

2018年9月・2019年4月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

機械科学専攻

問題表紙

- ◎問題用紙が 6 ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
 ◎解答用紙が 4 枚綴りが 1 組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

1. 選択方法

- (1) 問題 1, 問題 2 は共通科目である。これら 2 題は全て解答すること。
 (2) 問題 3, 問題 4, 問題 5, 問題 6 は選択科目問題である。これら 4 題の中から合計 2 題を選択して解答すること。選択科目問題を 2 題よりも多く解答した場合には、すべての解答を無効とする。

区分	問題番号	科目名	解答方法
共通科目	1	数学	左記 2 題を全て解答すること。
	2	力学	
選択科目	3	熱力学	左記 4 題の中から合計 2 題を選択して解答すること。
	4	流体力学	
	5	材料力学	
	6	制御工学	

2. 解答方法

- (1) 解答は別紙の解答用紙のおもて面に記入すること（裏面への記入は採点対象としない）。
 (2) 問題 1, 問題 2 の解答は対応する番号があらかじめ記載された解答用紙に記入すること。
 (3) 選択科目問題の解答用紙は 2 枚ある。解答用紙 1 枚ごとに 1 科目ずつ解答し、選択した問題番号と科目名を解答用紙上部の当該欄に必ず明記すること。

3. 試験時間は、共通科目と選択科目あわせて 180 分である。

2018年9月・2019年4月入学試験問題
 大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻
 科目名： _____ 数 学 _____

問題番号 1

次に示す，独立変数 $t \in [0, \infty) \subset \mathbf{R}$ の関数 $x(t)$ に関する 2 階の常微分方程式について答えなさい。但し， $\alpha \in \mathbf{R}$ は定数である。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

(i) $x_1 := x, x_2 := \frac{dx}{dt}$ とおいて，2次元実線形空間 \mathbf{R}^2 からなる相空間上のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$ を用いて表すと，微分方程式(1)は次の形に変形できる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

この時，ベクトル場 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))^T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を求めなさい。ここに， f_1, f_2 は \mathbf{R}^2 上の関数である。

(ii) 式(2)で $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ の解である，平衡点 $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \in \mathbf{R}^2$ を求めなさい。

(iii) 微小なベクトル $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbf{R}^2$ を用いて，(ii)で求めた平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ の周りで $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{X}$ と置き，式(2)を線形化すると，次の形の微分方程式が得られる。

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{X} \tag{3}$$

ここに， $\mathbf{A} = [A_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$ は， $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{X} + O(|\mathbf{X}|^2)$ を満たす， 2×2 のヤコビ行列であり， $O(|\mathbf{X}|^2)$

は 2 次以上の微小項を表す。この時，行列 \mathbf{A} の固有値を求めなさい。

(iv) 線形化された微分方程式(3)について，初期値を $\mathbf{X}(0) = (X_{10}, X_{20})^T$ とした時の解曲線 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$ を行列 \mathbf{A} とベクトル $\mathbf{X}(0)$ を用いて表しなさい。

(v) 線形化された微分方程式(3)のベクトル場 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は $\mathbf{F}(\mathbf{X}) := (F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}))^T = \mathbf{A} \mathbf{X}$ によって定義される。ベクトル場 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の発散 $\text{div } \mathbf{F}$ を求めなさい。

(vi) 線形化された微分方程式(3)について，定数 $\alpha \in \mathbf{R}$ の範囲によって，(ii)で求めた平衡点の安定性及び相空間上の解曲線の分類を行い，各々の場合の相図の概形を示しなさい。

(vii) 次に，新たに関数 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ を導入して，相空間 \mathbf{R}^2 上のベクトル $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T := \left(x, \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt} + g(x) \right)^T$ を定義し，もとの微分方程式(2)を次式のように新しい変数 y_1, y_2 のみで表すことにする。

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \Phi(\mathbf{y}) \tag{4}$$

この時，式(4)における相空間 \mathbf{R}^2 上のベクトル場 $\Phi(\mathbf{y}) = (\varphi_1(\mathbf{y}), \varphi_2(\mathbf{y}))^T$ を求めなさい。ここに， φ_1, φ_2 は \mathbf{R}^2 上の関数である。また， $\alpha > 0$ とする。

(viii) 微分方程式(4)において，ベクトル場 $\Phi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の発散 $\text{div } \Phi$ を求め，解の流れに沿って局所的な領域の面積が拡大する場合，及び縮小する場合を， y_1 が取り得る範囲で分類しなさい。

(ix) 微分方程式(4)は， $\alpha > 0$ の時，極限周期軌道が存在することが知られている。特に， $\alpha \gg 1$ とする時，微分方程式(4)における各変数 y_1, y_2 の微係数がゼロとなる時の曲線として与えられるヌルクラインを求めなさい。

(x) (ix)において相図の概形を示し，極限周期軌道がどのように振る舞うかを説明せよ。また，極限周期軌道の周期 T を見積もりなさい。

2018年9月・2019年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻

科目名: _____ 力学 _____

問題番号 2

(1) 図1のように両端が固定され、自然長 l 、バネ定数 k の4つのバネで x 軸方向に繋がった質量 m の3つの質点の運動を考える。つり合いの位置 $x = l, x = 2l, x = 3l$ からの x 軸方向の変位を u_1, u_2, u_3 とする。このとき、3つの質点の変位 u_1, u_2, u_3 に関して、それぞれの運動方程式を示せ。なお、以下の各図とも質点の運動は x 軸方向のみとし、重力や摩擦は無視する。

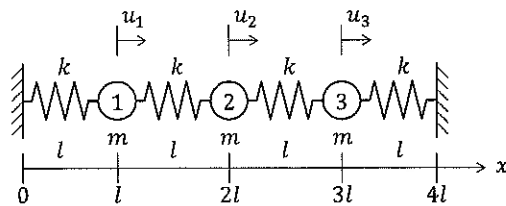


図1 両端が固定された4つのバネで繋がる3つの質点

(2) 各質点の変位を列ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ とおくと、運動方程式は、 $\ddot{\mathbf{u}} + \omega_0^2 \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ の形で示すことができる。但し、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ とする。このとき、行列 \mathbf{A} の各成分を求めよ。なお、変数の上部のドット記号は時間微分を示す。

(3) 行列 \mathbf{A} の固有値、固有ベクトルを求め、それぞれに対応する系の固有角振動数と固有モードの運動の形態を説明せよ。

(4) 図2のように両端が固定され、自然長 l 、バネ定数 k の $N+1$ 個のバネで繋がった質量 m の N 個の質点の運動を考える。 j 番目 ($j \neq 1, N$) の質点の変位 u_j に関する運動方程式、及び、(2)と同様に列ベクトル \mathbf{u} と行列 \mathbf{A} を定義するときの \mathbf{A} の成分を求めよ。

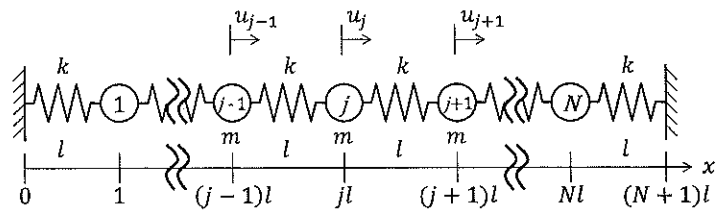


図2 両端が固定された $N+1$ 個のバネで繋がる N 個の質点

(5) (4)の運動方程式に対して差分を微分に置き換える連続体近似を行うことにより、波動方程式が得られることを示し、この波動方程式に従う波の伝播速度 c を求めよ。

(6) (5)と同様に連続体近似を行った、図3のような長さ L の連続体に対して、左端から、振幅 a 、角振動数 ω 、時間 t 、波数 κ の波、 $u = a \sin(\omega t - \kappa x)$ を入力する。右端は固定され、入力波と同じ振幅の反射波が生じるとする。このとき、反射波の式、及び、入力波と反射波を重ね合わせた波の式を求め、入力波と反射波を重ね合わせた波の振動の様子を説明せよ。

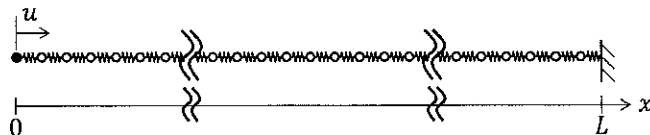


図3 長さ L の連続体に対して左端から波を入力

2018年9月・2019年4月入学試験問題
 大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻
 科目名： _____ 熱力学 _____

問題番号 3

理想気体の膨張過程について、以下の二種類を考える。一つめ（図1）は、内部流動がなく、外部との熱の出入りがない閉鎖領域（初期体積 V_A 、初期温度 T_A 、初期圧力 P_A ）に設置されたピストンをゆっくりと移動させて可逆断熱膨張させる場合である。この場合、粘性摩擦力は小さく、無視することとする。二つめ（図2）は、中央部（断面B）に設置された絞り弁によって、左右が開放になっている直管内での粘性のある定常流動が絞り膨張される場合である。なお、図2の場合では、直管と絞り弁の壁を通して熱の出入りはなく、直管内の絞りから十分に上流（断面A）と十分に下流（断面C）内での流速・温度・圧力・密度は一樣で、かつ、そこでの運動エネルギーはエンタルピに比べて小さく、無視することとする。比エントロピーは s 、比内部エネルギーは e 、比エンタルピは h 、比体積は v とし、それぞれ、単位質量あたりの値であり、温度は T 、圧力は P 、密度は ρ 、体積は V 、定積比熱は C_v 、定圧比熱は C_p 、ガス定数は R 、比熱比は κ と書くこととする。以下の問に答えよ。

- (1) 図1の初期閉鎖領域の体積 V_A を初期温度 T_A から可逆断熱膨張させる際、膨張後の体積を V_C とし、膨張比 $V_C/V_A = \varepsilon$ (> 1) と書くこととする。このとき、膨張後の温度 T_C と膨張後の圧力 P_C を、 T_A 、 P_A 、 ε と比熱比 κ を用いて書け。
- (2) 図2の断面Aと断面Cでの密度をそれぞれ、 ρ_A 、 ρ_C と書き、膨張比 $\varepsilon' = \rho_A/\rho_C$ とするとき、断面Cでの温度 T_C 、圧力 P_C 、流速 U_C を、断面Aでの温度 T_A 、圧力 P_A 、流速 U_A や膨張比 ε' 、比熱比 κ の中の必要な量を用いて記せ。
- (3) 上記の2つの膨張過程の膨張比 ε と ε' が同じ値で、図1と図2の初期温度 T_A が同じ場合を考える。膨張終了時の温度と圧力は、図1と図2のどちらが小さいか答えよ。
- (4) 図2の場合、Gibbsの式 ($T \cdot ds = p \cdot dv + de = p \cdot d(1/\rho) + de$) を用いて、エントロピーが断面Aよりも断面Cでの方が大きく、増加することを述べよ。
- (5) 図2では粘性摩擦があり非可逆現象であるためにエントロピーが増加するが、何故、粘性力が含まれないGibbsの式で、その非可逆性を評価できるのか、説明せよ。
- (6) 動力エネルギー機械（例：自動車用の火花点火装置を有するガソリンエンジン）では、ある範囲の作動条件で、上記の図1、2の形態によって吸気行程での空気密度を下げるのがなされることがあるが、それが必要になる理由について述べよ。また、理論的には図1の形態を用いた方が図2よりも熱効率が向上するが、その理由を述べよ。

なお、必要な記号や仮定・定義等があれば、追記して答えよ。

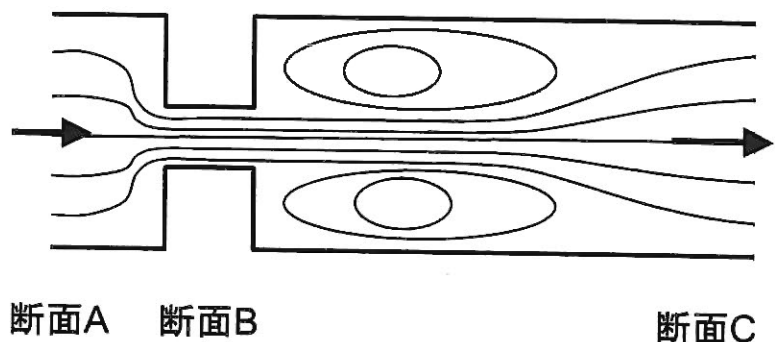
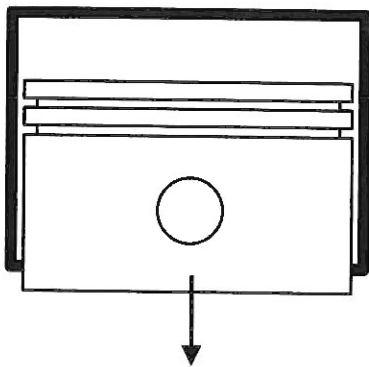


図1 閉鎖領域の可逆断熱膨張過程

図2 開放系の絞り膨張過程 (AとCでの断面積は同じ)

2018年9月・2019年4月入学試験問題
 大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻
 科目名：流体力学

問題番号

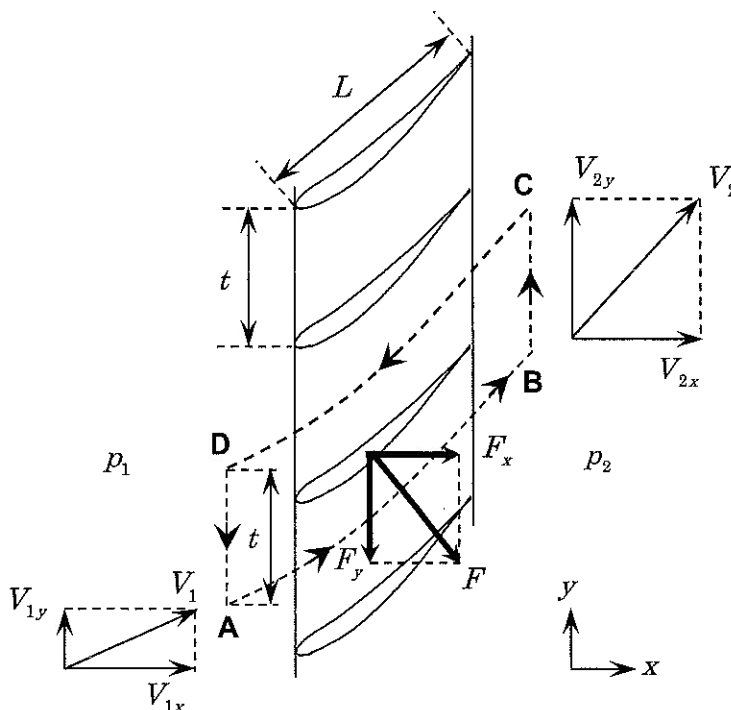
4

図に示すように、弦長 L の翼がピッチ t で均等に配置された静止翼列がある。上流側から密度 ρ (一定) の流体が速度 V_1 で流入し、 V_2 で流出している。図中に示すような x - y 直交座標系を考え、 V_1 , V_2 の x , y 方向速度成分にはそれぞれ添字 x , y を付して表すこととする。静止翼列上流側の圧力を p_1 , 下流側の圧力を p_2 とする。また、一つの翼が流体から受ける力を F とし、その x , y 方向成分をそれぞれ F_x , F_y と表す。このとき、流れの中に ABCD で示す幅 t の検査領域を考え、以下の設問に答えよ。

ただし、流体は非粘性・非圧縮の二次元定常流れとし、重力の影響は考えない。また、検査領域の辺 AB, 辺 CD は翼列内流れの流線に一致しているとする。

- 単位時間内に辺 AD を通過して検査領域に流入する流体の質量 m_1 , および単位時間内に辺 BC を通過して検査領域から流出する流体の質量 m_2 を求めよ。
- 閉曲線 ABCD まわりの循環 Γ を計算せよ。
- 検査領域に運動量のバランス式を適用し、翼が流体から受ける力の x , y 方向成分 F_x , F_y を求めよ。
- 問(3)で求めた F_x , F_y を、循環 Γ を用いて表せ。
- 一つの翼が流体から受ける力 F は、次式のように表されることを示せ。

$$F = \frac{V_1 + V_2}{2} \rho \Gamma$$



2018年9月・2019年4月入学試験問題
 大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻
 科目名: _____ 材料力学

問題番号 5

図1に示す断面を有する長さ $4l$ のはりがある。図2のように、両端部(O点とD点)を単純支持され、中央部のAC間に分布荷重 f_0 が作用している問題を考える。はりのヤング率は E =一定である。

以下の設問に解答せよ。

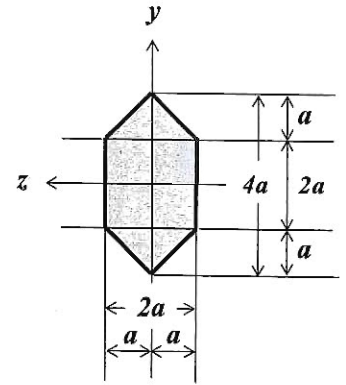


図1 はりの断面図

- (1) 図1に示すはりの断面二次モーメント I_z を求めなさい。

以降、はりの曲げ剛性を EI あるいは $2EI$ として解答せよ。

- (2) 単純支持点(O点とD点)での反力 R_0 と R_D をそれぞれ求めなさい。
 (3) はりの対称性を考慮して、はりの左側部分(OB)に関して、曲げモーメント $M(x)$ を求めなさい。
 (4) せん断力線図(SFD)および曲げモーメント線図(BMD)を求めなさい。
 (5) はりの中央(B点)のたわみ v_B を求めなさい。

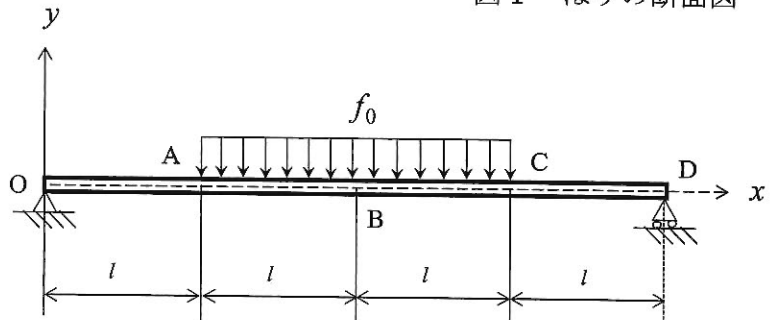


図2 両端で単純支持されたはり (EI 一定)

次に、図3のようにはりに分布荷重が作用している部分(AC間)の曲げ剛性を2倍に変更して、中央点(B点)のたわみを減少させることを考える。中央部に作用している分布荷重 f_0 は同じであるとして、以下の設問に解答せよ。

- (6) 図3におけるOA間($0 \leq x \leq l$)の曲げモーメント $M_1(x)$, AB間($l \leq x \leq 2l$)の曲げモーメント $M_2(x)$ をそれぞれ求めなさい。
 (7) 中央部(B点)のたわみ v_B を求めなさい。

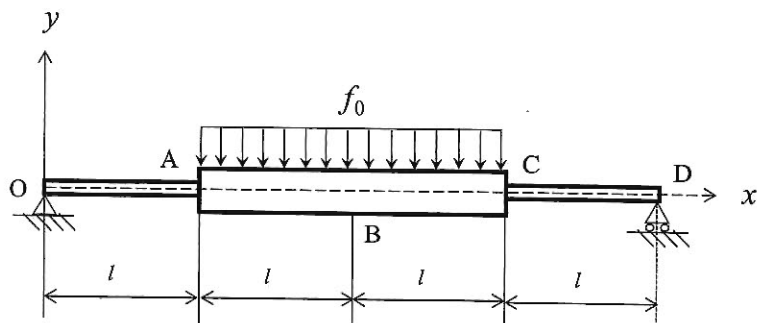


図3 中央の曲げ剛性を2倍に変更したはり

2018年9月・2019年4月入学試験問題
 大学院基幹理工学研究科修士課程機械科学専攻
 科目名： _____ 制御工学 _____

問題番号 6

以下の設問に答えよ。

(1) 一巡伝達関数が $F(s) = K / \{sT(1+3sT)^2\}$ なる系がある。

- ① 安定限界であるとき、 $|F(j\omega)|$ と $\angle F(j\omega)$ の値はいくつか。
- ② なぜ、そのときは安定限界といえるのかを簡潔に述べよ。
- ③ 安定限界のとき K はいくつか。
- ④ ゲイン余裕が 6 [dB] のとき K はいくつか。

(2) 3次元1入力1出力システムで状態方程式を $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $y(t) = cx(t)$ とし、 $x(0) = x_0$ とする。

① このシステムの状態変数線図を示せ。

② $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3$) のとき、 α_1 が関わるサブシステムが可制御・可観測、

α_2 が関わるサブシステムが可制御・不可観測、 α_3 が関わるサブシステムが不可制御・可観測であるとき b_i ($i=1, 2, 3$) と c_i ($i=1, 2, 3$) はどのような値をとるかを答えよ。

③ 系の特性が定係数の微分方程式 $\ddot{\theta}(t) + a_2\dot{\theta}(t) + a_1\theta(t) = k u(t)$ で表されるとき、状態方程式を求めよ。ただし、状態変数を $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$ とする。

(3) ある系の単位ステップ入力に対する応答が図示のように $\{df(0+)/dt\} = 0$, $\{df(t)/dt\} > 0$ (ただし $t > 0$), $f(\infty) = 1$ であるとき、この系を $G(s) = e^{-sL} / (1+sT)$ と近似する。

ただし、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ とする。

- ① 時間 $(T+L)$ を求める簡潔な方法を1つ記せ。
- ② ボード線図を用いて、この系について安定性等について検討する際に注意すべき点を1つ挙げよ。

