2018 年度　早稲田大学大学院教育学研究科修士課程入学試験問題訂正

《一般・外国学生・専門科目》問題冊子４ページ

【数学教育専攻】

Ⅶ (b)　(P.4)

＜誤＞$\mathbb{C}$ の連結開集合 W 上で定義された定数写像でない正則写像 $f(z)$ に対し，$f(z)$ による W の像 $f(W)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であることを示せ。

＜正＞$\mathbb{C}$ の連結開集合 W 上で定義された定数関数でない正則関数 $f(z)$ に対し，$f(z)$ による W の像 $f(W)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であることを示せ。

以上

２０１８年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題　専門科目
【数学教育専攻】

解答上の注意

１．数学教育専攻の入学試験問題は、「専門科目・共通」と「専門科目・選択」とに分かれています。
①**「専門科目・共通」**（問題Ⅰ（線型代数）～問題Ⅱ（微分積分））は、志願者全員が解答する問題です。
②**「専門科目・選択」**は、問題（Ⅲ～ⅩⅠ）から二問題を選択し解答しなさい。

志願票に記入した研究指導名	志願票に記入した指導教員名	「専門科目・選択」で解答すべき問題
数学科教育研究指導	瀧澤　武信	問題 Ⅲ ～ 問題ⅩⅠ から、二問題選択
代数学研究指導	広中　由美子	
幾何学研究指導	小森　洋平	
情報数学研究指導	横森　　貴	
情報数学研究指導	小柴　健史	
トポロジー研究指導	谷山　公規	

２．解答用紙の所定欄に、「問題番号」（例：「Ⅰ」・「Ⅴ」など）を必ず記入すること。
また、全ての解答用紙の所定欄に受験番号・氏名・研究指導名・指導教員名を必ず記入すること。

３．解答用紙は、「問題番号」別に使用すること（一つの問題で一枚使用）。

４．解答用紙のホッチキスは、はずさないこと。また、無解答の解答用紙でも提出すること。

５．問題用紙は「５枚」（本ページ含む）、解答用紙は「４枚」です。必ず枚数を確認すること。

以　　上

２０１８年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・共通 ］　　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\mathrm{I}}$ 線形代数

次の行列 A のジョルダン標準形 B を求めよ．また $B = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P も求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathrm{II}}$ 微分積分

(1) 区間 $[0, 1]$ 上の連続な実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に $[0, 1]$ 上で一様収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 次の 3 条件を満たす実数値関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例を 1 つ挙げよ．

(i) g_n は $[0, 1]$ 上の連続関数．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = 1.$

(iii) 任意の $x \in [0, 1]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$

２０１８年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・選択 ］　　　　【数学教育専攻】

$\boxed{\text{III}}$ $X = [0,1]$, $\lambda, p, q \in X$, $p \wedge q = \min\{p, q\}$, $p \vee q = \max\{p, q\}$,

$$T_\lambda(p,q) = \begin{cases} p \wedge q & (p \vee q \geq 1 - \lambda) \\ 0 & (p \vee q < 1 - \lambda) \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

問 1. T_λは以下の (1) ～ (4) の性質をみたすことを証明せよ．

(1) $T_\lambda(p,q) = T_\lambda(q,p)$

(2) $T_\lambda(p, T_\lambda(q,r)) = T_\lambda(T_\lambda(p,q), r)$

(3) $p \leq q, r \leq s \Rightarrow T_\lambda(p,r) \leq T_\lambda(q,s)$

(4) $T_\lambda(p,0) = 0, T_\lambda(p,1) = p$

問 2. $T_1(p,q)$ を p, q を用いて表わせ．

問 3. $T_0(p,q)$ を p, q を用いて表わせ．

$\boxed{\text{IV}}$ p を素数とする．

(1) 位数 p^2 の群の同型類はちょうど２つであることを示せ．

(2) 位数 p^3 の群の同型類は少なくとも４つあることを示せ．

$\boxed{\text{V}}$ 多項式 $f(X) = X^5 - 7 \in \mathbb{Z}[X]$ を考える．素数 p について，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への自然な環準同型で $f(X)$ の係数を移した多項式を $f_p(X)$ とする．従って $f_p(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ となる．

(1) $f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 L とその拡大次数 $[L:\mathbb{Q}]$ を求めよ．

(2) $f_5(X)$ の $\mathbb{F}_5$ 上の最小分解体 M とその拡大次数 $[M:\mathbb{F}_5]$ を求めよ．

(3) $f_3(X)$ の $\mathbb{F}_3$ 上の最小分解体 N とその拡大次数 $[N:\mathbb{F}_3]$ を求めよ．

２０１８年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・選択 ］ 【数学教育専攻】

VI 位相空間 Y から位相空間 X への連続写像 $p: Y \to X$ が被覆写像であるとは，X の任意の点 x に対し，x のある開近傍 U が存在して，U の p による逆像 $p^{-1}(U)$ が次のように表されることとする．

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

ここで V_j は Y の開集合で，$j_1 \neq j_2$ ならば $V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$ を満たし，各 V_j への p の制限 $p|_{V_j}: V_j \to U$ は同相写像である．以下の問いに答えよ．

(a) Y が円周 S^1 かつ p が同相写像でないような被覆写像の例 $p: S^1 \to X$ を挙げよ．

(b) 閉区間 $[0,1]$ から X への連続写像 $u: [0,1] \to X$ と $p(y_0) = u(0)$ を満たす Y の点 y_0 に対し，$\hat{u}(0) = y_0$ かつ $u = p \circ \hat{u}$ を満たす連続写像 $\hat{u}: [0,1] \to Y$ がただ一つ存在することを示せ．

VII (a) 複素数平面 $\mathbb{C}$ の点 p の r-近傍 $U(p;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |p - z| < r\}$ 上で零点を持たない正則関数 $g(z)$ と 2 以上の自然数 k に対し，$g(z) = h(z)^k$ を満たすような $U(p;r)$ 上の正則関数 $h(z)$ が存在することを示せ．

(b) $\mathbb{C}$ の連結開集合 W 上で定義された定数写像でない正則写像 $f(z)$ に対し，$f(z)$ による W の像 $f(W)$ は $\mathbb{C}$ の開集合であることを示せ．

VIII 開区間，半開区間，閉区間，円周のうちのどの２つも互いに同相でないことを示せ．

IX (１) アニュラスはメビウスの帯の部分位相空間であることを示せ．

(２) メビウスの帯はアニュラスの商位相空間であることを示せ．

２０１８年度 早稲田大学大学院教育学研究科
修士課程 一般・外国学生入学試験問題
［ 専門科目・選択 ］ 【数学教育専攻】

X 以下の問いに答えよ．

(1) 3 つの事象で，どの 2 つずつも独立だが，3 つでは独立でない例を 1 つ挙げよ．

(2) $n \geq 2$ を整数とする．サッカーの n チームのトーナメント戦を一様ランダムに与えたとき，ある特定の 2 チームが対戦する確率は $2/n$ となることを示せ．ただし，どのチームも力が均衡していて対戦に勝つ確率は $1/2$ であるとする．

XI 以下の問いに答えよ．

(1) 再帰的に定義される自然数の集合 S を考える．

- (i) $5 \in S$
- (ii) $x \in S$ ならば，$2x, 2x+1 \in S$
- (iii) 上記の (i), (ii) で定まる要素だけが S に属する．

このとき，内包的定義を用いて集合 S を表せ．

(2) 自然数 x の 2 進数表記を $\mathrm{binary}(x)$ とする．このとき，上述の集合 S に対する 2 進数表記の集合，すなわち

$$L_S = \{ \ \mathrm{binary}(x) \in \{0,1\}^* \mid \ x \in S \ \}$$

を受理するチューリング機械 M を構成せよ．($\{0,1\}^*$ は 0,1 からなる（長さ 0 を含む）有限長の記号列全体を表す．)