

国際資源循環に関する包括的研究	
題目	資源循環に不可欠の選別技術評価のための一手法の提案
著者	大和田秀二, 小川貴大

1. はじめに

物理選別・選鉱とは有価成分の濃縮を目的とする技術であり、銅製錬における浮選や選炭工程での比重選別などに代表される。こうした選別技術の仕組みは、①粒子の鉱物相組成、②粒子物性、③選別装置内の挙動、④選別結果の四段階で理解することができる。まず、フィード中の粒子には様々な鉱物相組成、鉱物相分布をもつものが存在する。そのような鉱物学的特徴によって粒子の物性が決まる。この物性の差によって選別装置内での粒子挙動の違いが生じ、回収対象とした有価成分を多く含む粒子を選択的に回収できる。この一連のプロセスが物理選別の基本的な流れである。

従来の物理選別の評価手法というのは、選別結果のみに着目したもの、もしくは物性値と選別結果の関係に着目したもののいずれかである¹⁾。ここで、前者は分離効率などの選別方法や装置に依らず選別結果から算出可能なものを、後者は選炭における Tromp 曲線のような物性値に対応した配分率曲線を指している。その一方、近年の MLA (Mineral Liberation Analyzer) の普及に伴い、粒子の鉱物学的特徴が容易に測定可能になった。そこで、物理選別挙動の起点であるフィード中の粒子の鉱物相組成と選別結果の関係に着目し、その関係性に基づいた選別結果の推定方法の開発を行った。

本研究では粒子の鉱物相組成を簡潔に表現するために、回収対象の鉱物相の部分比を用いた。ここで、部分比とは1つの粒子中である着目鉱物相が占める割合のことである。また、ある部分比を有した粒子が、物理選別である産物に回収される確率を回収確率と定義し、フィードの部分比分布と回収確率から選別結果を計算する方法を開発した。また、部分比分布と回収確率を扱う場合にベータ分布やシグモイド関数を利用することの有効性についてまとめた。

2. 部分比に着目した選別結果推定法

本研究では、粒子の部分比に着目して選別結果を計算する方法の検討を行った。部分比とは、1つの粒子中である鉱物相が占める割合(主に重量割合)のことである。ある選別において回収対象としている鉱物相1つに焦点をあて、その鉱物相の部分比と選別結果の関係について次の式に基づき議論した。

$$f(x) \times r(x) = c(x) \quad (1)$$

式(1)において、フィード中の部分比 x である粒子の重量割合： $f(x)$ 、部分比 x である粒子の回収確率： $r(x)$ 、フィードに対する回収産物中の部分比 x である粒子の重量割合： $c(x)$ とした。ここで、回収

確率とはある部分比をもつ粒子がある選別産物へ回収される確率を示した値であり、部分比あたりの回収率に相当する。式(1)では $f(x)$ がフィード特性を、 $r(x)$ が選別装置の特性を、 $c(x)$ が選別結果を表現しており、 $f(x)$ と $r(x)$ が既知であれば、この式を用いて選別結果 $c(x)$ が計算可能である。

以上のように定義した $f(x)$ と $c(x)$ を用いて歩留り、品位を計算する方法について述べる。まず、 $f(x)$ はその定義から $x=0\sim 1$ までの総和を考えると、次式が成り立つ。

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \quad (2)$$

同様に $c(x)$ に対する総和も考えると、それはフィードに対する回収産物の全量の割合、すなわち歩留り Y である。

$$\int_0^1 c(x) dx = Y \quad (3)$$

また、部分比 x である粒子中に含まれる回収対象鉱物相(以下、A相と呼称)の量は、 $x f(x)$ と表せる。したがって、フィード中のA相品位 f_A は次式で表現できる。

$$\int_0^1 x f(x) dx = f_A \quad (4)$$

同様に回収産物中のA相品位 c_A を考えると、それぞれの定義より次式が成り立つ。

$$\int_0^1 x c(x) dx = c_A Y \quad (5)$$

以上の式(3)、(4)、(5)を用いることでフィード及び回収産物の品位と歩留りが計算でき、またそれらの値を用いることで回収率や分離効率も算出できる。このようにフィード中の部分比 x である粒子の重量割合： $f(x)$ と部分比 x である粒子の回収確率： $r(x)$ から選別結果を求めることが可能である。部分比ごとの回収確率が選別装置や運転条件によって決まる特性であると仮定すれば、 $r(x)$ は試料ごとに随時測定する必要はない。したがって、回収確率： $r(x)$ が既知の選別装置を用意し、それを使用する場合には、フィード特性である $f(x)$ のみを測定することで、選別結果の推定が行える。

3. ベータ分布を用いた粒子部分比分布の表現

前章でフィード中の部分比 x である粒子の重量割合： $f(x)$ と部分比 x である粒子の回収確率： $r(x)$ から選別結果を計算可能であることを述べた。本章では、フィード特性を表す $f(x)$ について扱う。 $f(x)$ は部分比ごとの粒子量の分布を示したものであるが、一般に部

分比分布といった場合には粒子中のある成分の部分比とその成分の分配率の関係を示すことが多い。そのため、それと区別するために $f(x)$ を粒子部分比分布と呼称する。

粒子部分比分布を用いて計算を行うにあたって、実験値を少ない定数で表現できる近似式が存在すると扱いやすい。粒子部分比分布の近似では、確率密度関数が次式となるベータ分布を適用した例がある²⁾。

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt} \quad (6)$$

式(6)において、 α, β はともに正の実数を満たす定数である。ベータ分布の平均： μ と分散： V はそれぞれ以下の式で表せる。

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (7)$$

$$V = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (8)$$

このように平均と分散が α, β のみで表せることから、実験で得た粒子部分比分布の平均、分散と一致するような α, β を式(7), (8)から逆算して求めることにより、粒子部分比分布を近似したベータ分布を算出することができる。

ここで、このベータ分布を用いて粒子部分比分布を近似する場合には、部分比 0, 1 の値は除いて適用することが多い。すなわち、着目している鉱物相を全く含まない粒子及びその相のみで構成された単体粒子を無視して、近似が行われる。こうした操作は、式(6)では $x = 0, 1$ のときには定数 α, β の値に依らず $f(x) = 0$ になってしまうことを考慮して行われたものだと考えられる。その一方で、部分比 $x = 0, 1$ の値を含めてベータ分布で近似することで、粒子部分比分布のもつより多くの情報を近似式に反映できることが判明した。以下では、その詳細について述べる。

まず、ある粒子部分比分布をもつ試料中の着目鉱物相の品位は式(4)で求めると先に述べた。ここでその粒子部分比分布を式(6)で示したベータ分布を用いて表現した場合、品位はより簡単な式で表すことができる。式(6)を式(4)に代入して計算すると、次式が成り立つ。

$$f_A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (9)$$

このようにある試料の粒子部分比分布をベータ分布で表現した場合、ベータ分布の 2 つの定数 α, β のみで試料中の着目鉱物相の品位を表すことができる。

また、 α, β は試料の単体分離状態を示した定数でもある。図 1 に α, β を変化させたときの積算ベータ分布の様子を示した。ただし、 α は 0.2 と 2.0 で変化させたのに対して、 β は式(7)で示した品位 f_A が 0.3, 0.6 となるような値とした。

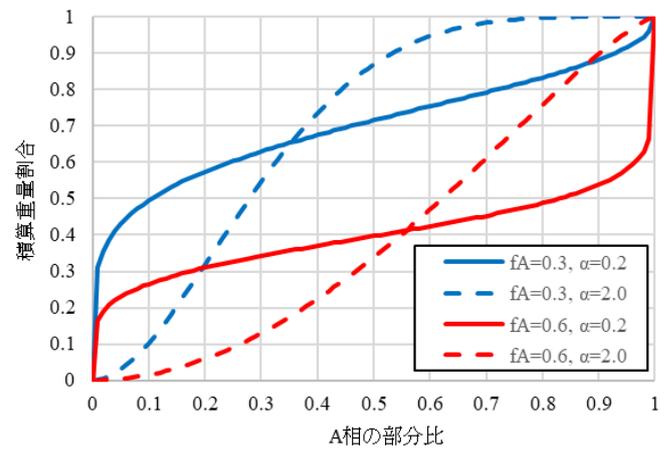


図 1 α, β の値を変化させたときのベータ分布の様子

このグラフを見ると、品位が等しい場合には α の値が小さいほど、部分比が 0 もしくは 1 付近の粒子割合が増加していることが分かる。これはすなわち、 α の値の減少が試料の単体分離の進行に対応していることを示している。このグラフでは α と品位 f_A を変化させたが、 β と品位を変化させた場合には、 β は α と同様の傾向を示す。このように、 α, β はその値の大小で試料の単体分離状態を表す定数と見ることができる。以上のように粒子部分比分布を部分比 $x = 0, 1$ の値を含めてベータ分布で近似することで、試料の品位と単体分離状態を示した 2 つの定数 α, β で粒子部分比分布を表現できる。

4. シグモイド関数を用いた回収確率曲線の表現

本章では、回収確率の扱いについて述べる。フィードの特性である粒子部分比分布と対になる選別装置の特性を表現するために、ある部分比をもつ粒子がある産物へ回収される確率を示す値として回収確率という概念を新たに導入した。そこで、部分比 $x=0 \sim 1$ の粒子に対応した回収確率を 1 つの曲線で表現したものを回収確率曲線と定義する。回収確率はある部分比を有する 1 つの粒子に着目した場合にその粒子が選別装置を通過してある産物に回収される確率としたが、その確率はある部分比を有する粒子が十分な個数存在した場合のある選別産物への回収率に等しい。したがって、回収確率曲線は部分比に着目した部分分離効率曲線（もしくは、配分率曲線）と見ることができる。ただし、部分分離効率曲線は比重などの物性値ごとの回収率を示すものとして用いられており、本研究では鉱物相組成を代表する部分比と粒子の物性との区別を明確にしたいという意図から、それとは異なるものとして“回収確率曲線”という語を用いている。

回収確率曲線を扱うときに、その関数形が定まっていると扱いやすい。そこで、回収確率曲線の関数形の一例としてシグモイド関数を基準とした次式を提案したい。

$$r(x) = \frac{1}{1 + \exp\{-a(x - b)\}} \quad (10)$$

この式において、 a は正の実数、 b は実数の定数である。定数 a 、 b を変化させたときの式(10)で表した回収確率曲線を図 2 に示す。

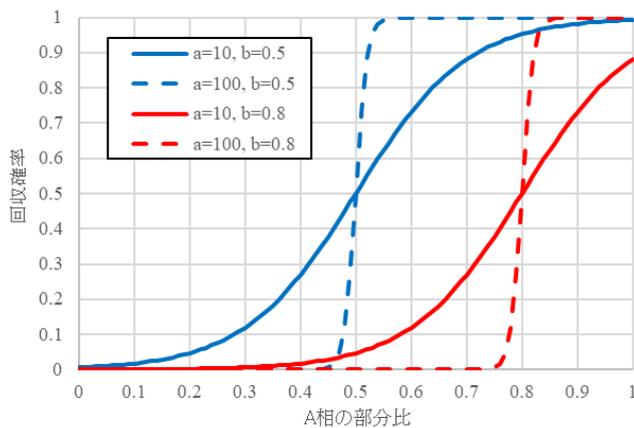


図 2 a 、 b を変化させたときの回収確率曲線

式(10)で規定した曲線は単調増加性を有しており、回収したい鉱物相である A 相の部分比が大きくなると回収率が大きくなり、回収されやすい傾向を、また A 相の部分比が小さい粒子ほど回収率が小さく回収されにくい傾向を示すことができる。

さらに、回収確率曲線の形状を決める定数 a 、 b は、それぞれが物理選別の特徴を示す値としての意味をもつ。まず、定数 a にのみ着目すると、 a の値が大きくなるほど曲線の勾配が急になる。これを物理選別的に解釈すると、ある部分比を境にした理想分離に近い選別になったと見ることができる。このように、定数 a は選別装置の理想分離の達成度を示す指標になっている。続いて、定数 b にのみ着目すると、回収率が 0.5 となる部分比が b になっていることが分かる。このことから、定数 b は選別装置が A 相の濃縮物として回収する粒子の部分比の基準を示す指標と言える。このような特徴をもつことから、定数 a を理想分離度、定数 b を回収基準部分比と命名した。これら理想分離度と回収基準部分比を用いることで、選別装置の評価が行える。

また、式(10)で回収確率曲線を規定した場合、実験値からの曲線近似が容易である。式(10)に簡単な変形を施すと、式(11)のようになる。

$$\ln\left(\frac{1-r(x)}{r(x)}\right) = -a(x-b) \quad (11)$$

そのため、実際の選別結果で得られた部分比 x と回収確率 $r(x)$ (部分比ごとの回収率) の関係から直線近似が行え、理想分離度と回収基準部分比の算出ができる。その値を式(10)に代入して、近似によって求めた回収確率曲線が得られる。

以上のように、回収確率曲線の関数形をシグモイド関数で規定

することには、物理選別を特徴づける理想分離度 a と回収基準部分比 b という 2 つの定数のみで回収確率曲線を表現可能であったり、またそれらの値の算出が比較的容易に行えたりといった利点がある。回収確率曲線は選別結果から各部分比の粒子量の影響を除いたものであるから、選別装置自体の特性を強く反映している。その選別装置の特性を物理選別上の意味を有する定数で表現できることが、この方法の優れた点である。

5. まとめ

本研究では、粒子の鉱物学的特徴を代表する値として部分比に着目して選別結果を推定する方法の検討を行った。フィード特性を表すものとして粒子部分比分布を、選別装置の特性を表すものとして回収確率曲線を定義し、それらから選別結果を計算する方法を導いた。また、粒子部分比分布と回収確率曲線を表現可能な関数形の例を示した。粒子部分比分布に関しては、従来から用いられるベータ分布の新たな適用法を提案し、試料の品位と単体分離状態を定数に反映できる点が優れていることを述べた。また回収確率曲線に関しては、シグモイド関数を基準とした関数形で規定することで、選別装置特性を理想分離度と回収基準部分比といった 2 つの定数で表せることを示した。ただし、実際の回収確率曲線は部分比以外のフィード特性の影響を受けており、粒子部分比分布と回収確率曲線ではフィード特性と選別装置特性の明確な区分が行えていないといった課題がある。

6. 引用文献

- 1) 選鉱成績評価研究委員会: Journal of MMIJ, 89(1973), 483-485.
- 2) T. Shoji: Geoinformatics, 28(2017), 82-85.