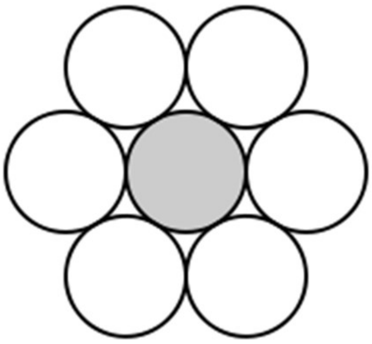
三枝崎剛研究室（離散数学・代数的組合せ論）

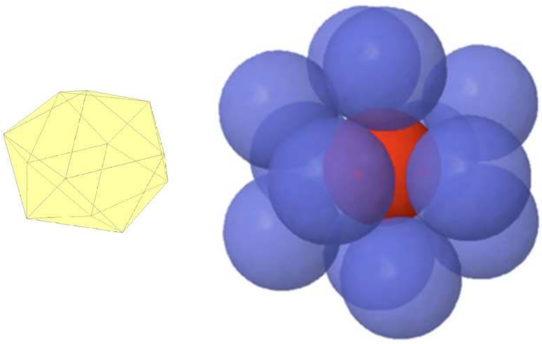
高次元図形の美しさ
－符号・暗号理論への応用－

円の回りに，同じ大きさの円を重ならずいくつ配置可能か？([1]参照)



球の回りに球を重ならずいくつ配置可能か？ ([1,2]参照)

正 20 面体の頂点に 12 個



高次元ではどうか？($k(n)$ = 個数)

n 次元の単位球上の 2 点 $\vec{a},\vec{b}$ 上に，重ならないように同じ単位球を配置可能

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の角が 60 度以上

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq \frac{1}{2}$

4 次元では？([3]参照)

次の 24 点は内積 $\frac{1}{2}$ 以下

$(\pm 1,0,0,0)$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.

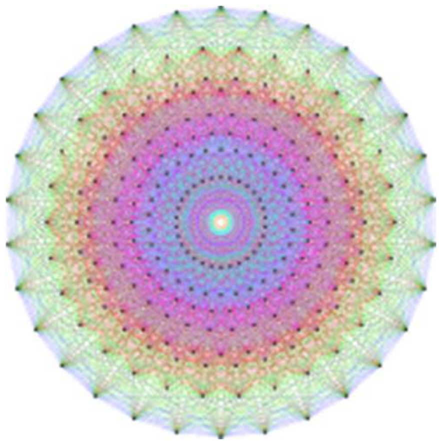
8 次元では？([4]参照)

次の 240 点は内積 $\frac{1}{2}$ 以下

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1,0,0,0,0,0,0)$,

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.

ただし下のベクトルの + は偶数個.



判明している $k(n)$ の値 ([1]参照)

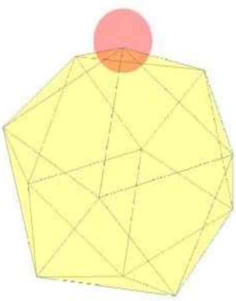
次元	$k(n)$ の値
1	2
2	6
3	12
4	24 (2003年)
5	40~44
6	72~78
7	126~134
8	240 (1979年)
9	306~364
23	93150~124416
24	196560 (1979年)

符号理論への応用

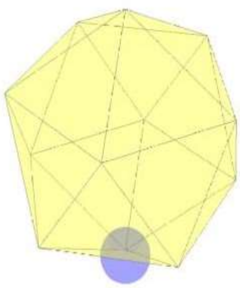
A から B へ情報(=数列)を伝える．例えば YES = 1，NO=0．しかし途中で誤りが生じて

A→YES=1 (→誤り→) 0=NO→B

では困る．しかし下図のように正 20 面体の最も離れた 2 点に YES, NO を対応させてみよう．すると

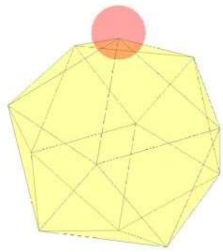


YES = (0,0,1)

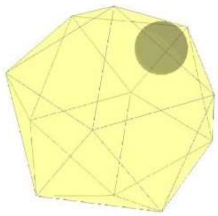


NO = (0,0,-1)

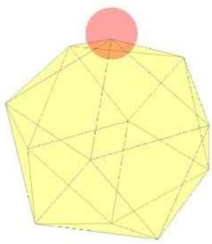
A→YES=(0,0,1) を送信



(→誤り = 少しずれた→)



(0,0,-1) よりも (0,0,1) の方が近い．



YES=(0,0,1)→B 正しい情報受信！

研究テーマ

1. 美しい図形の符号理論，情報理論への応用
2. 球面以外の有限集合に美しさをどのように定義するか，それを符号理論にどのように応用するか

参考文献

[1] Kissing number,
https://en.wikipedia.org/wiki/Kissing_number
[2] Mathematica,
Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 12.2, Champaign, IL (2020).
[3] E8 (mathematics),
https://en.wikipedia.org/wiki/E8_(mathematics)
[4] 24-cell,
https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell