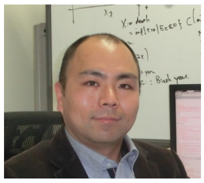
清水泰隆 研究室（確率過程と統計解析）

確率微分方程式と統計的推測理論
— 確率モデルで金融・保険の将来を予測する

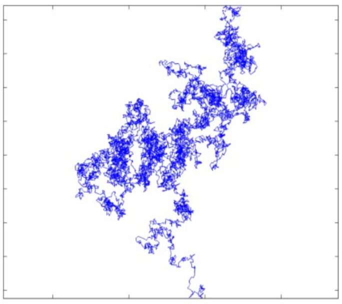


確率過程による将来予測

時刻 t におけるある株価を S_t と書くことにすれば，S_t の値は t が進むにつれて刻々と “ランダム”に動きます．このようなランダムな数列 $S = (S_t)_{t \geq 0}$ を**確率過程**といいます．この株価の動きは自然現象を使ってモデリングされ，**統計学**を使ってモデルを特定すれば将来予測が可能になります．

代表的な確率過程：ブラウン運動

植物学者 **R. ブラウン**が，花粉中の微粒子が水面上で水分子との衝突によっておこる不規則運動 (**ブラウン運動**) を発見．



A. アインシュタインによる定式化: 時刻 t，位置 x に微粒子が存在する “確率密度”$p(t,x)$:

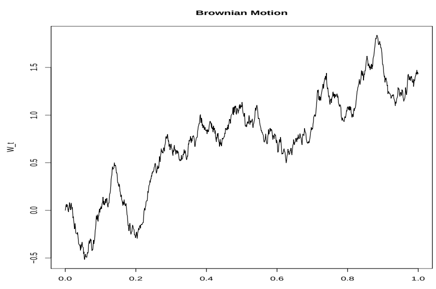
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad p(0,x) = \xi(x)$$

$$\Rightarrow \ p(t,x) = \int_R \xi(y)\phi(\kappa t, x, y)\,dy$$

ここに，有名な**正規 (ガウス) 分布** $\phi(t,x,y)$ が現れます:

$$\phi(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}} \ \Rightarrow \ \mathcal{N}(x,t) \qquad (1)$$

射影すると… **1 次元ブラウン運動:** $B = (B_t)_{t \geq 0}$



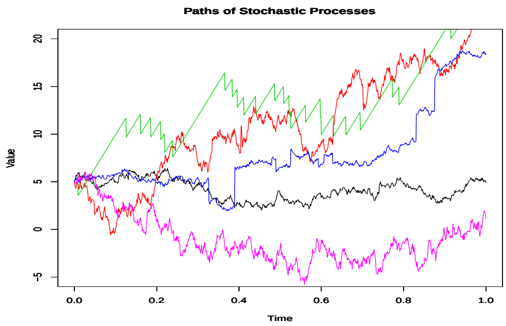
(**確率表現**) $B_t \sim \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad Z_k \sim \mathcal{N}(0,t)$

確率微分方程式による資産価格モデル

ブラウン運動 B を用いた株価モデルがこちら:

$$S_t = x + \int_0^t \mu(S_u, \theta_1)\,du + \int_0^t \sigma(S_u, \theta_2)\,dB_u \qquad (2)$$

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ はパラメータ．パラメータ θ の値や関数 μ, σ の形によって様々なパスが表現できます．



統計的推測理論：データによるパラメータ推定

株価データ $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}$ から**未知パラメータ** θ を**推定**できれば，モデル (2) から将来の株価が予測できます．

擬似尤度解析による推定：

$$\widehat{\theta}_n = \arg\max_{\theta} \sum_{k=1}^{n} \log \phi\Big(\Delta\sigma_{k-1}^2(\theta_2), \Delta_k^n S, \mu_{k-1}(\theta_1)\Delta\Big)$$

ここに，ϕ は (1) で用いた正規分布の確率密度関数．

データ数を増やすと…

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = \theta$$

保険会社の破産リスク

保険会社の資産モデルにもブラウン運動 B が使われます:

$$S_t = x + ct + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

$c > 0$ は保険料率，U_i は i 番目の保険金支払い額，N_t は時刻 t までの支払い回数とすると，保険会社が破産する確率は

$$P\Big(\inf_{t>0} S_t < 0\Big) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda m'(\gamma) - c + \gamma\sigma^2} e^{-\gamma x}, \quad (x \to \infty)$$

と漸近的に求めることができます．ただし，m は U_i の積率母関数で，γ は $\log E[e^{\gamma(x - S_t)}] = 0$ を満たす定数．