

非線形問題に対する精度保証法の確立

研究代表者 大石 進一
(基幹理工学部 応用数理学科 教授)

1. 研究課題

本プロジェクトでは、大きく二つの事柄を達成する。

- ① 初等関数と特殊関数の高精度な精度保証付き数値計算法の確立
- ② 精度保証付き数値計算の非線形偏微分方程式への応用

丸め誤差や打ち切り誤差などの全ての誤差を考慮した上で、数学的に正しい結果を数値計算によって導く計算法を精度保証付き数値計算と呼ぶ。研究代表者は全ての非線形問題に対する精度保証付き解法の基礎となる区間演算を中心に、従来の計算法より高速で高可搬な効率的な手法を提案し、非線形問題に対する精度保証付き数値計算の基盤を確立した。

ここではこれまでの理論を発展させ、逆三角関数などの初等関数やガンマ関数やベッセル関数などの特殊関数の数値計算について倍精度数だけを利用して(高可搬)、内部では倍精度数の倍の精度で計算を行ない(高精度)、精度保証付きで達成する(高信頼)、既存手法より実行時間が早い(高速)、計算アルゴリズムの設計法を構築する。さらに非線形偏微分方程式の数値解を含む近傍に100%間違いなく解が存在する事を計算機援用証明する手法を発展させ、「理論の高精度化」と「実用問題への応用」を目指す。

2. 主な研究成果

2.1 計算が困難な特殊関数の精度保証付き数値計算法の基礎技術の提案

これまでに確立した、指数関数、三角関数、双曲線関数、逆三角関数の約四倍精度の結果を与える精度保証付き数値計算法を基礎として、特殊関数の計算法の基礎技術の構築を行なった。特殊関数計算法の多くは基礎演算と積分により構成され、精度保証法の多くも同方針で行なう。しかし、数値積分法などにおいて精度が大きく失われ、それにより精度保証結果の精度が低くなることしばしば確認された。この問題に対し、高速な疑似八倍精度計算を提案し、精度が悪くなるような問題に対しても高速に対処できる計算法を構築した。提案手法は4つの倍精度浮動小数点数を組み合わせ、少なくとも203ビットの情報を保持する。同様の先行研究と比べ、保持出来る情報量は若干少ないが、桁上りを考慮し設計されているため高速性の点で優れており、六倍精度計算にも応用することが可能である。

2.2 自己共役微分作用素の精度保証付き固有値評価法の提案

これまでに確立したLaplace作用素の固有値評価方法を基礎とし、一般的な自己共役微分作用素(例えば、重調和作用素、Maxwell作用素)に対する理論を提案した。提案理論を用いて、重調和作用素の高精度な固有値評価を行った。また、非適合有限要素法を巧みに利用するLaplace作用素、重調和微分作用素の固有値評価手法を初めて提案した。加えて、より一般的な微分作用素の高精度な固有値評価を検討した。

2.3 時間発展問題に対する中尾の方法の確立

時間発展問題に対する精度保証付き数値計算法について研究を行った。放物型偏微分方程式の初期値境界値問題について、中尾の方法と呼ばれるコンパクト作用素の不動点問題に帰着する手法の成果を論文にまとめた。さらに上記手法とは別の数値スキームで得られた近似解をもとにする新しい精度保証法を確立した。これらの成果によって、ある程度の時間発展型偏微分方程式に対して精度保証付き数値計算が可能となった。

2.4 多角形領域上での高次有限要素解の計算可能な誤差定数

多角形領域上で定義された Poisson 方程式に対して、高次有限要素法 (hp-FEM) によって得られた数値解の計算可能な事前誤差評価式を提案した。本結果に現れる定数は、非線形楕円型偏微分方程式の解の存在を精度保証付き数値計算によって検証する際に非常に有用である。特に非凸な領域においては、解の特異性を十分に近似できないために精度が粗くなる非常に難しい問題が存在する。提案手法は劉・大石が世界に先駆けて提案した Hypercircle equation を用いた手法を応用することにより、非凸な角に現れる特異性 (2 階微分の可積分性の欠如) も処理することができる汎用性の高い手法となった。

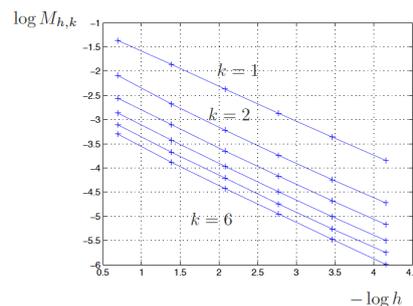


図 1 : 高次有限要素解に対する誤差定数の高精度化

3. 共同研究者

劉 雪峰 (理工学術院総合研究所・次席研究員) 木村拓馬 (理工学術院総合研究所・次席研究員)
 山中 脩也 (理工学術院総合研究所・次席研究員) 高安 亮紀 (応用数理学科・助教)

4. 研究業績

4.1 学術論文

- X. Liu, S. Oishi, Verified eigenvalue evaluation for Laplacian over polygonal domains of arbitrary shape, *SIAM J. Numer. Anal.*, **51**(3), 1634-1654 (2013).
- N. Yamanaka, S. Oishi, Fast quadruple-double floating point format, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, **5**(1), 15-34 (2014).
- Y. Yanagisawa, T. Ogita, S. Oishi, A modified algorithm for accurate inverse Cholesky factorization, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, **5**(1), 35-46 (2014).
- A. Minamihata, K. Sekine, T. Ogita, S. Oishi, Fast verified solutions of sparse linear systems with H-matrices, *Reliable Computing*, **19**, 127-141 (2013).
- T. Kinoshita, T. Kimura, M.T. Nakao, On the a posteriori estimates for inverse operators of linear Parabolic equations with applications to the numerical enclosure of solutions for nonlinear problem, *Numerische Mathematik*, online first, **20**, (2013).
- M.T. Nakao, T. Kimura, T. Kinoshita, Constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**(3), 1525-1541 (2013).

T. Kimura, Validated solutions for P-matrix linear complementarity problems, *Pacific Journal of Optimization*, **9**, 479-491 (2013).

A. Takayasu, X. Liu, S. Oishi, Remarks on computable a priori error estimation for higher degree finite element solution of elliptic problem, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, **5**(1), 53-63 (2014).

X. Liu, S. Oishi, Guaranteed high-precision estimation for PO interpolation constants on triangular finite elements, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **30**, 635-652 (2013).

K. Sekine, A. Takayasu, S. Oishi, An algorithm of identifying parameters satisfying a sufficient condition of Plum's Newton-Kantorovich like existence theorem for nonlinear operator, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, **5**(1), 64-79 (2014).

4.2 総説・著書

4.3 招待講演

"Numerical Verification of Hyperbolicity for 3-Manifolds", The Second International Conference on Engineering and Computational Mathematics(ECM2013), The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, December 2013.

"Verified eigenvalue bounds for elliptic operators and applications", Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany, September 2013.

4.4 受賞・表彰

K. Tanaka, JSST 2013 International Conference, Student Presentation Award.

4.5 学会および社会的活動

国際会議組織委員長, "The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014", 2014年3月, 早稲田大学, 京都大学.

5. 研究活動の課題と展望

今後はさらなる高精度化のため, 領域の形状によって発生する特異性を考慮した特異関数を有限要素基底で張られた空間を用いて処理し, 任意多角形領域上に定義された非線形楕円型方程式の解の精度保証付き数値計算を用いた検証を可能にする手法を確立する.