早稲田大学　数物系科学拠点　数物系科学コース年次報告書　　（2021 年 4 月～2022 年 3 月）

2020 年 4 月進入　　数学応用数理専攻　　井上 順平

I.　論文

なし.

II. 研究発表

1. 井上順平,「拡散の種類を変えての拡散ロジスティック方程式における最適棲息分布の考察」, 第 42 回発展方程式若手セミナー, 8 月 30 日, オンライン開催.

III. 2021 年度の研究概要

拡散ロジスティック方程式の定常問題における最適棲息分布問題に取り組んだ. 方程式は $d\Delta u+u(m(x)-u)=0$ の楕円型でノイマン境界条件を課す. この方程式に対して,「拡散係数 d とエサ関数 m(x)をさまざまに変化させて, 解の積分量とエサ関数の積分量の比の上限を求める」という問題を考察した. 生物モデルの見地では,「限られたエサの下での個体数の最大化問題」と捉えられる. 本問題は 2012 年頃に Wei-Ming Ni 氏により提起され, さらに空間 1 次元ではその上限は 3 で, 高次元でも上限は有限であるという予想を提示した（Ni 予想）. 実際に, 1 次元においては Bai-He-Li (Proc. AMS, 2015)が上限は 3 であることを証明した.

報告者は, 2020 年度までの研究において, 高次元では Ni 予想は成り立たず, 比の上限が無限大になることを示している (DCDS-B, 2021). ここでどの次元においても, 上限に至るエサ関数 m(x)の近似列として, デルタ関数の近似列を選んでいる. 2 次元以上では拡散係数 d を上手く選ぶことで解の最大値をエサ関数の最大値と同程度の大きさにすることができ, 比の上限を発散させることができた. これは, 反応項が u についての 2 次式であり, その最大値ではおおよそデルタ近似列 m(x)の自乗をとっているため, 解がエサ関数に比べて非常に大きくなるという解釈ができる.

そこで報告者は 2021 年度において, 生物モデルの見地も加味した拡散ロジスティック方程式の自然な修正の一つとして, $d\Delta u+h(u)(m(x)-u)=0$ の形を提案した. 但し h(u)は $K>0$ を定数として $h(u)=u(u<K)$; $=K(u>K)$とした. この修正により解の値が大きいところでは反応項が u について 1 次式となり, 積分量の比が有界になることが期待される. より詳しい設定としては, 2 次元の円板領域上で考え, エサ関数 m(x)としては原点にピークが来るデルタ近似列を選ぶ. このとき, 拡散係数 d とデルタ近似関数列の台の半径εと正定数 K, 領域の半径 R をパラメータとして, 修正された拡散ロジスティック方程式の球対称解の積分量を考察した. エサ関数の台は非常に狭いので, 一見すると本方程式の球対称解は $d\Delta u-u^2=0$ の特殊解 $4d/r^2$ に近いと錯覚するが, 最近, 力学系による解析で実はその特殊解の近くには本方程式の解がないことが分かった. 方程式の修正前は, 解がこの特殊解に近いところにあって可積分ではなくなっていたが, 修正後は可積分になることがこの考察からもやはり期待される. この相違点が本問題の難しさ兼魅力の一つであり, 現在も継続して取り組んでいる.

IV. 2022 年度の研究目標

来年度も, 上述の修正した拡散ロジスティック方程式に対する最適棲息分布問題に取り組む予定である. 海外渡航に関する予定としては, 反応拡散分野において一線の研究者である西北工業大学(Northwestern Polytechnical Univ.), 白学利(Xueli Bai)先生と連絡をとっており, コロナ等の状況次第では現地を訪問して学びたいと考えている.