久藤衡介研究室（非線形微分方程式）

数理生物学に現れる微分方程式
― 生物は餌の何倍まで生き残れるか？ ―

反応拡散方程式

未知関数 $u(x,t)$ に関する偏微分方程式の一種：

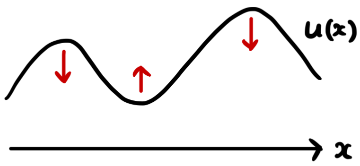
$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u,x).$$

x は空間変数，t は時間変数.

拡散項 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

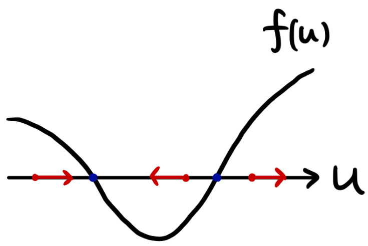
$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d は拡散の程度を表す定数.



反応項 $f(u,x)$

$$\frac{du}{dt} = f(u,x)$$



拡散項付きロジスティック方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (u - m(x))u. \qquad (1)$$

$u = u(x,t)$ は場所 x, 時刻 t における生物の個体数を表す未知関数．$m = m(x)$ は餌の分布を表す既知関数.

定常問題

方程式 (1) で記述される生物分布の時間変化に対して，時間が十分に経過したときの “落ち着いた” 状態を表す方程式：

$$\begin{cases} du'' + u(m(x) - u) = 0, \quad \text{in} \ \ (0,1), \\ u > 0, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

生物学的な問い

限られたエサを巧く配置し，生物が巧く散らばる (拡散する) ことによりできるだけ多くの個体を生き残らせたい.

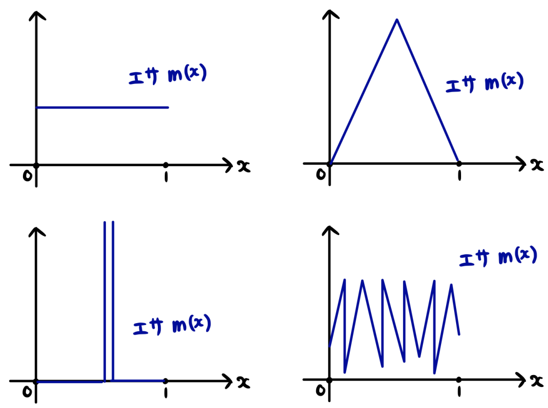
数学的な問い (Wei-Ming Ni(2010 頃))

d と $m(x)$ を様々に動かしたときに，総個体数と総資源量の比

$$\frac{\int_0^1 u_{d,m}(x)\,dx}{\int_0^1 m(x)\,dx}$$

の上限を求め，その上限に近づく組 (d,m) と，それに対応する (2) の解 $u_{d,m}(x)$ を調べよ.

エサをどのように与えればよいのか？
均等？それとも…



細長い地域で，餌を端に山積みにし，生物が巧く散らばると餌の３倍まで生き残れる 〜Bai, He, Li (2016) の結果〜

定理 1 ([1]) 境界値問題 (2) の解 $u_{d,m}$ に対して

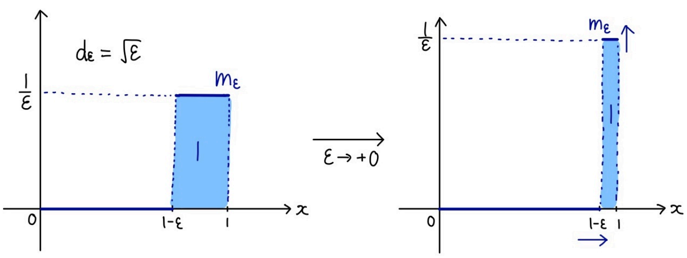
$$\sup_{d,\,m(x)} \frac{\int_0^1 u_{d,m}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 m\,\mathrm{d}x} = 3 \tag{3}$$

が成り立つ．但し (3) の等号を達成する組 (d,m) は存在しない．

[1] では定理 1 の証明において，(3) を達成する拡散係数 d と資源関数 $m(x)$ の族を次の形で与えている．任意の小さな $\varepsilon>0$ に対して

$$d = d_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon},$$

$$m(x) = m_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1-\varepsilon \\ 1/\varepsilon & 1-\varepsilon < x \le 1. \end{cases}$$



このとき，組 $(d_\varepsilon, m_\varepsilon)$ とそれに対応する (2) の解 $u_\varepsilon = u_{d_\varepsilon,m_\varepsilon}$ が，$\varepsilon\to 0$ において (3) を達成する maximizer である．

細長い地域で，端に積まれた餌の３倍近くまで生き残る生物の分布の形状 〜井上順平君（久藤研究室）の結果〜

定理 2 ([2]) 任意の有界閉区間 $I \subseteq [0,1)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\max_{x\in I} u_\varepsilon(x)\right) = 0$$

が成り立つ．さらに $x=0$ では

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{u_\varepsilon(0)}{\sqrt{\varepsilon}} = 2\sqrt{3}\cdot K\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2.$$

但しここで，$K(\cdot)$ は第 1 種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

を表す．さらに，$x=1$ の十分近くでは

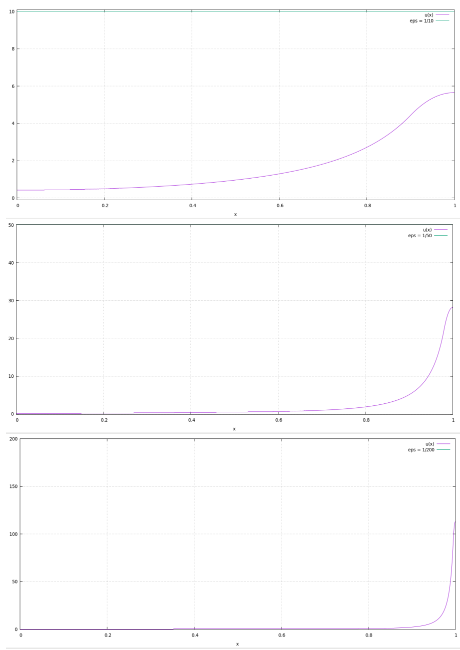
$$\lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon(1) = \frac{3}{2}. \tag{4}$$

定理 2 の生物学的な概観

- 式 (4) は，生物は餌の積まれた端の狭い区間 $[1-\varepsilon,1]$ に集中するものの，そこでの生物の個体数は，積まれた餌の量 1 に比べるとはるかに少なく，およそ $\frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2}$ にとどまることを意味する．
- 生物の餌が積まれている端の区間に集中する度合いを，餌の高さよりはるかに低い程度にとどめることで，餌の無い幅広な区間 $[0,1-\varepsilon]$ への「分布の膨らみ」を起こし，その区間での個体数が，餌の量の 3 倍近くまでに達する．

数値計算例

上から $\varepsilon = 1/10,\ 1/50,\ 1/100$ のときの u の形状．生物 (u) は，餌の積まれた右端に，高さが $\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}$ 程度で集中化しているものの，餌の無い区間 $[0,1-\varepsilon]$ で面積を 3 近くかせいでいる．



謝辞

研究室のポスターの作成にあたっては，井上順平君から多大な協力を頂きました．

参考文献

[1] X. Bai, X. He, F. Li, An optimization problem and its application in population dynamics. Proc. AMS. 144 (2016), 2161-2170.

[2] J. Inoue, Limiting profile of the optimal distribution in a stationary logistic equation, submitted.