必ず一方を選び，解答すること。

問題番号 3A

次の「$\cdots$」内の文章について後の問に答えよ。

「X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ をそれらの間の写像とする。任意の部分集合 $A \subset X$ に対して

$$A \ \boxed{\text{(a)}} \ f^{-1}(f(A))$$

および

$$f(X \setminus A) \ \boxed{\text{(b)}} \ f(X) \setminus f(A)$$

が成り立ち，また，任意の部分集合 $B \subset Y$ に対して

$$B \ \boxed{\text{(c)}} \ f(f^{-1}(B))$$

および

$$f^{-1}(Y \setminus B) \ \boxed{\text{(d)}} \ X \setminus f^{-1}(B)$$

が成り立つ。」

(1) 空欄 (a), (b), (c), (d) について，記号「$\subset$」,「$\supset$」,「$=$」のいずれかひとつを用いて埋め，この文章を正しい命題として完成させよ。複数当てはまる場合は，命題として最も強い主張となる記号を選ぶこと。解答に際しては，以下に示す解答欄を答案用紙に作成し，選んだ記号を記入すること。

解答欄

(a)	(b)	(c)	(d)

(2) 各 (a), (b), (c), (d) について，選んだ記号が適切である理由を述べよ。

集合　set
写像　mapping
部分集合　subset

2018年9月・2019年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。必ず一方を選び，解答すること。

問題番号 3B

(X,d), (Y,ρ) を 2 つの距離空間とし，(X,d) における開集合の全体を $\mathcal{O}_X$，(Y,ρ) における開集合の全体を $\mathcal{O}_Y$ とかく。写像 $f: X \to Y$ について考える。命題

(A) すべての点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ と $x_0 \in X$ に対して $d(x_n, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば $\rho(f(x_n), f(x_0)) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立する。

と同値な命題は以下の (B1)–(B4) のどれか。

(B1) $A \subset X$ に対して $A \in \mathcal{O}_X$ ならば $f(A) \in \mathcal{O}_Y$ である。
(B2) $A \subset X$ に対して $f(A) \in \mathcal{O}_X$ ならば $A \in \mathcal{O}_X$ である。
(B3) $B \subset Y$ に対して $B \in \mathcal{O}_Y$ ならば $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$ である。
(B4) $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}_X$ ならば $B \in \mathcal{O}_Y$ である。

正しいものを選び，(A) との同値性の証明を与えよ。

距離空間	metric space
開集合	open set
写像	mapping
点列	sequence of points
同値	equivalent

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 4

p を素数，$\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体とする。そして，正整数 n に対して $\mathcal{P}_p(n)$ を多項式環 $\mathbb{F}_p[X]$ の n 次既約多項式全体の集合とする。

(1) n を正整数，$p(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ を既約多項式とする。$p(X)$ が $\mathbb{F}_p[X]$ において $X^{p^n} - X$ を割り切るための必要十分条件は，$p(X)$ の次数が n の約数であることを示せ。

(2) 正整数 n について

$$\frac{1}{p-1} \sum_{0<d|n} (\#\mathcal{P}_p(d))\, d = p^n$$

を示せ。ここで，有限集合 S に対して $\#S$ は S の位数を表し，左辺の総和は n の全ての正の約数 d をわたる。

(3) 不等式

$$0 \leq \frac{p^n(p-1)}{n} - \#\mathcal{P}_p(n) \leq p^{\frac{n}{2}+1}$$

が成立することを示せ。

(4) n を正整数とする。素数 p が十分大きいとき，任意の n 次多項式 $f(x) \in \mathbb{F}_p[X]$ が

$$f(X) = p_1(X) + p_2(X) \quad (p_1(X), p_2(X) \in \mathcal{P}_p(n))$$

と表されることを，$\#(\mathbb{F}_p[X]/(f(X))) = p^n$ であることを用いて示せ。

(5) 有理数体 $\mathbb{Q}$ 係数の多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ において，任意の 1 次以上の多項式が，2 つの既約多項式の和で表されることを示せ。

素数	prime number
有限体	finite field
正整数	positive integer
多項式環	polynomial ring
既約多項式	irreducible polynomial
割り切る	divide
有限集合	finite set
有理数体	field of rational numbers

2018年9月・2019年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 5

有理整数環 $\mathbb{Z}$ を係数環とする加群 $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を考える。以下の命題はそれぞれ正しいか。また，その証明を与えよ。

(1) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元 $2 \otimes x$ $(x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ について，$2 \otimes x = 0$ となる。

(2) $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元 $2 \otimes x$ $(x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ について，$2 \otimes x = 0$ となる。

有理整数環	ring of rational integers
係数環	coefficient ring
加群	module
元	element

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：幾何

問題番号 **6**

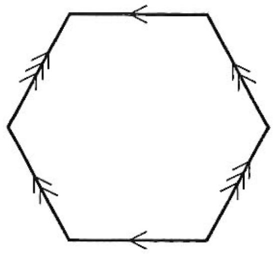
次の問に答えよ。

(1) 6 角形の対辺を向きづけ可能な閉曲面ができるように貼り合わせてできる曲面 S_6 はどんな曲面か。

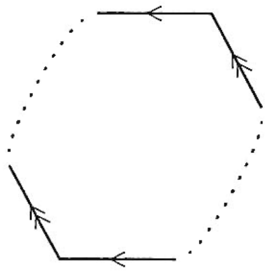
(2) $2n$ 角形の対辺を向きづけ可能な閉曲面ができるように貼り合わせてできる曲面 S_{2n} はどんな曲面か。

(3) (2) で構成した曲面 S_{2n} のホモロジー群 $H_i(S_{2n}, \mathbb{Z})$ $(i \geq 0)$ を求めよ。

(4) $2n$ 角形の対辺を (2) とは逆の向きで貼り合わせてできる閉曲面 T_{2n} はどんな曲面か。



(1) 6 角形の貼り合わせ



(2) $2n$ 角形の貼り合わせ

m 角形	m-gon
向きづけ可能	orientable
貼り合わせる	glue
閉曲面	closed surface
ホモロジー群	homology group

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 7

連続関数 $a(t), b(t), c(t), d(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ とおき，次の常微分方程式系について考える。

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

(1) $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$(*)$ の解をすべて求めよ。

(2) S を次のように定める。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \middle| \, u(t),\, v(t) : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ は } C^1\text{-級であり } (*) \text{ の解} \right\}$$

S は線形空間であることを示せ。さらにその次元を求めよ。

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in S \, \middle| \, u(0) = 0,\, u(1) + v(1) = 0 \right\}$ とおく。$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ のとき，任意の連続関数 $f(t), g(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して

$$(**) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \\ u(0) = 0, \\ u(1) + v(1) = 0 \end{cases}$$

は一意的な解をもつことを示せ。

(4) $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，任意の連続関数 $f(t), g(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して $(**)$ は一意的な解を持つことを示せ。

連続関数	continuous function
常微分方程式系	system of ordinary differential equations
C^1-級	of class C^1
線形空間	vector space
次元	dimension
一意的な解	unique solution

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 8

次の問に答えよ。

(1) $\cot \pi z = \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ の $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ での留数を求めよ。

(2) γ_n を $A_n = (n+\frac{1}{2})(1+i)$, $B_n = -(n+\frac{1}{2})(1-i)$, $C_n = -(n+\frac{1}{2})(1+i)$, $D_n = (n+\frac{1}{2})(1-i)$ を頂点とする正方形の周とする。このとき複素積分

$$\int_{\gamma_n} \frac{\cot \pi z}{z^2 + a^2}\, dz$$

を求めよ。ただし，$a > 0$，n は自然数で $a < n$ とする。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよ。

複素積分	contour integral
留数	residue

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：確率・統計

問題番号 9

確率変数の族 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ に対して，任意の $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_d$ から d 次元確率ベクトル $(X_{t_1},\dots,X_{t_d})^\top$ を作ると，その分布は平均ベクトル $\mathbf{0}$，分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ の d 次元正規分布になるという。ここで，$\top$ は転置を表す。また，$X_0 = 0$ であり，$\mathbf{\Sigma}$ はその (i,j) 成分 Σ_{ij} が，$\sigma^2 > 0$ なる定数を用いて，

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2 \min\{t_i, t_j\}$$

で与えられる d 次正方行列とする。

以下では，$Z = (Z_1,\dots,Z_d)^\top$ が平均ベクトル $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$，分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ の d 次元正規分布に従うとき，その積率母関数が

$$\mathbb{E}[e^{u^\top Z}] = \exp\left(u^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}u^\top \mathbf{\Sigma} u\right), \quad u \in \mathbb{R}^d$$

となることは証明なしに用いてよい。ただし，$\mathbb{E}$ は期待値を表す。

(1) d 次元確率ベクトル Z が d 次元正規分布に従うことと，任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して，$u^\top Z$ が 1 次元正規分布に従うことは同値であることを示せ。また，このとき，$\Sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ ならば $Z_1,\dots,Z_d$ は互いに独立になることを示せ。

(2) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，確率変数列

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \dots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

は互いに独立であることを示せ。

(3) 定数 $h > 0$ に対して，$t_0 = 0,\ t_k = t_{k-1} + h\ (k = 1,2,\dots,n)$ とし，

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2$$

と定めると，$\widehat{\sigma}_n^2$ は σ^2 の不偏推定量であることを示せ。(1)，(2) の結果を用いてよい。

確率変数の族	family of random variables
d 次元確率ベクトル	d-dimensional random vector
平均ベクトル	mean vector
分散共分散行列	variance-covariance matrix
正規分布	normal distribution
積率母関数	moment generating function
期待値	expectation
転置	transpose
確率変数列	sequence of random variables
互いに独立	totally independent
不偏推定量	unbiased estimator

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：応用数学

問題番号 **10**

$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ とする。

(1) 軌道方程式

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 1$$

を $\phi = 0$ のとき $r = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{dr}{d\phi} = 0$ なる初期条件の下で解き，軌道を xy 平面上に図示せよ。

(2) 軌道方程式

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{360r^2}$$

が $\phi = 0$ のとき $r = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{dr}{d\phi} = 0$ なる初期条件の下で定める軌道はどのようなものになるか，説明せよ。

軌道方程式	orbit equation
初期条件	initial condition

２０１８年９月・２０１９年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：情報数学

問題番号 11

指数関数の計算方法について，以下の問に答えよ。

(1) $-1 \le x \le 1$ に対して，e^x の値を

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

で計算したときの誤差の上界を見積もれ。ただし，計算に混入する丸め誤差は無視してよい。

(2) 次のプログラム (関数 `my_exp`) は，与えられた x に対して，

$$\left|\frac{1}{n!}x^n\right| < 2^{-52}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}x^i\right|$$

となる n までの部分和を計算することにより，高精度に指数関数を計算することを意図したものである ($\mathtt{DBL\_EPSILON} = 2^{-52}$)。

```
#include <stdio.h>
#include <float.h> /* for DBL_EPSILON */
#include <math.h>

double my_exp(double x)
{
        double s, t;
        int i;

        s = 1; t = 1; i = 1;
        while (1) {
                t *= x / i;
                s += t;
                if (fabs(t) < DBL_EPSILON * fabs(s)) break;
                i++;
        }

        return s;
}

int main()
{
        printf("%.15g %.15g\n", exp(18.5), my_exp(18.5));
        printf("%.15g %.15g\n", exp(-18.5), my_exp(-18.5));
}
```

しかし，これを実行すると，

```
108254987.750231 108254987.750231
9.23744966197059e-09 9.46038088115435e-09
```

のように，$e^{18.5}$ の値は高精度に計算されているが $e^{-18.5}$ の値は 1 桁しか合っていない。この原因について考察せよ。

(3) なるべく多くの入力 x に対して高精度な指数関数を計算する関数 `my_exp2` を考え，そのプログラムを書け。ただし，`math.h` で

```
# define M_E          2.7182818284590452354    /* e */
```

のように定数 `M_E` が定義されているものとしそれを使ってもよい。

上界　upper bound

丸め誤差　rounding error