2020 年 9 月進入 数学応用数理専攻 少林 文孝

I. 論文

なし

II. 研究発表

・Removability of time-dependent singularities in the Stokes equations, 日本数学会 2021 年度年会, 慶応義塾大学(オンライン), 2021 年 3 月

・Removability of time-dependent singularities of the Navier-Stokes equations, 日本数学会 2021 年度秋季総合分科会, 千葉大学(オンライン), 2021 年 9 月

III. 2020 年度の研究概要

Stokes 方程式について得られていた動的特異点の除去可能性について，有界領域 $\Omega \times (0,T)$における Navier-Stokes 方程式へ拡張した。具体的には，時間に関してα-Holder 連続($0 < \alpha \leq 1/2$)である動的特異点を除いた領域における Navier-Stokes 方程式の解uに対してその特異性が$|x|^{-1}$と$|x|^{1/\alpha - N}$よりも小さければその特異点は除去可能，即ち，特異点以外ではuに一致し，全体領域 $\Omega \times (0,T)$で滑らかな Navier-Stokes 方程式の解が存在することを示した。この問題を他の方程式へ適用しようと，3 次元放物-楕円型 Keller-Segel 方程式について考えたがスケール不変な空間$L^{3/2,\infty}$に属するように解の特異性を仮定したとき，試験関数の勾配が評価できず弱解を定義することが困難なため応用することが出来なかった。

また、Navier-Stokes 方程式において実際に動的特異点を持つ解についても考察した。1 つ目として Karch-Zheng が構成した解についてその滑らかさを更に保証することである。先の問題を取り組む際に用いた特異点近傍における解uを移流項の係数にもつ Stokes 方程式を考えて，滑らかな解と一致させる手法が適用できるかと思われたが，得られる方程式において境界条件のクラスが悪いため上手く行かなかった。2 つ目として動的特異点を持つ外力を与えて解を構成する方法である。ベゾフ空間の枠組みで解の存在定理を用いることで，2 次元では動的デルタ関数、3 次元では動的球面上に台を持つ 1 重層ポテンシャルを外力に与えて特異解を構成した。

IV. 2021 年度の研究目標

1 つ目の目標は，Navier-Stokes 方程式における Karch-Zheng の結果を改良することである。彼らは，$N = 3$で動的特異点の滑らかさがα-Holder 連続$(3/4 < \alpha)$でのとき特異点以外で滑らかな特異解，α-Holder 連続$(1/2 < \alpha \leq 3/4)$のとき特異点以外で有界な特異解(弱解)を構成した。$N = 3$，$\alpha = 1/2$で特異性が$o(|x|^{-1})$のとき動的特異点が除去可能であると先の結果で分かっているため$1/2 < \alpha$で特異点以外では滑らかな解が構成できるのではないかというのは自然な発想の様に思われる。また，$N \geq 4$の場合も特異解を構成出来ないか考察したい。彼らは 3 次元定常 Navier-Stokes 方程式の特異解(Landau 解)を用いて解を評価しているため，より高次元では別の手法が必要となるだろう。

2 つ目の目標は，高次元の動的特異集合を持つ解の構成と動的特異集合の除去可能性の証明である。動的特異集合をもつ外力を与えてベゾフ空間における解の存在定理を用いる方法はシンプルに解を構成出来るが,その反面解の特異集合における漸近挙動を調べられず精密性に欠ける。よって,特異解の精密な評価を得るためには Karch-Zheng のように解の構造に注目する必要があるだろう。熱方程式において Htoo-Takahashi-Yanagida や Takahashi-Yamamoto により動的特異集合としてm次元部分多様体で議論されており,それらも解決の糸口になるのではと思われる。