

偏微分方程式に対する解の精度保証付き数値計算

研究代表者 高安 亮紀

(理工学研究所 理工研が募集する次席研究員)

1. 研究課題

本研究では、非線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題を考え、数値計算によって得られた近似解の近傍における真の解の存在検証を数値計算によって実現する手法を確立する。これを「偏微分方程式に対する解の精度保証付き数値計算」と呼ぶ。

具体的には本研究において次の事柄を研究する。

① 新しい精度保証付き数値計算理論の構築

放物型偏微分方程式の古典的な解析手法では、空間変数に関する微分作用素が解析半群を生成し、解の局所的な表示が得られることが知られている。この性質に注目し、本研究では、解析半群を用いた不動点形式を用いる解の精度保証付き数値計算理論を構築する。

② 計算機を援用した漸近解析手法の提案

解の漸近挙動を数値計算によって計算機援用解析する手法を提案する。放物型偏微分方程式の定常状態は楕円型偏微分方程式で記述される。提案手法では定常解の近傍に解が時間大域的に存在することを精度保証付き数値計算によって示す。

③ 爆発解の数値的存在検証および爆発時刻の解明

微分方程式の解が有限時刻で発散するとき、解が爆発するという。解の爆発は非線形現象における特異性発現の一例であり、モデルが破綻してしまう一つの要因である。本研究では、解が爆発するのか、するとしたらいつ爆発するのかを精度保証付き数値計算によって解明する。

2. 主な研究成果

研究課題①に対して、非線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算理論を構築した。解析半群を用いた不動点定式を近似解と真の解との誤差関数を用いて定義し、ある時間区間において近似解の近傍に解が局所一意存在することを数値的に示す局所包含定理を提案した。近似解を数値計算により得た数値解から構成することで、局所包含定理の十分条件は精度保証付き数値計算を用いることで数値的に厳密に確認でき、放物型方程式の真の解の厳密な包含を得た。さらに解の存在が示せる時間区間を延長するための解の連結スキーム (Concatenation scheme) を提案し、初期時刻からユーザーが所望する時刻まで解の存在検証を数値的に実行することができるようになった。本成果は論文としてまとめ、応用数理分

野のトップジャーナルへ投稿中である。

M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi: "A method of verified computations for solutions to semilinear parabolic equations using semigroup theory", submitted.

次に研究課題②に対して、これまでに研究代表者らが構築した楕円型偏微分方程式に対する解の精度保証付き数値計算理論を用いて、定常解の存在が保証された場合に、その定常解の近傍に解が時間大域的に存在することを数値的に検証する解の漸近解析理論を構築することに成功した。数学解析により時間大域解が存在するクラスの放物型方程式問題に対して、具体的に解の性質を定量的に記述できる点で本研究は有意義である。例えば、 Ω をユークリッド平面上の有界多角形領域として、 $J := (0, \infty)$ とする。このとき次の放物型方程式の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u) & \text{in } J \times \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{on } J \times \partial\Omega, \\ u(t_0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

このとき $f(u) = u^2 + \sum_{1 \leq k, l \leq 3} \sin(k\pi x_1) \sin(l\pi x_2)$ とする。

上記問題は定常解 ϕ をもち (図. 1), その近傍における時間大域的なふるまいを次の不等式によって数値的に検証することができた。

$$\|u(t) - \phi\|_{H_0^1} \leq \rho e^{-\frac{(t-t')}{40}}, \quad t \in (t', \infty), \quad \rho = 0.04035, \quad t' = 0.2578125.$$

すなわち、時間大域解は定常解に対して、時間指数的に収束していくことが分かり、その収束の定数まで具体的に求めることができるようになった。このことは力学系理論という吸引域 (basin) の構成に対応している。本成果についても論文をまとめ、トップジャーナルへ投稿中である。

M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi: "Numerical verification for existence of a global-in-time solution to semilinear parabolic equations", submitted.

最後に研究課題③に対して、常微分方程式の爆発解に対する数値的検証理論を構築できた。すなわち「解が爆発するのか、するとしたらいつ爆発するのか」について精度保証付き数値計算を用いて爆発時刻の厳密な包含を得ることで明示的に示すことができるようになった。本研究においては力学系の技巧であるコンパクト化と時間スケール変換による方程式の正則化が効果的であり、世界を先駆けて計算機を利用する爆発解へのアプローチを構築できた。本成果についても論文として発表予定である。

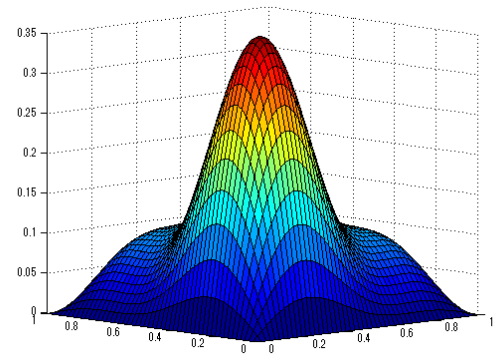


図 1: 定常解 ϕ の概形

3. 共同研究者

大石進一（理工学術院・教授）
松江要（統計数理研究所・特任助教）
水口信（基幹理工学研究科・D3）

久保隆徹（筑波大学数理物質系・講師）
佐々木多希子（東大数理・D3）
田中一成（基幹理工学研究科・D2）

4. 研究業績

4.1 学術論文

- M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, and S. Oishi, "On the embedding constant of the Sobolev type inequality for fractional derivatives", to appear in NOLTA, IEICE 2016.
- A. Takayasu, M. Mizuguchi, T. Kubo, and S. Oishi, "Verified Computations for Solutions to Semilinear Parabolic Equations Using the Evolution Operator", in Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, Volume 9582 of the series Lecture Notes in Computer Science, pp. 218-223, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.
- N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi, and A. Takayasu, "Verified computations for hyperbolic 3-manifolds", Exp. Math., Vol. 25, Issue 1, pp.66-78, Oct. 2015.

4.2 総説・著書

4.3 招待講演

- "常微分方程式の爆発解に対する数値的検証法について", 応用数学セミナー@芝浦工大「爆発問題の数値解析」, 芝浦工業大学大宮キャンパス (2016/3/7).
- "発展作用素を用いた半線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「現象解明に向けた数値解析学の新展開」, 京都大学数理解析研究所 (2015/11/19).
- "解析半群を利用した半線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法", 数値解析セミナー（東大）, 東京大学 駒場キャンパス (2015/4/27).

4.4 受賞・表彰

4.5 学会および社会的活動 (MS 明朝体、11 ポイント)

- Secretary of the Special Section on NOLTA journal
- 数理人セミナー 世話人
- Assistant Secretary of Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering
- 電子情報通信学会 回路とシステムワークショップ実行委員

5. 研究活動の課題と展望

本年度の成果により非線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算に対する方法論がある程度構築できた。一方で解法の精度という点で問題があるため、今後は高精度化を達成すべく、作用素論で存在が保証されている発展作用素と高精度な近似解を利用する精度保証付き数値計算理論を構築する。これにより数学的未解決問題への数値的解決を目指す見込みである。