

数理モデリングに有用な精度保証付き数値計算理論の発展

研究代表者 大石 進一
(基幹理工学部 応用数理学科 教授)

1. 研究課題

本プロジェクトの目的は、計算機による計算の信頼性を保証する精度保証付き数値計算の数学理論に基づく計算機援用解析手法によって、数理的なモデリングの信頼性や現象との整合性について検討できるような理論を構築し、モデリングに役立つ精度保証付き数値計算学を確立し発展させることである。具体的には次の目標を達成し、モデリングの信頼性を飛躍的に向上させることを目指す。

モデル方程式の信頼性を検討するための精度保証理論の構築

偏微分作用素の固有値問題の精度保証付き数値計算法を発展させ、これまで難しかった爆発解や3次元領域における Navier-Stokes 方程式などの厳密な解の検証を行う。

不確定要素問題に対する精度保証付き数値計算の高性能化

Affine Arithmetic のダミー変数の2次化、高次化を行い、不確定要素問題に対する精度保証法を高性能化する。また、高性能化された方法を精度保証付き数値計算ツールボックスに適用する。

超大規模問題の数値計算法に対する信頼性の保証

①で出現する超大規模な線形問題に対する精度保証付き数値計算法の開発が必要不可欠である。近年、荻田らにより大規模な固有値問題に対する高精度な固有値の数値計算手法が確立された。これを基にその信頼性を検証する理論を確立する。

2. 主な研究成果

2.1 1次元エノン型方程式の解の分岐に関する研究

1次元エノン型方程式の解の分岐の精度保証を行った。エノン型方程式はその方程式独自の非線形項により解に特異性が含まれるためそこに数学的な難しさのあるモデルである。我々は、その特異性に対して厳密に考慮した精度保証法を開発し、分岐解析を行った。開発手法により解の分岐を連続的に追跡したところ、7種類の多重解の存在性を証明できた。理論解析では、これまで3種類の解の存在性しか証明できていなかったもので、7種類の多重解の存在は完全に新たな結果である。また、そのような解の多様性が生じ始める分岐点に対して従来の理論的解析では正確に求められなかったのが、本研究により保証付きで求められるようになった。

2.2 微分可能な非線形項持つ様々な非線形遅延差分方程式のダイナミックスを調べた。その結果、様々な非周期解と分数調波解が観察され、その間の多様な分岐現象も観察された。そのような多様な分岐現象の解析のために逆分岐図という概念を提案した。これはどのような解が与えられた分岐図を与えるかを明らかにする一種の逆問題である。そして、分数調波解と概周期解の存在を精度保証付き数値計算によって証明する手法を調べた。その結果、漸近優対角行列の理論を構築することができ、多くの非線形遅延差分方程式の分数調波解の計算機援用証明法を確立した。

3. 共同研究者

田中一成(早稲田大学 数理科学研究科 講師(任期付き))

4. 研究業績

4.1 学術論文

- [1] Taisei Asai, Kazuaki Tanaka, Shin'ichi Oishi: "Numerical verification for asymmetric solutions of the Hénon equation on bounded domains." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 399, Jan., (2022): 113708.
- [2] Shin'ichi Oishi, Siegfried M. Rump: "Special section on verified numerical computations, Part II", *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE 12.1 (2021): 1-1.
- [3] Kouta Sekine, Kazuaki Tanaka, and Shin'ichi Oishi: "Inverse norm estimation of perturbed Laplace operators and corresponding eigenvalue problems." *Computers & Mathematics with Applications* 106 (2022): 18-26.
- [4] Marko Lange, and Shin'ichi Oishi: "Correction to: A note on Dekker's FastTwoSum algorithm." *Numerische Mathematik* 149.1 (2021): 227-228.
- [5] Kouta Sekine, Mitsuhiro T. Nakao, Shin'ichi Oishi, Masahide Kashiwagi: "A numerical proof algorithm for the non-existence of solutions to elliptic boundary value problems." *Applied Numerical Mathematics* 169 (2021): 87-107.
- [6] Makoto Mizuguchi, Mitsuhiro T. Nakao, Kouta Sekine, Shin'ichi Oishi: "Error Constants for the Semi-Discrete Galerkin Approximation of the Linear Heat Equation." *Journal of Scientific Computing* 89.2 (2021): 1-9.
- [7] Shin'ichi Oishi, Kouta Sekine: "Inclusion of periodic solutions for forced delay differential equation modeling El Nino." *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE 12.3 (2021): 575-610.

4.2 総説・著書

なし

4.3 招待講演

なし

4.4 受賞・表彰

なし

4.5 学会および社会的活動

ICIAM(世界応用数理国際会議)2023 組織委員長, 文部科学省 HPCI 推進委員会委員,
International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) :
Organizer

5. 研究活動の課題と展望

- 1) 今年度の研究により 1 次元エノン型方程式の多様な解の存在性を精度保証付き数値計算により確かめられた. このことから、多次元空間にするとより多様な分岐構造が生じると予測できるため、2 次元円盤領域でのエノン型方程式の非対称解に対する精度保証法の開発を行いたいと考えている. 例えば、ゼルニケ多項式やベッセル関数を利用する手法を想定している.
- 2) 非線形遅延微分方程式の非周期解の計算機援用証明法について今年度の成果をもとに確立していきたい.