

数理モデリングに有用な精度保証付き数値計算理論の発展

研究代表者 大石 進一
(基幹理工学部 応用数理学科 教授)

1. 研究課題

本プロジェクトの目的は、計算機による計算の信頼性を保証する精度保証付き数値計算の数学理論に基づく計算機援用解析手法によって、数理的なモデリングの信頼性や現象との整合性について検討できるような理論を構築し、モデリングに役立つ精度保証付き数値計算学を確立し発展させることである。具体的には次の目標を達成し、モデリングの信頼性を飛躍的に向上させることを目指す。

モデル方程式の信頼性を検討するための精度保証理論の構築

偏微分作用素の固有値問題の精度保証付き数値計算法を発展させ、これまで難しかった爆発解や3次元領域における Navier-Stokes 方程式などの厳密な解の検証を行う。

不確定要素問題に対する精度保証付き数値計算の高性能化

Affine Arithmetic のダミー変数の2次化、高次化を行い、不確定要素問題に対する精度保証法を高性能化する。また、高性能化された方法を精度保証付き数値計算ツールボックスに適用する。

超大規模問題の数値計算法に対する信頼性の保証

①で出現する超大規模な線形問題に対する精度保証付き数値計算法の開発が必要不可欠である。近年、荻田らにより大規模な固有値問題に対する高精度な固有値の数値計算手法が確立された。これを基にその信頼性を検証する理論を確立する。

2. 主な研究成果

2.1 エノン方程式の様々な領域上での解の挙動に関する研究

エノン方程式の様々な領域上での解の精度保証を行った。エノン方程式は、対称な領域上で対称解と非対称解をもつことが数学的に証明されていた。しかしその分岐の条件等は一部の限られた条件でしか証明できていなかった。本研究では線分領域上、正方領域、長方形領域、円領域等で検証を行ったところ、ある程度領域の対称性が解の対称性にかかわることが、解の精度保証をすることによって明らかにできた。

2.2 熱方程式の半離散近似の誤差評価の研究

線形熱方程式の解の $L^2(J;H^1)$ 評価と $L^2(J;L^2)$ 評価の誤差定数のシャープな評価法に関する研究を行った。上述の2つの評価は偏微分方程式の解の精度保証において微分作用素の可逆性とその厳密なノルム評価法を提案するために必要なものである。それらの誤差定数は楕円型微分方程式のリッツ作用素の誤差定数で評価されることがわかった。これにより既存の評価に比べ、厳密な誤差定数の値が算出できるようになり 精度保証付き数値計算法による解の検証可能範囲が拡大された。

2.3 非線形遅延微分方程式の様々な周期解の精度保証

エルニーニョを記述する非線形遅延微分方程式(強制項のある Action Delay Oscillator を提案)や遅延強制 Duffing 方程式の複雑なダイナミクスを主に様々な分数調波解の存在証明を精度保証付き数値計算に基づく計算機援用証明によって解析できることを示した。漸近的対角優位行列の理論をその過程で創始して、非線形微分方程式の解の精度保証付き数値計算に有用なことを示した。

3. 共同研究者

水口 信(早稲田大学 基幹理工学部 応用数理学科 講師(任期付き))

田中一成(早稲田大学 数理科学研究所 講師(任期付き))

4. 研究業績

4.1 学術論文

- [1] Kouta Sekine, Mitsuhiro T. Nakao, and Shin'ichi Oishi. "Numerical verification methods for a system of elliptic PDEs, and their software library." *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE 12.1: 41-74.
- [2] Yuta Matsushima, Kazuaki Tanaka, and Shin'ichi Oishi. "Numerical verification for positive solutions of Allen–Cahn equation using sub-and super-solution method." *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering* 7.1 (2020): 136-150.
- [3] Kouta Sekine, Mitsuhiro T. Nakao, and Shin'ichi Oishi. "A new formulation using the Schur complement for the numerical existence proof of solutions to elliptic problems: without direct estimation for an inverse of the linearized operator." *Numerische Mathematik* 146.4 (2020): 907-926.
- [4] Marko Lange, and Shin'ichi Oishi. "A note on Dekker's FastTwoSum algorithm." *Numerische Mathematik* (2020): 1-21.
- [5] Xuefeng Liu, Mitsuhiro T. Nakao, Chun'guang You, and Shin'ichi Oishi. "Explicit a posteriori and a priori error estimation for the finite element solution of Stokes equations." *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* (2021).
- [6] Shin'ichi Oishi and Kouta Sekine, "Inclusion of Periodic Solutions for Forced Delay Differential Equation Modeling El Niño" (to appear)

4.2 総説・著書

なし

4.3 招待講演

[1] Shin'ichi Oishi “Computer-assisted existence proof of various subharmonic solution in forced action oscillator modeling El Nino phenomena”, **IAS Conference on Industrial and Applied Mathematics (Jan 11 - 15, 2021)**

[2] Shin'ichi Oishi “Computer-assisted existence proof of complicated dynamics in forced action oscillator modeling El Nino phenomena”, CRM CAMP in Nonlinear Analysis, March 16, 2021.

4.4 受賞・表彰

令和 2 年度文化功労者, 文部科学省, (個人)

URL: https://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/2020/attach/1422025_00001.htm

4.5 学会および社会的活動

ICIAM(世界応用数理国際会議)2023 組織委員長, 文部科学省 HPCI 推進委員会委員

5. 研究活動の課題と展望

- 1) 藤田型方程式の解の爆発時間の厳密な評価法は数学において重要な課題のひとつとなっている. そこでこれまでの研究で構築した放物型方程式の解の存在検証法と新たに提案したエネルギー汎関数による評価法を融合することで藤田型方程式の爆発解の計算機を用いた存在検証法とその爆発時間の評価法を構築する.
- 2) 宇宙物理学において重要な方程式の一つであるエノン方程式は、その分岐に関して十分条件しか明らかにされておらず、数学的に未解決な問題である。同方程式の分岐点と周囲の精度保証付き数値計算法を確立することで分岐に関する未解決問題の解明を目指す。
- 3) 漸近的対角優位行列の理論を用いて、様々非線形遅延微分方程式のダイナミックスに現れる現象の存在証明を行う。