

大石進一研究室(数値解析研究)



計算機によって数学の証明を行う精度保証付き数値計算学の確立を目指して

早稲田大学基幹理工学部

応用数理学科

<http://www.oishi.info.waseda.ac.jp/oishi/index-j.html>



フォンノイマンの夢を目指して

コンピュータプログラミングを考え出したフォンノイマン。彼は暗算の天才でした。数学者が一晩かけて計算するものを、一分で暗算できたといわれています。しかし、天気予報を行うために解く必要のある方程式 (Navier-Stokes 方程式と呼ばれます) は暗算では到底解けないことを悟りました。そのために、自分より速く計算できる機械を創りました。それがコンピュータでした。コンピュータで Navier-Stokes 方程式を数学的に厳密に解きたい。そのために連立一次方程式がコンピュータで厳密に解けるかを考え、論文にしました。今から 60 年前のことです。その論文では、しかし、それは大変難しいことというのが結論でした。

私たちの夢は、これが簡単に解け、しかも Navier-Stokes 方程式がコンピュータで厳密に解けることを示すことです。すなわち、フォンノイマンの夢を追求することです。

最近になって、それが夢ではないことがわかってきました。

精度保証付き数値計算

コンピュータの中では数 (実数) は正確には表現できません。例えば、円周率 π は高速演算するときには 16 桁しか保持できません。すなわち、浮動小数点数と呼ばれる形式で数はコンピュータの中で保持されます。そして、足し算、掛け算、割り算はそれぞれ四捨五入のような打ち切り演算で計算されます。

これを天気予報をするために何億回も計算したとしたら、その誤差はわかるのでしょうか。

実は、それが実に簡単に高速にできるようになったのです。精度保証付き数値計算の理論です。大石研はその単純化、高速化、高精度化に大きく貢献しています。

足し算を正確に計算する

a と b を浮動小数点数とします。これをコンピュータで

$$x = a + b$$

と計算すると、丸め誤差が生じて、数学的に正しい $a + b$ になりません。ところが、このような丸めの生じる浮動小数点計算でも

$$b_v = x - a$$

$$a_v = x - b_v$$

$$b_R = b - b_v$$

$$a_R = a - a_v$$

$$e = a_R + b_R \quad (1)$$

とすると、 $x + e = a + b$ が厳密に成り立つのです。これはコンピュータで足し算が厳密にできることを示しています。同様に、掛け算も厳密にできます。これを使うと、色々な計算がコンピュータで高速に、必要な精度で計算できることが示せます。

PC クラスタ

以上のようなことを組み合わせると、難しい問題を数学的に解くことができます。天気予報の方程式も簡単な場合にはコンピュータで数学的に厳密に解くことができ始めました。次の図は、そのときに使う PC クラスタと呼ばれる並列計算機です。



PC-クラスタ

写真でわかるようにデスクトップより少し大きい箱の中に 96 台の PC が入っています。したがって、写真のシステムでは 192 台の PC が並列計算機を構成しています。

高校生の皆さんへ

フォンノイマンの夢へ向けて大石研は大きく前進しました。しかし、その夢の次にはまた夢と果てしありません。その夢の実現を皆さんに託したいと思います。

References

- [1] T. Ogita, S.M. Rump, and S. Oishi. Accurate Sum and Dot Product. *SIAM Journal on Scientific Computing (SISC)*, 26(6):pp.1955-1988, 2005