数　　学
(問　題)
2018年度

〈2018　H30120015（数学）〉

注　意　事　項

1. 試験開始の指示があるまで，問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は４～５ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて，ＨＢの黒鉛筆またはＨＢのシャープペンシルで記入すること。
4. 解答用紙記入上の注意
   (1) 解答用紙の所定欄（２カ所）に，氏名および受験番号を正確に丁寧に記入すること。
   (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
   (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に丁寧に記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「０」を記入しないこと。

(例）3825番⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

5. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
6. 試験終了の指示が出たら，すぐに解答をやめ，筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
7. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 以下の各問の解答を所定欄に記入せよ。

(1) 実数を係数とする 3 次式 $f(x)$ は $f(1+i)=4+3i$ かつ $f(1+2i)=4$ を満たすとする。このとき $f(x)$ を求めよ。

(2) a と p を正の実数とする。座標平面上に原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を通る放物線 $y=ax^2$ と点 $\mathrm{P}(0,p)$ がある。点 A がこの放物線上を動くとき，線分 AP の長さは $\mathrm{A}=\mathrm{O}$ において最小値をとるとする。p を固定したとき，この条件を満たすような a の最大値を p を用いて表せ。

(3) 点 P は，数直線上の点 1 から出発し，さいころの出る目が 1 ，2 ，3 ，4 ならば $+1$ だけ，5 ，6 ならば -1 だけ動く。この試行を繰り返し，点 P が点 0 または点 5 に到達したときに試行は終了するものとする。点 P が点 5 に到達して終了する確率を求めよ。

(4) a を正の実数とする。座標平面において不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ と不等式 $y \geqq \dfrac{e^{ax}}{a}$ の表す領域の共通部分の面積を $S(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ AC および BD を対角線にもつ 4 角形 ABCD があり，点 O を中心とする円が 4 角形 ABCD に外接しているとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表す。

(1) ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$ の大きさが等しいならば，辺 AB と辺 CD は平行であるかまたは点 O は辺 AB 上にあることを証明せよ。

(2) 3 角形 ABC, BCD, CDA, DAB の重心がすべて点 O から等しい距離にあるならば，4 角形 ABCD は長方形であることを証明せよ。

$\boxed{3}$ すべての正の実数 x に対して $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 3$ であり，また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ であることが知られている。以下では n は自然数とし，i は虚数単位を表すとする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|^n$ を求めよ。

(2) $\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$ の実部を a_n，虚部を b_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上に，$y = x\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ で表される曲線 C_1，および $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ で表される曲線 C_2 がある。点 $(1,1)$ における曲線 C_1 の接線を L_1 とする。以下の計算では，必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\cdots$，$\sqrt{13} = 3.605\cdots$ を用いてもよい。

(1) 接線 L_1 と曲線 C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

(2) 曲線 C_1 の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さを求めよ。

(3) 曲線 C_2 の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さは，曲線 C_1 の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さより大きいことを証明せよ。

〔以　下　余　白〕

〈2018 H30120015（数学）〉

受験番号	万	千	百	十	一
氏名					

（注意） 所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

	1(1)	1(2)	1(3)	1(4)	2(1)	2(2)	3(1)	3(2)	4(1)	4(2)	4(3)
採点欄											

〈2018 H30120015（数学）〉

受験番号	万	千	百	十	一
氏名					

（注意） 所定欄以外に受験番号・氏名を記入してはならない。記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。

数　学　（解答用紙）

1

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	

2

3

4