小山晃研究室（物質の数理構造研究）

野生的空間の複雑さを数値化するには

簡単な図形に対する次元は最も直感的な数学の概念の1つであり, 直線, 正方形,立方体の次元がそれぞれ1, 2,3であることはほとんど疑いなく受け入れられています. しかし19世紀末にG.Cantorが線分と正方形が同じ濃度をもつこと, G.Peanoが線分から正方形の上への連続写像を構成したことで位相幾何学的に次元の概念を正確に定義することが必要となりました. また数学や諸科学の進歩に伴い多面体といった簡単な図形以外にも次元の概念を拡張することも必要となりました.

先人たちは様々な図形にも適合する「次元」の概念を定式化して, その複雑さと立ち向かってきました. その過程で今日フラクタルとも呼ばれている複雑な図形とも遭遇し, それらの複雑さを数値化する試みもなされました. たとえば平面上のすべての1次元空間の万有空間であるSierpinski Carpet,すべての1次元空間の万有空間であるMenger Curveが構成され, それらのハウスドルフ次元が計算することで, 複雑さを表現しました.

これらの空間は無限回の操作によって構成されますが現在の数学では射影的極限

$$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow X_4 \leftarrow$$

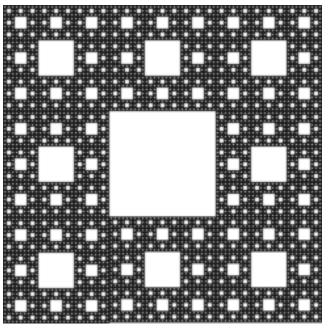
を用いて表現します. この構成で得られる病理的に複雑な図形を(フラクタルと呼ばれることもありますが)私の立場では「野生的空間」と呼びます.

高校生の皆さんへ:

私の研究室では、自然現象を解析する際に遭遇する様々な野生的空間の位相構造を、キーワード「次元」のもとに, 代数的位相幾何学, 連続体理論などを用いて解明していきます. 数学の持つ不思議な魅力を, 位相幾何学・次元論を通じて体験してみましょう.

(注)赤字の言葉は応用数理学科・数学科で学ぶようになります.

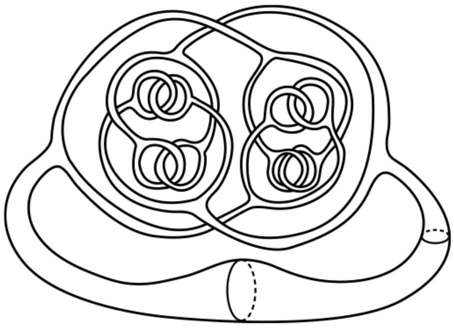
Sierpinski Carpet



$\dim M = 1, \ \dim_H M = \dfrac{\log 8}{\log 3}$

Menger Curve

$\dim M = 1, \ \dim_H M = \dfrac{\log 20}{\log 3}$



上の図形は2次元球面S^2の両端を切り開き絡み合わせて閉じることを繰り返して作っています. 3ステップ目です. これを無限回繰り返して得られる図形はAlexander Horned Sphereと呼ばれています.

S^2と位相同型(同相)ですが, 3次元空間の中ではS^2へ変形できません.