

# 解説：フラクタルによるニューラルネットワーク構造

早稲田大学情報生産システム研究センター

鎌田 清一郎

フラクタル(fractal)は自己相似性を有する一種の画像変換と捉えることができる。画像変換は、基本的にカーネルと呼ばれる単純な曲線(曲面)、あるいは滑らかな曲線(曲面)の線形和により画像を近似する。しかし、実世界から得られる画像は一般に複雑である。ある意味、実世界の複雑な形状をした対象を、近似する道具としてフラクタルがあるととらえ、マンデルブロ(B. Mandelbrot)は、フラクタルという概念を導入し、単純な操作から複雑な形状の図形が得られることを示した。これまでの画像表現と大きく異なる点は、フラクタルによって表現された画像は無限の解像度をもつ、ということである。フラクタルの概念には、大きく分けて非整数次元となるフラクタル次元、縮小写像による反復関数系フラクタル、マンデルブロによる複素フラクタル、カオスにおけるフラクタル、などがある。本解説では、自己相似集合、フラクタル次元、そして反復関数系フラクタルについて、また、深層学習において用いられる基本的な概念についていくつかを概説する。

## ■1 フラクタルの概要

フラクタルは、名詞 fraction(断片、部分、分数など)にあたるラテン語の形容詞 fractus の造語である。その動詞 frangere(壊れるなど)は、不規則断片ができるという意味である。マンデルブロは、1980年著書 Fractals の改訂版 The Fractal Geometry of Nature [1] を出版し、マンデルブロ集合と呼ばれる自己相似集合の存在を示した。マンデルブロ集合とは、2次元複素平面上での複素系列  $\{Z_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  の簡単な反復式

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (C \text{ は複素定数})$$

において、 $n \rightarrow \infty$  の場合に  $\{Z_n\}$  が発散しないようなパラメータ  $C$  の領域集合である。マンデルブロ集合の発表後、パターン認識への応用分野では、1984年ペントランド(A. Pentland) [2] がフラクタル次元をテクスチャ解析の特徴量に応用し、また、画像圧縮への応用分野では、バーンズリ(M. Barnsley) [3] が1980年後半に蓄積型の圧縮方法として提案し話題となった。以下では、フラクタルにおいて重要な基礎的概念である縮小写像による自己相似集合、縮小写像による反復関数系フラクタルについて紹介する。

## ■2 自己相似集合

本節では、フラクタルにおいて数学的に重要な基礎的概念である縮小写像と自己相似集合について説明する。

## 2.1 縮小写像

平面上の2つの集合を  $X, Y$  とすると、平面上の2点  $\mathbf{x}_1 \in X, \mathbf{x}_2 \in X$  に対して、

$$d(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)) \leq s \cdot d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

を満たす  $s$  が存在するとき、写像  $f: X \rightarrow Y$  を縮小写像という。ここで、 $s$  は写像  $f$  の縮小率と呼ばれ、 $d$  は、距離 (distance) を表す。ユークリッド距離以外にも様々な距離が考えられる。縮小写像の連続性は明らかに成り立つが、証明は、他の文献を参照されたい。

## 2.2 自己相似集合

フラクタルにおいて重要な自己相似集合とは、集合  $A$  と縮小写像  $F_1, F_2, \dots, F_N: A \rightarrow A$  が与えられ、

$$A = \bigcup_{n=1}^N F_n(A)$$

を満たす集合  $A$  のことである。例えば、カントール集合は、初期集合  $A_0 = [0, 1]$  から始め、 $A_n$  全体を、

3等分割し、両端の2区間に縮小写像することで得られる。ここで、左の区間への縮小写像を  $F_1$ 、右の

区間への縮小写像を  $F_2$  とする。まず、 $\forall x \in A_0$  に対して、 $F_1(x) = \frac{1}{3}x$ 、 $F_2(x) = \frac{1}{3}(x+2)$  を適用すると、

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \dots$$

さらに、無限回適用すると、 $A_\infty = F_1(A_\infty) \cup F_2(A_\infty)$  が成り立つ。コッホ曲線も図1のような自己相似集合となる。

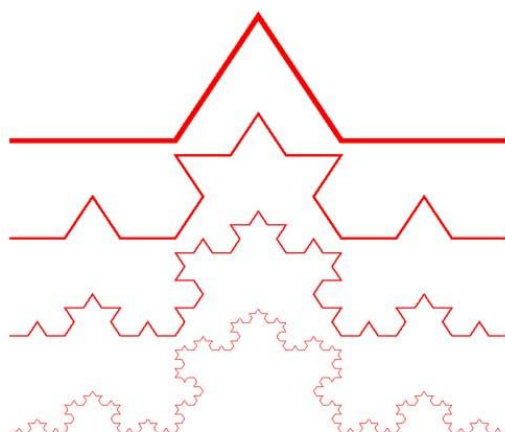


図1 コッホ曲線

## ■3 反復関数系

縮小写像は、アフィン写像を利用して  $F_n(\mathbf{x}) = s_n R_n \mathbf{x} + p_n$  とする。これは、保長の性質を満たす。

初期集合  $A_0$  に対して、

$$A_{k+1} \equiv \mathbf{F}(A_k) = \bigcup_{n=1}^N F_n(A_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

を適用すると、 $\mathbf{F}(A) = A$  となる唯一の極限集合（自己相似集合）が存在する。いわゆるアトラクタ (attractor) と呼ばれる集合である。

バーンズリによる反復関数系 (iterated function system, IFS) では、縮小写像  $F_1, F_2, \dots, F_N : A \rightarrow A$

とその起こり得る確率  $p_1, p_2, \dots, p_N$  をペアにして考え、平面上の初期集合  $A_0$  から繰り返し適用すると、様々な画像が得られる。バーンズリは、反復関数系の概念を、ユークリッド空間から拡張したハウスドルフ空間上で議論しているが、以下では、2次元ユークリッド空間上での概説に留める。なお、数学的な証明についても省略しているので、彼の著書を参照されたい。

例えば、4つの縮小写像によるアトラクタの生成は 初期集合  $A_0 = [0, 1]^2$  からスタートし、

$$A_{k+1} \equiv \mathbf{F}(A_k) = \bigcup_{n=1}^4 F_n(A_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

より得られる。これを無限回繰り返せば、4つの縮小写像によるアトラクタが得られる。これは、見方を変えれば、「ある画像  $B$  が4つの縮小写像によるアトラクタと同じであれば、この画像は、4つの縮小写像のパラメータによって表現されている」と見ることができる。これがフラクタルによる画像表現の考え方である。したがって、縮小写像の連続性によりこの画像は無限の解像度をもつことがわかる。ここで問題となるのが、与えられた画像集合に近いアトラクタをもつ反復関数系をいかに構成するかである。これは、コラージュ定理によって解決可能であるが、ここでは省略するので、バーンズリの著書を参照されたい [3]。

#### ■4 自己相似性を有するネットワーク構造：新たなモデル FractalNEXT [4]

自己相似性を有するフラクタル構造をニューラルネットワークに応用した研究がある。画像認識分野で用いられるニューラルネットワークの従来モデルの1つであるFractalNetが、2017年トップ国際会議ICLR (International Conference on Learning Representations) において、論文題目FractalNet: Ultra-Deep Neural Networks Without Residualsとして発表された。これは、ResNetのような残差接続を使わずに超多層ネットワークを構成する観点で優位性を有している。しかし、当該モデルを実装すると、画像をトークン化する際に空間情報が失われてしまうこと、残差接続なしでは周波数情報を十分保持できないことなどより、ResNetより劣る認識性能を示すことが確認されている。FractalNetは残差ブロックを回避する上で有効なアイデアであるが、より高精度の認識性能を実現するためには、どのようなフラクタルブロッ

クを構成すればよいか、すなわち、自己相似性を特徴とするフラクタルブロックの新たな設計が求められている。

従来モデル FractalNet は、周波数上の情報伝達の安定性を維持する上で、残差接続の限界による認識性能劣化の問題を見落としている。この問題に対処するため、各パッチ内の空間情報を保持しつつウェーブレット・パッチトークンを抽出する手法である Multiple Wavelet Patch Partition (MWPP) を検討した。また、残差接続を補強するために周波数情報を意識した Selective Wavelet Connection (SWC) を導入し、それによって周波数上の情報伝達の安定性を高め、トークンミキサーによって生じる情報損失を補い、MWPP と SWC を基盤として、畳み込みとセルフアテンションの両方をトークンミキサーとして統合した、スケーラブルなフラクタルアーキテクチャ FractalNEXT を新たに設計した。これは、任意のテンソル  $\mathbf{x}$  に対して、初期写像関数  $F_1(\mathbf{x}) = (\text{Mix} \circ \text{Mix})(\mathbf{x}) + \text{SWC}(\mathbf{x})$  から、次の反復式によってフラクタルブロックを構成するものである。

$$F_{n+1}(\mathbf{x}) = (F_n \circ F_n)(\mathbf{x}) + \text{SWC}(\mathbf{x}), \quad n=1,2,3,\dots$$

ただし、ウェーブレット変換に関するモジュールに関しては、稿を改めて解説する。

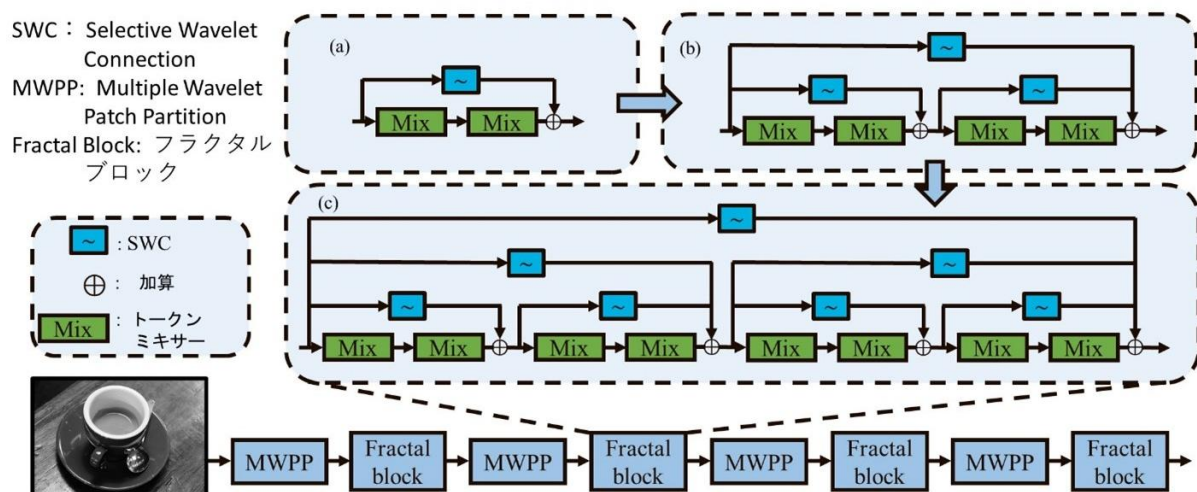


図2 FractalNEXT の概要

## 参考文献

- [1] B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1982.
- [2] A. Pentland, Fractal-Based Description of Natural Scenes, IEEE Trans. PAMI, vol.PAMI-15, pp.850-863,1993.
- [3] N,F, Barnsley, Fractal everywhere, Academic Press, 1988.
- [4] P. Lu, S. Kamata, M. Zhang, FracNeXt: Enhancing visual representation learning in sequence models with fractal wavelets, Neural Networks, June 2026.