２０１７年９月・２０１８年４月入学試験
大学院先進理工学研究科修士課程

物理学及応用物理学専攻

問題表紙

◎問題用紙が　6　ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が　8　枚綴りが　1　組あることを試験開始直後に確認しなさい。

注意事項

【選択方法】

○ 下記の６題の中から任意の４題を選択して解答すること。

科目	問題番号
数学一般	1　　2
力学および電磁気学	3　　4
量子力学および熱・統計力学	5　　6

【解答方法】

(1) 解答は別紙の解答用紙の表の面に記入すること。裏面は使用しないこと。
(2) 受験番号・氏名を解答用紙８枚すべてに記入すること。
(3) 解答用紙には，選択した問題番号と科目名を明記すること。１問の解答が解答用紙２枚以上にわたるときには，それぞれの解答用紙に問題番号と科目名を書き，かつ何枚目かがわかるように解答欄に明記すること。
(4) １枚の解答用紙に２問以上を解答しないこと。
(5) ４題を超えては解答しないこと。
(6) 使わなかった解答用紙には，解答欄に大きく×印を書くこと。使わなかった解答用紙も含めて，すべての解答用紙（８枚）を提出すること。

2017年9月・2018年4月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科 目 名：数学一般

問題番号 1

実パラメータ (real parameter) t の実関数 (real function) $x(t), y(t)$ に対する微分方程式系 (differential equation system)

$$[1] \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

を考える。ここで，a, b を実数 (real number) とする。

(1) 行列 (matrix) A の固有値 (eigenvalues) および固有ベクトル (eigenvectors) を求めよ。

(2) 微分方程式系 [1] の一般解 (general solution) を求めよ。

関数 $x(t), y(t)$ の値が変化しない微分方程式系 [1] の解を微分方程式系 [1] の固定点 (fixed point) と呼ぶ。実際，$(x, y) = (0, 0)$ は微分方程式系 [1] の固定点である。

(3) 固定点 $(0, 0)$ が安定 (stable) となるための実数 a, b の満たすべき条件を求め，$a\,b$ 面上に図示せよ。ここで，固定点が安定とは，固定点から微少にずれた任意の初期値 (initial value) を持つ解が $t \to \infty$ で固定点に漸近する (approach) 場合を指す。

次に，実パラメータ t の実関数 $x(t), y(t), z(t)$ に対する微分方程式系

$$[2] \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + ay \\ \dfrac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases}$$

を考える。ここで，a, b, c は正の実数である。前と同様に，関数 $x(t), y(t), z(t)$ の値が変化しない微分方程式系 [2] の解を微分方程式系 [2] の固定点と呼ぶ。

(4) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ は微分方程式系 [2] の固定点である。固定点 $(0, 0, 0)$ の安定性 (stability) を議論せよ。

(5) $b > 1$ の場合，$(0, 0, 0)$ 以外にも微分方程式系 [2] は固定点 (x_0, y_0, z_0) を持つ。(x_0, y_0, z_0) をすべて求めよ。

(6) a, c を $a > c + 1$ として固定し，b を変化させたとき，(5) で求めた固定点 (x_0, y_0, z_0) が安定から不安定 (unstable) に変わる臨界値 (critical value) b_{cr} を a, c を用いて表せ。ここで固定点が不安定とは，固定点から微少にずれた初期値を持つ解が $t \to \infty$ で固定点から離れていくことがある場合を指す。

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：数学一般

問題番号 2

実変数xと複素変数zの二変数函数 $f(x,z)=\exp(-(x-z)^2)$ 及び$g(x,z)=\exp(2xz-z^2)$ に対し次の問に答えよ。

(1) f のzに関する原点中心の冪級数展開 (power series expansion at the origin with respect to z)を

$$f(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x)}{n!}z^n$$

と表すとき

$$a_n(x)=(-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

であることを示せ。また上の冪級数の収束半径 (radius of convergence) を求めよ。

(2) 各$n\geq 0$及び$x\in\mathbb{R}$ に対し

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

とするとき

$$g(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{z^n}{n!}$$

と表されることを示せ。

(3) $H_n(x)$ はxの多項式 (polynomial) であることを示し，その次数 (degree) 及び最高次の係数 (coefficient of the highest degree) を求めよ。

(4) $m<n$ なる$m,n\geq 0$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^m H_n(x)e^{-x^2}dx$$

を求めよ。

(5) $n\geq 0$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n H_n(x)e^{-x^2}dx$$

を求めよ。

(6) $m,n\geq 0$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx$$

を求めよ。

(7) H_n は二階の常微分方程式

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

を満たすことを示せ。

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 3

水平面(horizontal plane)を(x, y)平面 (plane)とし，鉛直上向き(vertical upward)をz軸(z-axis)正の向きとする直交座標系(Cartesian coordinate system) O-xyzにおいて，z軸上の点Pに，長さ(length) lのひも(string)の端を固定する。座標系O-xyzは慣性系(inertial system)である。そしてひものもう一つの端に質量(mass) mのおもり(bob)をつけ，点Pからおもりを吊るす。このときおもりは座標系O-xyzの原点(origin)にあった。そして，ひもが緩まないようにしたまま手でおもりを移動させ，その(x, y)座標が$(a, 0)$となる点で静止させた($a > 0$)。aはlに比べて十分小さい。以下では重力加速度(gravitational acceleration)をgとし，ひもの質量，おもりの大きさ，空気抵抗や摩擦は無視する。そして以下のI，IIの場合を考える。

I: 時刻$t = 0$で静かにおもりから手を離し，その後のおもりの周期運動(periodic motion)を考える。以下の問に答えよ。

問１　時刻$t \geq 0$でのおもりのx座標の時間変化を表す運動方程式(equation of motion)は，x/lの高次の項(higher order terms)は無視すると，単振動(simple harmonic oscillation)の方程式(equation)となる。この運動方程式を書け。そしてこの運動方程式を解き，時刻$t \geq 0$での$x(t)$を求めよ。

問２　時刻$t \geq 0$でのおもりの運動エネルギー(kinetic energy)を$K(t)$とする。おもりの振動の一周期にわたっての$K(t)$の平均値(average)は，$K(t)$の最大値(maximum)の何倍か。ただしおもりの速度(velocity)のz成分(component)の$K(t)$への寄与は，$x(t)/l$の高次であるため無視せよ。

次に上記のおもりの運動を，座標系O'-$x'y'z'$から観測する。ここで座標系O'-$x'y'z'$は時刻$t = 0$にて座標系O-xyzと一致(coincide)し，また図１のように座標系O'-$x'y'z'$は座標系O-xyzに対してz軸回りに一定(constant)の角速度(angular velocity) ω (> 0)で反時計回り(counterclockwise)に回転している。

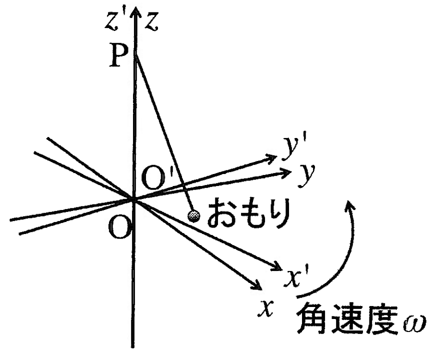

図1

問３　時刻$t \geq 0$にて座標系O'-$x'y'z'$でのおもりのx'座標を$x'(t)$，y'座標を$y'(t)$とする。また時刻$t \geq 0$でのおもりの速度の(x', y')成分を$(v_x'(t), v_y'(t))$とする。時刻$t \geq 0$にて座標系O'-$x'y'z'$でのおもりの加速度の(x', y')成分 $(a_x'(t), a_y'(t))$を，$x'(t)$, $y'(t)$, $v_x'(t)$, $v_y'(t)$を用いて表せ。ただし座標系O-xyzでの座標$x(t)$や速度，加速度は全て消去(eliminate)すること。

問３で得られた方程式を，以下では方程式(E)と呼ぶ。

問４　方程式(E)から，座標系O'-$x'y'z'$でのおもりの運動において，おもりが受ける２種類の見かけの力(fictitious forces) のx'成分とy'成分を求めよ。またその２種類の見かけの力の名称を答えよ。

II: 座標系O'-$x'y'z'$でのおもりの初速度ベクトル(initial velocity vector)が0となるように，時刻$t = 0$でおもりから手を離した場合を考える。ただし時刻$t \geq 0$における(x', y')平面上での原点からおもりまでの距離(distance)を$r(t)$としたとき，時刻$t \geq 0$にて常に$r(t) \leq a$が成り立っているものとする。この場合も，方程式(E)は座標系O'-$x'y'z'$でのおもりの運動方程式である。以下の問に答えよ。

問５　$\xi(t) = x'(t) + i\,y'(t)$ とする。ここでiは虚数単位（imaginary unit, $i^2 = -1$）である。方程式(E)を$\xi(t)$に対する微分方程式(differential equation)として表せ。そして上記IIの場合の初期条件(initial condition)のもとでその微分方程式を解き，$\xi(t)$を求めよ。

問６　時刻$t \geq 0$での$r(t)$を求め，また時刻$t \geq 0$で常に$r(t) \leq a$が成り立つための条件を求めよ。そしてtの関数(function)としての$r(t)$の概形を図示せよ。また$r(t)$の最小値(minimum)を求めよ。

問７　このおもりの運動を座標系O-xyzで考えて，力学的エネルギー(mechanical energy) の保存(conservation)と角運動量(angular momentum)ベクトルのz成分の保存を用いて$r(t)$の最小値を求め，それが問６の結果と一致することを示せ。ただし$r(t)/l$の高次の項は無視せよ。

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題
大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　力学および電磁気学

問題番号 4

（１） 真空 (vacuum) 中の電磁波 (electromagnetic wave) において時間t, 位置$\boldsymbol{x}$における電場 (electric field) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$，磁束密度 (magnetic flux density) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$の波動方程式 (wave equations) は，それぞれ

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\,\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \left(\Delta - \varepsilon_0\,\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

となることをマクスウェルの方程式 (Maxwell's equations) から導け。ここで，ε_0は真空の誘電率 (permittivity)，μ_0は真空の透磁率 (permeability) である。(必要であればベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}$ を用いよ。)

（２） $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$ ， $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}^{(2)}B_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$が，それぞれ上記（１）の波動方程式の解であるとき，①波の位相速度 (phase velocity) $|\boldsymbol{v}_p| \equiv \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$，②３つのベクトル $\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$，$\boldsymbol{e}^{(1)}$，$\boldsymbol{e}^{(2)}$の間の互いになす角度，③ 振幅 (amplitude) B_0とE_0の関係を示せ。ただし$\boldsymbol{e}^{(1)}$，$\boldsymbol{e}^{(2)}$はそれぞれ単位ベクトル (unit vector)，$\boldsymbol{k}$は波数ベクトル (wave vector)，ωは角振動数 (angular frequency) である。

（３） 位相差 (phase difference) がδの２つの平面電磁波 (plane electromagnetic waves)，$\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}^{(1)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$，$\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}^{(2)}E_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \delta)$が重ね合わされたとき作られる電磁波$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(1)} + \boldsymbol{E}^{(2)}$は，どのような偏った波として進行するか，① $\delta = 0$ のとき，② $\delta = \frac{\pi}{2}$ のとき，③ $\delta = -\frac{\pi}{2}$ のときそれぞれについて説明せよ。ただし，$\boldsymbol{e}^{(1)}$，$\boldsymbol{e}^{(2)}$は上記（２）で用いた単位ベクトルとする。

（４） 電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\sin(\omega t)$ が，誘電率ε，電気伝導率 (electrical conductivity) σ の物質内に存在しているとき，伝導電流密度 (conduction electric current density) $\boldsymbol{j}$と変位電流密度 (displacement current density) $\boldsymbol{j_d} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ の間に$|\boldsymbol{j_d}| \ll |\boldsymbol{j}|$が成り立つには，$\varepsilon$，$\sigma$，$\omega$の間にはどのような関係が成り立つ必要があるかを示せ。ここで$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$とし$\varepsilon$，$\sigma$は$\omega$の影響を受けないこととし，またオームの法則 (Ohm's law) $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$が成り立つこととしてよい。

（５） オームの法則が成り立つ時，電荷保存則 (charge conservation) $\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0$ を用いて物質中の時間tにおける電荷分布 (charge distribution) $\rho(\boldsymbol{x},t)$を求めよ。ただし，時間$t = 0$で与えられた電荷分布を$\rho_0(\boldsymbol{x})$とし，$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$とする。また，時間が十分に経ったとき，$\sigma \gg \varepsilon$となる物質中の電荷分布はどうなるか述べよ。

（６） 誘電率ε，透磁率μ，電気伝導率σ の導体内 (conductor) に電磁波が存在すると，それに伴って電流$\boldsymbol{j}$が発生する。電磁波に対してもオームの法則が成り立つとき，上記（１）と同様に，導体内で電磁波が満たす方程式を$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ それぞれについてマクスウェルの方程式から導け。ただし，$\boldsymbol{j_d}$は無視できるものとし，$\rho = 0$，$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ ，$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$が成り立つこととする。

（７） 超伝導体 (superconductor) ではオームの法則が成立せず，ロンドン方程式 (London equation) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\boldsymbol{B}$が成立すると考える。ここで$\lambda_L$は定数である。このとき$xy$面を表面として$z \geq 0$の領域に配置された一様な超伝導体内部の$\boldsymbol{B}$について，磁束密度$\boldsymbol{B}(z)$の分布を求めよ。ただしここで$\boldsymbol{B}(z = 0) = \boldsymbol{B}_0$とし，また$\boldsymbol{j_d}$は無視でき，超伝導体中での透磁率は$\mu_0$とする。

2017年9月・2018年4月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：量子力学および熱・統計力学

問題番号 5

以下の問いに答えよ。なお，必要に応じて問題文中に定義されていない量を用いても良いが，その場合にはそれが何を意味しているか必ず明記すること。

(1) 質量 (mass) m，角振動数 (angular frequency) ω の1次元調和振動子 (one-dimensional harmonic oscillator) 系を考える。この系における典型的な (typical) 長さ (length)，運動量 (momentum)，エネルギー (energy) のスケール (scale) を $m, \omega, \hbar$ だけを用いて表せ。なお，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数 (Planck constant) である。

(2) 上記のスケールによって無次元化された座標演算子 (dimensionless coordinate operator)，運動量演算子 (dimensionless momentum operator)，ハミルトニアン演算子 (dimensionless Hamiltonian operator) をそれぞれ x, p, H_0 とすると

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2$$

となる。x と p の間の交換関係 (commutation relation) $[x, p]$ はいくらか。また，$[H_0, a] = -a$ となる演算子 a を x と p で表せ。ただし $[a, a^\dagger] = 1$ と規格化する。

(3) 同じ質量と同じ角振動数の1次元調和振動子2個からなる力学系を考える。この系の無次元化されたハミルトニアンは各粒子の無次元化された座標 x_1, x_2 と運動量 p_1, p_2 を用いて

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

で与えられる。ハミルトニアン H の固有値 (eigenvalue) E_n とその縮退度 (degeneracy) を求めよ。ただし固有値は小さい順に $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ とする。

(4) 上記のハミルトニアンに2粒子間の相互作用 (interaction) が

$$V = \frac{g}{2}(x_1 - x_2)^2$$

の形で加わった。g は相互作用の強さを表す無次元の結合定数 (dimensionless coupling constant) である。g が十分小さい $0 < g \ll 1$ としてハミルトニアン H の基底状態 (ground state) の固有値の変化量を摂動 (perturbation) の1次の近似 (first-order approximation) で求めよ。

(5) H の第一励起状態 (first-excited state) の固有値の変化量を同じく摂動の1次の近似で求めよ。

(6) 全ハミルトニアン (total Hamiltonian) $H + V$ は2粒子の入れ替えに対して対称である (symmetric under exchange of 2 particles)。このことから $H + V$ の固有状態 (eigenstates) に関してどのようなことが結論されるか。

(7) 全ハミルトニアン $H + V$ の固有値を近似に依らず求めよ。

(8) 摂動論の結果 (4)，(5) と正確な値 (7) とを比較し，近似の有効性 (validity of approximation) を議論せよ。

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院先進理工学研究科修士課程物理学及応用物理学専攻

科　目　名：　量子力学および熱・統計力学

問題番号 6

原子 (atom) のもつ磁気モーメント (magnetic moment) $\vec{m}$ は, 電子系 (electron system) の全角運動量 (total angular momentum) $\vec{J}$ に比例し, $\vec{m} = g\mu_{\mathrm{B}}\vec{J}$ で与えられる。但し, μ_{B} はボーア磁子 (Bohr magneton), g はランデの g 因子 (Landé g factor) である。この磁気モーメントが磁場 (magnetic field) $\vec{H}$ 中に置かれたときの磁気エネルギー (magnetic energy) は, 磁場方向を z 軸にとると, $-\vec{m}\cdot\vec{H} = -g\mu_{\mathrm{B}}J_z H$ と書ける。よく知られているように J_z は $-J, -J+1, \cdots, J$ の固有値をもつ。

このような磁気モーメントが N 個含まれる結晶 (crystal) が, 温度 (temperature) T, 磁場 $\vec{H}$ のもとで熱平衡状態 (thermal equilibrium state) にあるとする。磁気モーメント同士の相互作用 (interaction) は無視できる。計算の記述を簡単にするため, 逆温度 $\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ (k_{B} はボルツマン定数 (Boltzmann constant)), 及び無次元化された (dimensionless) 磁場 $h = \beta g\mu_{\mathrm{B}}JH$ を用いて以下の問に答えよ。

(1) この系の分配関数 (partition function) Z を求めよ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー (Helmholtz free energy) F を求めよ。

(3) 磁化 (magnetization) $M = -\partial F/\partial H$ を

$$M = Ng\mu_{\mathrm{B}}JB_J(h)$$

の形に書くとき, 無次元磁場 h の関数 $B_J(h)$ をブリユアン関数 (Brillouin function) と呼ぶ。J をパラメーターとして含むブリユアン関数を求めよ。

(4) 磁場が弱い極限 (weak field limit) では M は H に比例し, $M = \chi H$ と書ける。帯磁率 (magnetic susceptibility) χ を求めよ。

(5) $J = 1/2$ の時, 系は量子極限 (quantum limit) となる。この時 $B_{1/2}(h)$ を求めよ。

(6) J が 1 に比べて大きい時, $\mu = g\mu_{\mathrm{B}}J$ は磁気モーメントの古典値 (classical value) となる。あらためて $h = \beta\mu H$ と置き, μ を J によらない一定値とみなした上で (regarding μ as a J-independent constant), 他の箇所に含まれる J について $J \to \infty$ の極限 (limit) をとるとき, $B_J(h)$ は磁化の古典公式 (classical formula) であるランジェバン関数 (Langevin function) $L(h)$ と一致するはずである。この手続きでランジェバン関数 $L(h)$ を求めよ。

(7) $B_{1/2}(h)$ および $B_\infty(h) = L(h)$ を無次元磁場 h の関数として図示 (show their graphs) せよ。