WINPEC Working Paper Series No. J2003
November 2020

区間ゲームにおけるシャープレイ写像と
3 人区間ゲームの場合の公理化について

篠潤之介

石原慎一

山内森平

現代政治経済研究所
(Waseda INstitute of Political EConomy)

早稲田大学

区間ゲームにおけるシャープレイ写像と 3人区間ゲームの場合の公理化について

篠 潤之介 [*]　　石原 慎一 [†]　　山内森平 [‡]

概 要

区間ゲームは, 特性関数形ゲームに不確実性を導入したモデルである. 特性関数形ゲームにおいては, 各提携に対して提携値として実数値が与えられる一方, 区間ゲームでは, 各提携に対して, 「不確実性を伴う提携値」として一定の幅を持つ閉区間が与えられる. 本稿では, 区間ゲームに適用する解概念として「解写像」を新たに提示し, その具体的な表現の 1 つであるシャープレイ写像の性質を考察する. また, シャープレイ写像が, 効率性, 対称性, ナルプレイヤー条件, 加法性の 4 つの公理を満たす唯一の解写像であることを示す.

Keywords: 協力ゲーム, 区間ゲーム, 不確実性, シャープレイ値, シャープレイ写像, 公理化.

1　はじめに: 区間ゲームの既存研究

本稿では, プレイヤーが提携値に関する不確実性に直面している協力ゲームを分析する. 協力ゲームの表現形式としてもっとも基本的であり, von Neumann and Morgenstern [33] によって与えられた特性関数形ゲーム (または TU ゲーム, 譲渡可能な効用を前提とするゲーム) は, プレイヤー集合 N と特性関数 v から構成される. ここで v は N の部分集合 S（提携と呼ばれる）に実数値 $v(S)$ を与える関数である. $v(S)$ は提携値と呼ばれ, S が提携として自分たちの力だけで獲得でき, 提携内のメンバーで自由に分配することのできる値である. n 人特性関数形ゲームにおける解概念 (solution concept) は, 各特性関数形ゲームに対して, すべてのプレイヤーに対する配分案として, n 次元実数値ベクトルの集合を与える関数である (この場合の「集合」とは, 1 点集合や空集合を含む). 協力ゲーム理論においては, これまで, コア, 安定集合, シャープレイ値, 仁などの多様な解概念が提示され, 解の存在や一意性, 公理化といった理論分析や, 経済学, 政治学, オペレーションズ・リサーチなどに関連した応用分析が進められてきた.

協力ゲーム理論の対象となる現実の経済社会において, 提携が獲得できる値には不確実性を伴う場合が多い. 例えば, 破産問題においては, 債権者は返済時 (将来) の債務者の支払い能力についての不確実性に直面しながら, 債権額を決定する. また, プレイヤーが一定の資金を出し合ってプロジェクトを実行する場合, プロジェクトのリターンに不確実性が存在したり, あるいはプロジェクトを実行するために必要なコストが不確実である状況 (例えば将来の不測の事態により, 追加的に工事費用がかかる状況) はしばしば観察される. したがって, 提携が直面する便益やコストに係る不確実性を導入し, 定式化することは協力ゲーム分析の重要な拡張である. 本稿では, そうした定式化の 1 つとして, **区間ゲーム** (interval game) を分析する. 区間ゲームは, 個人や提携が直面す

[*] 早稲田大学国際教養学部. junnosuke.shino@waseda.jp
[†] 東都数学教育研究社
[‡] University of Warwick, Faculty of Science

る不確実性を,「一定の幅をもった提携値=閉区間」として定式化する. すなわち, 区間ゲームにおける特性関数 w は[1], (特性関数形ゲームにおける特性関数 v のように) 各提携に実数値を与えるのではなく, 各提携に有界な閉区間を与える関数として定義される[2].

区間ゲームは, Branzei et al. [12] によって破産問題の観点から初めて定式化された. その後, 2000 年代半ばから 2010 年代前半にかけて, 区間ゲームの研究は Tijs, Branzei and Alparslan Gök らのグループによって進められてきた. Alparslan Gök et al. [9] は, 区間ゲームに適用する解概念として, **セレクションに基づく解概念** (selection based solution concept) と, その具体的な定式化である配分集合 (imputation set) や コア集合 (core set) などの解を提示し, 主に 2 人区間ゲームの枠内で分析を進めた. また, 後述するように, [9] では, 本稿で示す分析と比較的考え方が近い, ψ^{α}– value という解が提示された. Alparslan Gök et al. [5] [6] では, セレクションに基づく解概念の代替的な概念として**区間解概念** (interval solution concept) が提示され, 区間コア (interval core), 区間安定集合 (interval soluition stable set), 区間シャープレイ値 (interval Shapley value) などの解が導入された. このうち, 区間シャープレイ値については, その後, Alparslan Gök. [4] や Alparslan Gök et al. [8] において公理化がすすめられた. また, 後述するように, (n 人区間ゲームにおける) 区間解概念は, 各要素を閉区間とする (n 次元) ベクトルによって解を与えるために, 不確実性が解消され, 閉区間で表される提携値の 1 つが実現した後に, プレイヤー間で実現した利得をどのように配分するのかという問題を別途考察する必要がある (本稿ではこれを「how to handle interval solutions 問題」と呼ぶことにする). Branzei et al. [13] はこの問題を明示的に扱い, 解決するための一定の方向性を示した. 区間ゲームの応用例としては, Palanci et al.[26] の区間交通ゲーム (transportation interval game) や, Alparslan Gök et al.[7] の区間空港ゲーム (airpot interval game) がある. 以上の結果や応用例については, Alparslan Gök [3] や Branzei et al. [11] でまとめられている.

近年, 区間ゲームの分析は一段と進められてきている. とりわけ, 区間シャープレイ値に関連するテーマとして, プレイヤーの貢献度を計算する際の「閉区間の引き算問題」への対応に焦点を当てた分析が進められてきた. プレイヤーの貢献度を基礎に定義されるシャープレイ値を区間ゲームに適用する場合, 貢献度を計算する際に必要となる (閉) 区間同士の差をどう定義するかという問題が生じる. 後述するように, Alparslan Gok et al. [6] が提示した区間シャープレイ値では部分引き算オペレータ（partial subtraction operator）が用いられたが, このオペレータを用いると, 貢献度が計算できない場合が少なからず生じる. これはプレイヤーの貢献度に基づいて定義されるシャープレイ値を考察する上では大きな制約となる. この問題に対し, Alparslan Gok et al. [6] は, 区間ゲームのうち, この問題が生じない**規模単調** (size monotonic) な区間ゲームのみに対象を絞り, 区間シャープレイ値の分析を進めた. さらに, 規模単調なゲームのサブクラスである凸包 (cone) を対象に公理化を行った. しかしこれはかなり対象を限定しており, 彼らも結論部分において「(凸包だけでなく) 規模単調な区間ゲームで区間シャープレイ値の (公理化などの) 特徴づけを行うのは今後の課題 (to characterize the interval Shapley value on the class of size monotonic games is a topic for further research)」と注記している.

これに対し, Han, Sun and Xu [19] は, ムーアの引き算オペレータ (Moore [25]) を用いて区間シャープレイ値などの解を提示し, 公理化を試みた. しかし, このオペレータの導入により, 数学的にはプレイヤーの貢献度が常に計算できるものの, 定義された解は, 効率性 (または「全体提携の提携値集合についての効率性」脚注 6 参

[1]本稿を通じて, 区間ゲームにおける特性関数を w と表記し, 特性関数形ゲームにおける特性関数 v と区別する.

[2]区間ゲーム以外の「協力ゲームと不確実性」に関連する関連研究として, Habis and Herings [18] は, 異なる複数の状態 (state) からなる事前の 0 期と, そのうちの 1 つの状態が実現し, 実現した状態に依存して特性関数形ゲームがプレイされる事後の 1 期からなる TUU-game (TU-game with uncertainty) を分析した. Suijs et al. [30][31] は, 提携値が確率変数で与えらえる Stochastic cooperative game を考察した. Aubin [1] は, 提携形成に関する不確実性をモデル化した fuzzy game を定式化した.

照) を満たさないことが知られている. また, Meng et al. [24] らは, 虚区間差 (imaginary interval difference) なる概念を用いて, 区間の差が計算できない場合も, 暫定的に貢献値として扱う手法を提示した. しかし (その当然の帰結として), プレイヤーに与えられるシャープレイ値そのものが区間として定義されないケースが生じてしまい, 当該解は大きな欠陥があるといわざるをえない.

さらに, 区間の引き算を用いないで定義される解概念として, Fei Li and Ye [16] は, 区間割引シャープレイ値 (interval-valued discounted Shapley value) を考察した. 彼らはある区間ゲームにおける各提携値を共通のパラメータ $\alpha \in [0,1]$ で内分することによって得られる特性関数形ゲームを考え, $\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ の場合の 2 つの特性関数形ゲーム (下限ゲームと上限ゲームと呼ぶ) における割引シャープレイ値を, もとの区間ゲームにおける区間割引シャープレイ値の下限と上限として定義した. このとき, 解が存在するためには, すべてのプレイヤーについて,「下限ゲームで割引シャープレイ値によって与えられる利得が, 上限ゲームで割引シャープレイ値によって与えられる利得よりも常に大きくはならない」ことが必要である. Fei Li and Ye [16] は, どんな区間ゲームにおいても, 割引シャープレイ値に係るパラメータ $\delta \in [0,1]$ を適切に選択することで, その δ の下ではこの条件が満たされることを示した. しかし, この解概念は, $\delta = 0$ すなわち完全平等解のときには常に存在するが, $\delta = 1$ すなわち（ディスカウントされていない）シャープレイ値の存在は保証しない. 同様の枠組みで, Lian and Li [23] は区間バンザフ値 (interval Banzhaf value) を分析したが, [16] に対応する解が存在するための必要条件は扱われず, その代わりゲームの対象を規模単調なものに限定している. また, この解は効率性を満たさない. さらに, Li, Ye and Fei [22] では区間ソリダリティ値 (interval solidarity value) を分析しているが, この分析も区間ゲームの対象を限定している.

本稿では, 以上の一連の区間ゲーム研究の初期に Alparslan Gök et al. [9] によって提示された **解写像**のアイデアを用いて新たな解概念を提示し, 区間ゲームを解くことを試みる. 現在の区間ゲーム分析における主要な解概念である区間解概念は, 前述したように, ある区間ゲームに対して, 各要素を閉区間とする n 次元ベクトルによって解を与える. しかしながら, これらの解概念は, 例えば全体提携が形成された場合に,「区間で定義される全体提携値のうちの 1 つが実現したときに, それを提携のプレイヤー間でどう分配するか」という問題に直接的に答えているわけではない (このため, Branzei et al. [13] はこの問題に別途取り組んだ). 一方, 解写像の概念は,「ある区間ゲームにおける全体提携値の各実現値に対して, 各要素を (区間ではなく) 実数とする n 次元ベクトルを与える写像」として定義されるので, 前述した「how to handle interval solutions 問題」を改めて考察する必要はない (関連する議論は Ishihara and Shino [20] あるいは Ishihara et al. [21] も参照).

Alparslan Gök et al. [9] は解写像の概念をベースに, 2 人区間ゲームに限定して ψ^{α}– value という解概念を定義した. 本稿も, 解写像の概念をベース (出発点) にする. しかし, 一般的な n 人区間ゲームを対象とし, シャープレイ値を解写像に適用した**シャープレイ写像** (Shapley mapping) を解概念として新たに提示する. 以下で見ていくように, 解写像およびその具体的表現としてのシャープレイ写像には, 本節で見てきた区間ゲームの既存の解概念との比較において, いくつかの利点を有する. 第 1 は繰り返しとなるが, how to handle interval solutions 問題を別途考える必要がない. 第 2 に, 特定の引き算オペレータに依存せずに定義される. 第 3 に, 特性関数形ゲームにおけるシャープレイ値と同様の公理化が, 規模単調な区間ゲームなどに対象を限定せずに, 一般的な n 人区間ゲームで可能となる.

次節以降の構成は以下の通りである. 2 節は予備的分析であり, 特性関数形ゲームと区間ゲームについて簡単にレビューする. 3 節では区間ゲームにおける既存の解概念である区間解概念の代替として, 解写像の概念を提示する. 4 節では解写像の具体的な表現としてシャープレイ写像を定義する. さらに, シャープレイ写像は効率

性, 対称性, ナルプレイヤー条件, 区間ゲームにおける加法性, の 4 つの公理を満たし, かつこの 4 つの公理を満たす解写像はシャープレイ写像に限られることを, 3 人区間ゲームの場合について示す. 5 節でまとめと今後の課題を示す.

2　予備的分析

2.1　特性関数形ゲーム

譲渡可能な効用を持つ n 人特性関数形ゲーム (単に特性関数形ゲーム, あるいは TU ゲームとも呼ぶ) は (N,v) によって表される. ここで $N = \{1,2,...,n\}$ はプレイヤーの集合. $v : 2^N \to \mathbb{R}$ は特性関数であり, 各提携 $S \in 2^N$ に提携値 $v(S) \in \mathbb{R}$ を与える実数値関数である ($v(\phi) = 0$ を満たすものとする). 実数値 $v(S)$ を S の提携値と呼ぶ. N を全体提携を呼ぶ. CG を特性関数形ゲーム全体の集合とし, CG^n を n 人特性関数形ゲーム全体の集合とする. 以下の分析では, 必要に応じて特性関数形ゲーム (N,v) を単に v で表記する. また, 提携 $\{1...k\} \in 2^N$ の提携値 $v(\{1...k\})$ を, $v(i...k)$ と表記する.

特性関数形ゲームに適用される解として代表的なものとして, 安定集合 (von Neumann and Morgenstern [33]), 配分, コア (Gillies [17]), シャープレイ値 (Shapley [29]), 仁 (Schmeidler [28]), 交渉集合 (Aumann and Maschler [2]), カーネル (Davis and Maschler [15]) などが挙げられる. このうち, 本稿の以下の分析との関連において重要なのは, シャープレイ値である. n 人特性関数形ゲーム $v \in CG^n$ に対して, シャープレイ値 ϕ は, 以下で定義される n 次元実数値ベクトル $\phi(v) = (\phi_1(v),...,\phi_i(v),...,\phi_n(v))$ を与える:

$$\phi_i(v) = \sum_{S:i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{v(S) - v(S \setminus \{i\})\}. \tag{1}$$

2.2　区間ゲーム

n 人特性関数形ゲーム (N,v) 同様, n 人 **区間ゲーム** (interval game) もプレイヤー集合と特性関数の組 (N,w) によって与えられる. ただし, 特性関数 w は, 各提携 $S \in 2^N$ に提携値 $w(S)$ として有界閉区間を与える関数である. すなわち, $I(\mathbb{R})$ を有界閉区間全体の集合とすると, $w : 2^N \to I(\mathbb{R})$ である (ただし $w(\phi) = [0,0]$ を満たすものとする). $w(S)$ を提携 S の**提携値集合**, または単に**提携値**と呼ぶ. $w(S)$ の上限と下限をそれぞれ $\underline{w}(S)$ および $\overline{w}(S)$ とする (すなわち $w(S) = [\underline{w}(S),\overline{w}(S)]$). 区間ゲーム (N,w) は, 各プレイヤーが提携値に関する区間の不確実性 (interval uncertainty), に直面している協力ゲーム的状況を定式化したものである. 提携 S は, 自らの力で最低で $\underline{w}(S)$, 最大で $\overline{w}(S)$ の利得を獲得できることを事前に認識しているが, その中で実際にどの値が実現するのかは事前に知ることができない. IG を区間ゲーム全体の集合とし, IG^n を n 人区間ゲーム全体の集合とする. 以下の分析では, 必要に応じて区間ゲーム (N,w) を単に w で表記する. また, 提携 $\{1...k\} \in 2^N$ の提携値 (集合) $w(\{1...k\})$ を $w(i...k)$ と表記する.

ここで閉区間同士の演算について定義する. $I = [\underline{I},\overline{I}]$ と $J = [\underline{J},\overline{J}]$ を 2 つの閉区間とする. まず, **足し算オペレータ** (sum operator) “ + ” は, $I + J = [\underline{I}+\underline{J},\overline{I}+\overline{J}]$ で与えられる. 次に, **部分引き算オペレータ** (partial subtraction operator) “ − ” は以下で与えられる ([6]):

$$I - J = [\underline{I} - \underline{J},\overline{I} - \overline{J}]. \tag{2}$$

部分引き算オペレータは, $\overline{I}-\underline{I} \geq \overline{J}-\underline{J}$ なる $I, J \in I(\mathbb{R})$ のみについて定義可能である. この条件が満たされない場合は, $\underline{I}-\underline{J} > \overline{I}-\overline{J}$ となるので, (2) の右辺を区間としてみなすことができず, 定義不能である. 最後に, ムーアの引き算オペレータ (Moore's subtraction operater) “ $-_{(M)}$ ” は以下で与えられる ([25]):

$$I -_{(M)} J = [\underline{I}-\overline{J}, \overline{I}-\underline{J}]. \tag{3}$$

部分引き算オペレータと異なり, ムーアの引き算オペレータは任意の $I, J \in I(\mathbb{R})$ に対して定義可能である.

異なる 2 つの n 人区間ゲーム $w', w'' \in IG^n$ に対して, 2 つの区間ゲームの和のゲーム $w' + w'' \in IG$ は, 各提携 $S \in 2^N$ の提携値集合を $(w' + w'')(S) = w'(S) + w''(S)$ とすることで定義される.

2 つの閉区間 $I, J \in I(\mathbb{R})$ に対して, $\underline{I} \leq \underline{J}$ かつ $\overline{I} \leq \overline{J}$ のとき, $I \leq J$ と記す.

区間ゲーム $w \in IG$ に対して, w の各提携値集合 $w(S)$ の下限から形成される特性関数形ゲームを $v_{\underline{w}} \in CG$ とする (すなわち各 $S \in 2^N$ に対して $v_{\underline{w}}(S) = \underline{w}(S)$). 同様に, $w(S)$ の上限から形成される特性関数形ゲームを $v_{\overline{w}} \in CG$ とする (すなわち各 $S \in 2^N$ に対して $v_{\overline{w}}(S) = \overline{w}(S)$).

$\mathbb{I} = (I_1, \ldots, I_n) \in I(\mathbb{R})^N$ を, 各要素を閉区間とする n 次元ベクトルとする. $\mathbb{I} \in I(\mathbb{R})^N$ に対し, $\min \mathbb{I} \in \mathbb{R}^N$ と $\max \mathbb{I} \in \mathbb{R}^N$ を以下で定義する:

$$\min \mathbb{I} = (\min I_1, \ldots, \min I_n), \quad \max \mathbb{I} = (\max I_1, \ldots, \max I_n). \tag{4}$$

区間ゲーム $w \in IG$ において, $S \subset N \setminus \{i, j\}$ である任意の提携 S について $w(S \cup \{i\}) = w(S \cup \{j\})$ が成り立つとき, プレイヤー i と j は対称 (symmetric) であるという. また, 任意の提携 $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$ について $w(S) = w(S \cup \{i\})$ が成り立つとき, i をナルプレイヤー (null player) と呼ぶ.

区間ゲーム $w \in IG$ において, すべての提携の提携値集合が 1 点の場合, すなわち $\underline{w}(S) = \overline{w}(S)$ がすべての $S \in 2^N$ で成り立つとき, w は $v(S) = \underline{w}(S) = \overline{w}(S)$ によって定義される特性関数形ゲーム v と同等であると呼ぶ. 前節で定義した (従来の) 特性関数形ゲームは, 区間ゲームの不確実性がない場合の特殊ケースであるとみなすことができる.

3 区間ゲームにおける解概念

3.1 既存の解概念: 区間解概念とその具体的表現である区間シャープレイ値

区間ゲームの既存研究において, 中心的な役割を果たしている解概念は, 区間解概念 (interval solution concept) と呼ばれるものである[3]. 区間解概念は, n 次元閉区間ベクトルの集合として与えられる. $I_i \in I(\mathbb{R})$ をプレイヤー i に閉区間として与えられる (不確実性を伴う) 利得とし, $\mathbb{I} = (I_1, \ldots, I_n) \in I(\mathbb{R})^N$ を n 次元閉区間ベクトルとする

[3]区間ゲーム分析のごく初期において, Alparslan Gök et al.[9] は, 区間解概念とは異なる解概念である「セレクションに基づく解概念」(selection-based solution concept) を提示した. ある区間ゲーム $w \in IG$ において, w の (ある) セレクションとは, すべての提携 $S \in 2^N$ について $v(S) \in w(S)$ を満たす関数 $v : 2^N \to \mathbb{R}$ のことである. $Sel(w)$ を w のセレクション全体の集合とする. セレクションに基づく解概念のなかで代表的な解である配分集合 (imputation set) $I(w)$ とコア集合 (core set) $C(w)$ はそれぞれ以下によって定義される:

$$\begin{aligned} I(w) &= \cup\{I(v) | v \in sel(w)\} \\ C(w) &= \cup\{C(v) | v \in sel(w)\}. \end{aligned}$$

ただし, $I(v)$ と $C(v)$ は, それぞれ特性関数形ゲーム $v \in CG$ における配分およびコアである.

しかし, セレクションに基づく解概念はその後目立った分析の進展はみられず, 区間解概念が区間ゲーム分析に用いられる解概念の中心となった.

と, 区間解概念は $w \in IG$ に n 次元閉区間ベクトル $\mathbb{I}$ の集合を与える関数である (この場合の「集合」とは, 1 点集合や空集合を含む). Alparslan Gök et al. [5] の区間配分 (interval imputation set), 区間コア (interval core), 区間安定集合 (interval stable set) や, Alparslan Gök et al. [6] で提示された区間シャープレイ値 (interval Shapley value) などの区間ゲームにおける解は, この区間解概念に分類される. ここでは, 以下の分析に必要となる, Alparslan Gök et al. [6] によって定義され, その後 Alparslan Gök et al. [8] や Alparslan Gök. [4] によって公理化が進められた**区間シャープレイ値**の定義を記しておく[4].

まず, プレイヤー集合 N の置換を $\sigma : N \to N$ とし, 置換全体の集合を $\pi(N)$ とおく. 次に, 区間ゲーム w と w における置換 σ に対し, w と σ についてのプレイヤー i の限界貢献度 m_i^{σ} を以下で与える.

$$m_i^{\sigma}(w) = w(P_{\sigma}(i) \cup \{i\}) - w(P_{\sigma}(i)). \tag{5}$$

ここで $P_{\sigma}(i) = \{r \in N | \sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(i)\}$, すなわち, $P_{\sigma}(i)$ は置換 σ における i の先行者 (predecessors) の集合である. w の σ についての限界貢献度ベクトル $m^{\sigma}(w)$ は $m^{\sigma}(w) = (m_1^{\sigma}(w), \dots, m_n^{\sigma}(w))$ として定義される. 以上で区間シャープレイ値を定義する準備が整った. 区間シャープレイ値 $\Phi : IG \to I(\mathbb{R})^N$ は以下の式 (6) によって定義される.

$$\Phi(w) = (\Phi_1(w), \dots, \Phi_n(w)) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^{\sigma}(w). \tag{6}$$

式 (6) における $\Phi_i(w)$ $(i \in N)$ は以下のようにも表現できる.

$$\Phi_i(w) = \sum_{S: i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \{w(S) - w(S \setminus \{i\})\}. \tag{7}$$

式 (7) と式 (1) を比較すれば明らかなように, 区間シャープレイ値は特性関数形ゲームにおけるシャープレイ値の単純な拡張である. ただし, 区間シャープレイ値は, 部分引き算オペレータが用いられているために, すべての区間ゲーム $w \in IG$ に対して定義できるわけではない. この点をみるために, 以下の 2 つの例を考える. 最初の例は区間シャープレイ値が定義できるケースであり, 次の例は定義できない場合である.

例 1 以下の *3* 人区間ゲームは *Alparslan Gök, et al. [6]* に基づく. $w(1) = [0,0]$, $w(2) = [0,0]$, $w(3) = [0,0]$, $w(12) = [2,4]$, $w(13) = [2,4]$, $w(23) = [2,4]$, $w(123) = [9,15]$.

各置換についてのプレイヤー 1 の限界貢献度を計算すると, $\sigma_1^{(123)}(w) = w(1) - w(\phi) = [0,0]$, $\sigma_1^{(132)}(w) = [0,0]$, $\sigma_1^{(213)}(w) = [2,4]$, $\sigma_1^{(231)}(w) = [7,11]$, $\sigma_1^{(312)}(w) = [2,4]$, および $\sigma_1^{(321)}(w) = [7,11]$ となる. これらの限界貢献度の合計が $[18,30]$ であり, $3! = 6$ から, 式 (6) に従うと, プレイヤー 1 の区間シャープレイ値は $\Phi_1(w) = [3,5]$ となる. 同様に, $\Phi_2(w) = \Phi_3(w) = [3,5]$ となる.

[4] 区間配分と区間コアをそれぞれ $II(w)$, $IC(w)$ とおくと, その定義は以下の通りである.

$$\begin{aligned} II(w) &= \left\{ I = (I_1, \dots, I_n) \in I(\mathbb{R})^N \,\middle|\, \sum_{1 \in N} I_i = w(N),\ w(i) \leq I_i,\ \forall\, i \in N \right\} \\ IC(w) &= \left\{ I = (I_1, \dots, I_n) \in I(\mathbb{R})^N \,\middle|\, \sum_{1 \in N} I_i = w(N),\ w(S) \leq \sum_{i \in S} I_i,\ \forall\, S \in 2^N \setminus \{\phi\} \right\}. \end{aligned}$$

例 2 以下の *3* 人区間ゲームは *Han et al. [19]* に基づく. $w(1) = [0,2]$, $w(2) = [1/2,3/2]$, $w(3) = [1,2]$, $w(12) = [2,3]$, $w(13) = [3,4]$, $w(23) = [4,4]$, $w(123) = [6,7]$.

置換 (123) についてのプレイヤー 2 の限界貢献度を計算しようとすると, $m_2^{(123)}(w) = w(12) - w(1) = [2,3] - [0,2]$ となる. しかし, $2-0 > 3-2$ であるため, $m_2^{(123)}(w)$ を閉区間として得ることができず, 限界貢献度を計算できない.

この, いわゆる「区間の引き算問題」に対し, Alparslan Gök [4][6][8] は, 分析の対象を**規模単調** (size monotonic) な区間ゲームに限定することで解決を図った. 区間ゲーム $w \in IG$ が規模単調であるとは, $S \subseteq T$ を満たす任意の提携 S と T について, 以下の式 (8) が成り立つときをいう.

$$\overline{w}(S) - \underline{w}(S) \leq \overline{w}(T) - \underline{w}(T). \tag{8}$$

区間ゲームが規模単調なとき, $S \subseteq T$ を満たす提携 $S,T \in 2^N$ について, (8) より $\underline{w}(T) - \underline{w}(S) \leq \overline{w}(T) - \overline{w}(S)$ を満たす. したがって, 式 (5) で与えられるプレイヤーの限界貢献度は常に閉区間として定義可能となる. 例 2 では限界貢献度が計算できないケースを見たが, このゲームは規模単調ではないので, そもそも [4][6][8] の分析の対象とはならない.

「区間の引き算問題」に対する別のアプローチとして, Han et al. [19] はムーアの引き算オペレータ (Moore [25]) を用いて区間準シャープレイ値 (interval Shapley-like value) を定義した. 式 (3) で記したように, ムーアの引き算オペレータは任意の閉区間 $I, J \in I(\mathbb{R})$ に対して定義可能である. 例えば, 上記例 2 における置換 (123) についてのプレイヤー 2 の限界貢献度は, $\sigma_2^{(123)}(w) = w(12) -_{(M)} w(1) = [2,3] -_{(M)} [0,2] = [2-2, 3-0] = [0,3]$ となり, 閉区間として算出される. Φ^M を区間準シャープレイ値とすると, 例 2 の区間準シャープレイ値は以下の利得ベクトル (9) で与えられる:

$$\Phi^M(w) = \left(\left[\frac{11}{12}, \frac{31}{12}\right], \left[\frac{7}{6}, \frac{17}{6}\right], \left[\frac{23}{12}, \frac{43}{12}\right]\right). \tag{9}$$

ここで仮定として, 全体提携が形成されるもとで, 事後的に全体提携の提携値集合 $w(123) = [6,7]$ の 1 点である $6 \in w(123)$ が実現したとする. この場合, この実現値 6 をプレイヤー間でどう配分するかが問題となるが, これまで記してきた [6] の区間シャープレイ値や [19] の区間準シャープレイ値は, この問題に直接解を与えるものではない. Branzei, Tijs and Alparslan Gök. [13] は, この「区間解概念を, 全体提携の事後的な実現値の配分にどう用いるか」という問題 – 彼らの論文 [13] のタイトルを援用すると, “how to handle interval solutions” 問題 – に明示的に取り組んだおそらく唯一の分析である. 彼らの示した手法に基づくと, 全体提携の実現値 $6 \in w(123)$ に対し, 区間準シャープレイ値 Φ^M は利得ベクトル (11/12,7/6,23/12) を与える[5]. しかし, この利得ベクトルで各プレイヤーに与えられる利得の合計は 4 であり, 6 より厳密に小さい. これは, 区間準シャープレイ値がある種の**効率性** (efficiency) を満たさないことを示唆する[6].

以上の議論を踏まえ, 次節では区間解概念に替わる解概念としての解写像 (solution mapping) を考える.

[5] ここでは, [13] で提示された “one step procedure” をい用いている.

[6] なお, ここでの「ある種の効率性」とは, 「n 次元実数値ベクトルの各要素の合計が, 全体提携の実現値に等しい」ことを意味する**「全体提携の実現値についての効率性」**である. 以下の分析で単に「効率性」という場合, それはこの全体提携の実現値についての効率性を意味するものとする. 一方, 区間解概念の文脈においては, 「各要素を閉区間とする n 次元閉区間ベクトルの各要素の合計 (それ自身が閉区間である) が, (閉区間で定義されている) 全体提携値と等しいかどうか」が問題とされる. 本稿ではこれを, 全体提携の実現値についての効率性と区別するために, **「全体提携の提携値集合についての効率性」**と呼ぶことにする. 4 節で示す効率性の公理は, 当然, 全体提携の実現値についての効率性である.

3.2　新たな解概念としての解写像

区間ゲームが想定する「プレイヤーが提携値に関する不確実性に直面している協力ゲーム的状況」を踏まえると, 区間解概念と代替的な異なる解概念を考えることができる. すなわち, これまで述べてきたように, 区間ゲームは, (i) プレイヤーが区間として表現される「提携値に関する不確実性」に直面しながら, (ii) 事後的に不確実性が除去され, 全体提携値の 1 つの実現値が実現した際に, それをプレイヤー間でどう配分するかを示す「ルール」あるいは「プロトコル」について合意形成を図る, という状況を描写している. したがって, 全体提携が形成される前提のもとでは, 全体提携値 (集合) である $w(N)$ のそれぞれの実現値に対して, それをどう配分するかという「ルール」ないしは「プロトコル」が重要となる[7]. こうした「ルール」を解概念として定式化するのであれば, それは区間解概念のように「ある区間ゲームに対して各要素を閉区間とする n 次元ベクトルを与える写像」ではなく, **「ある区間ゲームにおける全体提携の各実現値に対して n 次元実数値ベクトルを与える写像」**として定めることが適切である. 以上が本稿で提示する解概念である**解写像** (solution mapping) のエッセンスである.

解写像の正確な定義は以下の通りである. まず, 閉区間 $[a,b]$ に含まれる各実数値に対して n 次元実数値ベクトルを与える関数 $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を考える. この関数 κ 全体の集合を $K(\mathbb{R}^n)$ とする. 各区間ゲーム $w \in IG$ に対し, 写像 $F(w) \in K(\mathbb{R}^n)$ を与える写像を $F : IG \to K(\mathbb{R}^n)$ とする. 写像 $F(w)$ の定義域 (domain) が全体提携の提携値集合 $w(N) = [\underline{w}(N), \overline{w}(N)]$ であるとき, すなわち, $F(w) : [\underline{w}(N), \overline{w}(N)] \to \mathbb{R}^n$ であるとき, F を n 人区間ゲームにおける**解写像** (solution mapping) と呼ぶ. $F(w)(t)$ は, n 人区間ゲーム $w \in IG$ における全体提携の提携値集合のそれぞれの実現値 $t \in [\underline{w}(N), \overline{w}(N)]$ に対し, プレイヤー間の実現値の配分案として n 次元実数値ベクトルを与える写像である.

Alparslan Gök et al. [9] は, 解写像に類似の解概念として 2 人区間ゲームの枠内で ψ^α-value という解を提示した. しかし, 一般的な n 人ゲームは分析の対象外としている. また, 上記の解写像に, プレイヤーの相対的な力関係を示す外生的なパラメータ α_i (すなわち, 区間ゲームには記述されていない付加的な要素) を与えた上で解を定義している. さらに, 公理化にあたっては, 必ずしも標準的な公理を用いているわけではない.

解写像の概念を用いた区間ゲームの分析は, [9] 以降行われていないようにうかがわれる. 次節では, 一般的な n 人区間ゲームの枠内で, 追加的な外生パラメータを用いることなく, 解写像の具体的な表現としてシャープレイ写像を定義する. そして, 標準的な公理を用いてシャープレイ写像の公理化を行う.

4　シャープレイ写像とその公理化

4.1　解写像の具体的表現: シャープレイ写像

ここでは, n 人区間ゲーム $w \in IG^n$ において, 解写像の具体的な表現としてシャープレイ写像を定義する.

まず, 全体提携値の実現値 $t \in w(N)$ に対し, $t = (1-\alpha)\underline{w}(N) + \alpha\overline{w}(N)$ を満たす $\alpha \in [0,1]$ が一意に定まる[8].

[7]なお, こうした状況は, 異なる定式化で協力ゲームへの不確実性の導入を行った Habis and Herings [18] の TUU ゲーム (TU with Uncertainty) と類似したものである. [18] は, 異なる複数の状態 (state) からなる事前の 0 期と, そのうちの 1 つの状態が実現し, 実現した状態に依存して特性関数形ゲーム $v \in CG$ がプレイされる事後の 1 期からなる 2 期モデルを分析した.

[8]厳密には, (i)$w(N)$ が一点集合であり, かつ (ii) N 以外の少なくとも 1 つの提携 $S \in 2^N \setminus N$ について $w(S)$ が一点集合ではない場合, α は一意には定まらない. もっとも, これは全体提携値に不確実性が存在しない場合であり, 区間ゲームが想定する不確実性の存在する状況とは本質的に異なる. このため, 本稿ではこのケースを除外して分析を進める.

次に, この α を用いて, 以下の n 人特性関数形ゲーム $v_w^\alpha \in CG^n$ を定義する:

$$\text{すべての提携 } S \in 2^N \text{ について，} v_w^\alpha(S) = (1-\alpha)\underline{w}(S) + \alpha\overline{w}(S).$$

なお, v_w^α の全体提携値 $v_w^\alpha(N)$ は $v_w^\alpha(N) = (1-\alpha)\underline{w}(N) + \alpha\overline{w}(N) = t$ を満たす. 特性関数形ゲーム v_w^α におけるシャープレイ値を $\phi(v_w^\alpha) = (\phi_1(v_w^\alpha), \ldots, \phi_i(v_w^\alpha), \ldots, \phi_n(v_w^\alpha))$ とすると, **シャープレイ写像** (Shapley mapping) $\sigma^*(w) : [\underline{w}(N), \overline{w}(N)] \to \mathbb{R}^n$ は以下の式 (10) によって定義される:

$$\sigma^*(w)(t) = \phi(v_w^\alpha). \tag{10}$$

なお, $\sigma^*(w)(t)$ は以下のように変形できる (本稿の以下の証明でしばしば用いられる):

$$\begin{aligned}
\sigma_i^*(w)(t) &= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{v_w^\alpha(S) - v_w^\alpha(S\setminus\{i\})\} \\
&= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[\{(1-\alpha)\underline{w}(S) + \alpha\overline{w}(S)\} - \{(1-\alpha)\underline{w}(S\setminus\{i\}) + \alpha\overline{w}(S\setminus\{i\})\}] \\
&= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[(1-\alpha)\{\underline{w}(S) - \underline{w}(S\setminus\{i\})\} + \alpha\{\overline{w}(S) - \overline{w}(S\setminus\{i\})\}] \\
&= (1-\alpha)\phi_i(v_{\underline{w}}) + \alpha\phi_i(v_{\overline{w}}).
\end{aligned} \tag{11}$$

前掲の例 2 で取り上げた区間ゲームおいて, 全体提携の実現値が $6 \in w(N)$ の場合にシャープレイ写像が与える配分案は,

$$\sigma^*(w)(6) = \left(\frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}\right).$$

となる. このとき, プレイヤーの利得の和は全体提携の実現値 6 と等しくなっており, 「全体提携の実現値についての効率性」が満たされている (脚注 6 参照).

ここでもう 1 つ, 3 人区間ゲームの数値例を取り上げる.

例 3 *以下の 3 人ゲームは Alparslan Gök. [4] および Palanci et al. [27] に基づく.* $w(1) = [7,7]$, $w(2) = [0,0]$, $w(3) = [0,0]$, $w(12) = [12,17]$, $w(13) = [7,7]$, $w(23) = [0,0]$, $w(123) = [24,29]$.

このゲームは規模に関して単調である. したがって, 区間シャープレイ値が存在し, それを Φ とすると, $\Phi(w) = ([27/2,16],[13/2,9],[4,4])$ である. さらに, Palanci et al. [27] によって提示された区間バンザフ値 (interval Banzhaf value) Φ^B も存在し, $\Phi^B = ([25/2,15],[11/2,8],[3,3])$ となる. ただし, Φ^B は全体提携の提携値集合についての効率性を満たしていない (すなわち $[25/2,15]+[11/2,8]+[3,3] \neq [24,29]$). なお, [27] は区間完全平等解 (interval egalitarian rule, この数値例では $([8,29/3],[8,29/3],[8,29/3])$ である) も考察している. これは当然全体提携の提携値集合についての効率性を満たすが, ナルプレイヤーに [0,0] 以外の閉区間を与えることが知られており, いわゆるナルプレイヤー条件を満たさない[9].

一方, シャープレイ写像 σ^* は, 全体提携の提携値 24, 26.5, 29 (それぞれ下限, 中点, 上限), に対して, 以下の 3

[9]ナルプレイヤー条件については 4.2 項を参照.

次元実数値ベクトルを与える.

$$\sigma^*(w)(24) = \left(\frac{27}{2}, \frac{13}{2}, 4\right), \quad \sigma^*(w)(26.5) = \left(\frac{59}{4}, \frac{31}{4}, 4\right), \quad \sigma^*(w)(29) = (16, 9, 4)\,. \tag{12}$$

ここで, 区間シャープレイ値とシャープレイ写像の関係をみると, 式 (12) における $\sigma^*(w)(24)$ と $\sigma^*(w)(29)$ は, 区間シャープレイ値 $\Phi(w)$ における各プレイヤーの閉区間のそれぞれの下限からなる利得ベクトル, およびそれぞれの上限からなる利得ベクトルと等しい. さらに, 全体提携の中点である 26.5 が実現したとき, シャープレイ写像が与える利得ベクトル $(59/4, 31/4, 4)$ は, 区間シャープレイ値 $\Phi(w)$ における各プレイヤーの閉区間のそれぞれの中点に等しい. こうしたシャープレイ写像と区間シャープレイ値の関係について, 一般的には以下が成り立つ[10].

定理 4.1 Φ と σ^* をそれぞれ区間シャープレイ値 *(interval Shapley value)* およびシャープレイ写像 *(Shapley mapping)* とする. また, n 人区間ゲーム $w \in IG^n$ における全体提携値 $t \in w(N)$ に対し, $\alpha \in [0,1]$ が $t = (1-\alpha)\underline{w}(N) + \alpha\overline{w}(N)$ を満たすとする. w が規模単調 *(size monotonic)* であるとき, 以下が成り立つ.

$$\sigma^*(w)(t) = (1-\alpha)\min\Phi(w) + \alpha\max\Phi(w). \tag{13}$$

証明 $t = \underline{w}(N)$ のとき $\alpha = 0$, $t = \overline{w}(N)$ のとき $\alpha = 1$ なので, (11) より $\sigma_i^*(w)(\underline{w}(N)) = \phi_i(v_{\underline{w}})$, $\sigma_i^*(w)(\overline{w}(N)) = \phi_i(v_{\overline{w}})$ が成り立つ. また, 区間ゲームが規模単調のとき, $\Phi(w)$ は定義可能であり, 各 $i \in N$ について以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\Phi_i(w) &= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{w(S) - w(S\setminus\{i\})\} \\
&= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{[\underline{w}(S),\, \overline{w}(S)] - [\underline{w}(S\setminus\{i\}),\, \overline{w}(S\setminus\{i\})]\} \\
&= \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{[\underline{w}(S) - \underline{w}(S\setminus\{i\}),\, \overline{w}(S) - \overline{w}(S\setminus\{i\})]\} \\
&= \left[\sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{\underline{w}(S) - \underline{w}(S\setminus\{i\})\},\ \sum_{S:i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{\overline{w}(S) - \overline{w}(S\setminus\{i\})\}\right] \\
&= [\phi_i(v_{\underline{w}}),\, \phi_i(v_{\overline{w}})]
\end{aligned}$$

ゆえに, $\min\Phi_i(w) = \phi_i(v_{\underline{w}})$, $\max\Phi_i(w) = \phi_i(v_{\overline{w}})$. したがって, 以下が満たされる.

$$(1-\alpha)\min\Phi_i(w) + \alpha\max\Phi_i(w) = (1-\alpha)\phi_i(v_{\underline{w}}) + \alpha\phi_i(v_{\overline{w}}) = \sigma_i^*(w)(t) \tag{14}$$

が成り立つ (最後の等号は (11) による). (14) はすべての $i \in N$ について満たされるので, (13)が成り立つ.■

定理 4.1 は区間シャープレイ値とシャープレイ写像のある種の同値性 (全体提携のある実現値に対してシャープレイ写像が与える配分案は, 区間シャープレイ値の下限・上限を, その実現値から求められる内分比率を用いて案分したものに等しい) を示しているものといえる. この同等性を前提とすると, シャープレイ写像は区間ゲームが規模単調かどうかに関わらず定義できることから, より一般性が高い解概念といえる.

[10] オペレータ *min* および *max* については式 (4) を参照.

さらに, シャープレイ写像は特性関数形ゲームにおける標準的な公理を区間ゲームに自然に拡張することで, 公理化が可能となる. 次節ではシャープレイ写像の公理化を行う.

4.2 シャープレイ写像の公理化

本節では, 式 (10) で定義されるシャープレイ写像が, 以下の効率性, 対称性, ナルプレイヤー条件, および加法性を満たし, かつこれらの公理を満たす唯一の解写像であることを示す. まず, 区間ゲームにおける解写像 σ に対し, 以下の公理系を考える.

- Axiom 1-1: 効率性 (Efficiency [**EF**])

$$\Big(\sum_{i\in N}\sigma_i(w)(t)=t\Big)\ \Big(\forall w\in IG\Big)\ \Big(\forall t\in w(N)\Big).$$

- Axiom 2-1: 対称性 (Symmetry [**SYM**])

$$\Big(\sigma_i(w)(t)=\sigma_j(w)(t)\Big)\ \Big(\forall w\in IG\ where\ \ i\ and\ j\ are\ symmetric\Big)\ \Big(\forall t\in w(N)\Big).$$

- Axiom 3-1: ナルプレイヤー条件 (Null Player [**NP**])

$$\Big(\sigma_i(w)(t)=0\Big)\ \Big(if\ w(S)=w(S\cup\{i\})\ \forall S\in 2^{N\setminus\{i\}}\Big)\ \Big(\forall t\in w(N)\Big).$$

- Axiom 4-1: 加法性-1 (Additivity-1 [**AD1**])

$$\begin{gathered}\Big(\sigma_i(w'+w'')(t'+t'')=\sigma_i(w')(t')+\sigma_i(w'')(t'')\Big) \qquad (15)\\ \Big(\forall w',w''\in IG\Big)\ \Big(\forall t'\in w'(N)\Big)\ \Big(\forall t''\in w''(N)\Big)\ \Big(\forall i\in N\Big).\end{gathered}$$

- Axiom 4-2: 加法性-2 (Additivity-2 [**AD2**])
  定数 $\alpha\in[0,1]$ と区間ゲーム $w',w''\in IG$ に対し, $t'\in w'(N)$ および $t''\in w''(N)$ を以下のように定義する:

$$t' \;=\; (1-\alpha)\underline{w'}(N)+\alpha\overline{w'}(N) \qquad (16)$$

$$t'' \;=\; (1-\alpha)\underline{w''}(N)+\alpha\overline{w''}(N). \qquad (17)$$

  このとき,

$$\begin{gathered}\Big(\sigma_i(w'+w'')(t'+t'')=\sigma_i(w')(t')+\sigma_i(w'')(t'')\Big) \qquad (18)\\ \Big(\forall w',w''\in IG\Big)\ \Big(\forall\alpha\in[0,1]\Big)\ \Big(\forall i\in N\Big).\end{gathered}$$

効率性 (EF) は, 全体提携値のある値 $t\in w(N)$ が実現したとき, 解写像 σ は t をプレイヤー間で余すことなく配分しなければならないことを意味し, 脚注で 6 述べた「全体提携の実現値についての効率性」である. 対称性 (SYM) は, プレイヤーの配分は提携値のみに依存し, プレイヤーの名前や番号には依存しないことを意味す

る. ナルプレイヤー条件 (NP) は, σ がナルプレイヤーに与える利得はゼロでなければならないことを示す. 加法性-1 および加法性-2 は, いずれも異なる 2 つの区間ゲーム $w', w'' \in IG$ に対して, $(w' + w'')(S) = w'(S) + w''(S)$ で定義されるの和の区間ゲーム $(w' + w'') \in IG$ についての公理である. 加法性-1 (AD1) は, 解写像 σ がプレイヤー i に対して, (i) 区間ゲーム w' で $t' \in w'(N)$ が実現したときには $\sigma_i(w')(t')$ を与え, (ii) 区間ゲーム w'' で $t'' \in w''(N)$ が実現したときには $\sigma_i(w'')(t'')$ を与えるのであれば, (iii) w' と w'' の和の区間ゲーム $(w'+w'') \in IG$ で $t' + t'' \in (w' + w'')(N)$ が実現したときには, $\sigma_i(w')(t') + \sigma_i(w'')(t'')$ を与えなければならないことを意味する. 加法性-2 (AD2) は加法性-1 と似ているが, 各区間ゲームにおける実現値についての制約を加えている. すなわち, 加法性-1 がすべての $t' \in w'(N)$ および $t'' \in w''(N)$ の組み合わせについて (15) 式が成り立つことを課しているのに対し, 加法性-2 は, 全体提携を内分する 2 つの区間ゲームに共通の比率 α を考え, 式 (16) および式 (17) を満たす t' および t'' に対してのみ, 式 (18) が満たされることを課すのである. したがって, 解写像 σ が満たすべき条件としての加法性-1 と加法性-2 を比較すると, 加法性-1 の方がより厳しい条件となる.

以上の公理系と解写像の関係について, まずは以下の定理 (ある種の「不可能性定理」) を示す.

定理 4.2 *EF, SYM, NP* および *AD1* を同時に満たす解写像は存在しない.

証明 矛盾を導くために, 解写像 σ が EF, SYM, NP および AD1 を満たすと仮定する. 以下の 3 人区間ゲーム w および w_1, w_2 and w_3 を考える. $w = w_1 + w_2 + w_3$ が満たされていることに注意する.

$$\begin{cases} w(1) = [0,1] \\ w(2) = [0,1] \\ w(3) = [0,1] \\ w(12) = [0,2] \\ w(13) = [0,2] \\ w(23) = [0,2] \\ w(123) = [0,3] \end{cases} \quad \begin{cases} w_1(1) = [0,1] \\ w_1(2) = [0,0] \\ w_1(3) = [0,0] \\ w_1(12) = [0,1] \\ w_1(13) = [0,1] \\ w_1(23) = [0,0] \\ w_1(123) = [0,1] \end{cases} \quad \begin{cases} w_2(1) = [0,0] \\ w_2(2) = [0,1] \\ w_2(3) = [0,0] \\ w_2(12) = [0,1] \\ w_2(13) = [0,0] \\ w_2(23) = [0,1] \\ w_2(123) = [0,1] \end{cases} \quad \begin{cases} w_3(1) = [0,0] \\ w_3(2) = [0,0] \\ w_3(3) = [0,1] \\ w_3(12) = [0,0] \\ w_3(13) = [0,1] \\ w_3(23) = [0,1] \\ w_3(123) = [0,1] \end{cases}$$

w_1 においては 2 と 3 がナルプレイヤー, w_2 においては 1 と 3 がナルプレイヤー, w_3 においては 1 と 2 がナルプレイヤーである. したがって, t_1, t_2, t_3 をそれぞれ w_1, w_2 and w_3 における実現値とすると, NP より以下が成り立つ.

$$\sigma(w_1)(t_1) = (t_1, 0, 0), \quad \sigma(w_2)(t_2) = (0, t_2, 0), \quad \sigma(w_3)(t_3) = (0, 0, t_3).$$

また, AD1 より, 以下が成り立つ.

$$\sigma(w)(t_1 + t_2 + t_3) = \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) = (t_1, t_2, t_3).$$

しかし $t_1 = t_2 = t_3$ である場合を除き, これは SYM に矛盾する. ■

定理 4.2 を踏まえ, 以下では, 区間ゲームにおける解写像が満たすべき加法性として, AD1 ではなく AD2 を考える. 本分析の主命題は以下の定理 4.3 である.

定理 4.3 *(10)* で定義されるシャープレイ写像 σ^* は, *EF, SYM, NP* および *AD2* を満たす唯一の解写像である.

定理 4.3 は, 以下の補題 4.1 および補題 4.2 を示すことで, 直ちに明らかとなる.

補題 4.1 シャープレイ写像 σ^* は *EF, SYM, NP* および *AD2* を満たす.

補題 4.2 *EF, SYM, NP* および *AD2* を満たす解写像はシャープレイ写像 σ^* に限られる.

以下では, 3 人区間ゲームにおいて補題 4.1 および補題 4.2 が成り立つことを示す.

4.3 3 人区間ゲームにおける主命題の証明

式 (19) で表される一般的な 3 人区間ゲーム $w \in IG^{\{123\}}$ を考える.

$$\begin{gathered} w(1) = [\underline{w}(1), \overline{w}(1)] \; w(2) = [\underline{w}(2), \overline{w}(2)] \; w(3) = [\underline{w}(3), \overline{w}(3)] \\ w(12) = [\underline{w}(12), \overline{w}(12)] \; w(13) = [\underline{w}(13), \overline{w}(13)] \; w(23) = [\underline{w}(23), \overline{w}(23)] \; w(123) = [\underline{w}(123), \overline{w}(123)] \end{gathered} \tag{19}$$

式 (10) によって与えられるシャープレイ写像 $\sigma_i^*(w)(t)$ は, 式 (19) の一般的な 3 人ゲームでは, 以下の式 (20) で表現できる (以下では一般性を失わず, プレイヤー 1 についての表現 $\sigma_1^*(w)(t)$ を与える).

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(w)(t) &= \frac{1}{6}\left[v_w^\alpha(1) + v_w^\alpha(1) + \{v_w^\alpha(12) - v_w^\alpha(2)\} + \{v_w^\alpha(123) - v_w^\alpha(23)\} + \{v_w^\alpha(13) - v_w^\alpha(3)\} + \{v_w^\alpha(123) - v_w^\alpha(23)\}\right] \\ &= \frac{1}{6}\Big[2(1-\alpha)\underline{w}(1) + 2\alpha\overline{w}(1) + \Big\{(1-\alpha)\underline{w}(12) + \alpha\overline{w}(12) - (1-\alpha)\underline{w}(2) - \alpha\overline{w}(2)\Big\} \\ &\quad + \Big\{(1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) - (1-\alpha)\underline{w}(23) - \alpha\overline{w}(23)\Big\} \\ &\quad + \Big\{(1-\alpha)\underline{w}(13) + \alpha\overline{w}(13) - (1-\alpha)\underline{w}(3) - \alpha\overline{w}(3)\Big\} + \Big\{(1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) - (1-\alpha)\underline{w}(23) - \alpha\overline{w}(23)\Big\}\Big] \\ &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{2-2\alpha\} + \overline{w}(1)\{2\alpha\} + \underline{w}(2)\{\alpha-1\} + \overline{w}(2)\{-\alpha\} + \underline{w}(3)\{\alpha-1\} + \overline{w}(3)\{-\alpha\} \\ &\quad + \underline{w}(12)\{1-\alpha\} + \overline{w}(12)\{\alpha\} + \underline{w}(13)\{1-\alpha\} + \overline{w}(13)\{\alpha\} + \underline{w}(23)\{2\alpha-2\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} \\ &\quad + \underline{w}(123)\{2-2\alpha\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big]. \end{aligned} \tag{20}$$

以上の準備のもと, 補題 4.1 および補題 4.2 を証明する.

補題 4.1 の証明

SYM については σ^* の定義より明らかである. EF については, 式 (10) および特性関数形ゲームにおいて定義されるシャープレイ値 ϕ の効率性 (efficiency) より以下が成り立つことよりいえる:

$$\sum_i \sigma_i^*(w)(t) = \sum_i \phi_i(v_w^\alpha) = v_w^\alpha(123) = t.$$

NP については, 1 をナルプレイヤーとすると, (20) より,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^*(w)(t) &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{2-2\alpha\}+\overline{w}(1)\{2\alpha\}+\underline{w}(2)\{\alpha-1\}+\overline{w}(2)\{-\alpha\}+\underline{w}(3)\{\alpha-1\}+\overline{w}(3)\{-\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(12)\{1-\alpha\}+\overline{w}(12)\{\alpha\}+\underline{w}(13)\{1-\alpha\}+\overline{w}(13)\{\alpha\}+\underline{w}(23)\{2\alpha-2\}+\overline{w}(23)\{-2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(123)\{2-2\alpha\}+\overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\
&= \frac{1}{6}\Big[0+0+\underline{w}(2)\{\alpha-1\}+\overline{w}(2)\{-\alpha\}+\underline{w}(3)\{\alpha-1\}+\overline{w}(3)\{-\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(2)\{1-\alpha\}+\overline{w}(2)\{\alpha\}+\underline{w}(3)\{1-\alpha\}+\overline{w}(3)\{\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(23)\{2\alpha-2\}+\overline{w}(23)\{-2\alpha\}+\underline{w}(23)\{2-2\alpha\}+\overline{w}(23)\{2\alpha\}\Big] \leftarrow \text{この行は足してゼロ} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. 最後に, AD2 について, プレイヤー 1 について証明する. 任意の $w' \in IG^{\{123\}}$ と $w'' \in IG^{\{123\}}$, および $t' \in w'(123)$ と $t'' \in w''(123)$ を考える. 式 (20) より,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^*(w')(t') &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w'}(1)\{2-2\alpha'\}+\overline{w'}(1)\{2\alpha'\}+\ldots+\underline{w'}(123)\{2-2\alpha'\}+\overline{w'}(123)\{2\alpha'\}\Big] \\
\sigma_1^*(w'')(t'') &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w''}(1)\{2-2\alpha''\}+\overline{w''}(1)\{2\alpha''\}+\ldots+\underline{w''}(123)\{2-2\alpha''\}+\overline{w''}(123)\{2\alpha''\}\Big]
\end{aligned}$$

である. ただし α' と α'' はそれぞれ $t' = (1-\alpha')\underline{w'}(123)+\alpha'\overline{w'}(123)$ および $t'' = (1-\alpha'')\underline{w''}(123)+\alpha''\overline{w''}(123)$ を満たしている. 今, $\alpha' = \alpha'' = \alpha$ とすると,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^*(w')(t')+\sigma_1^*(w'')(t'') &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w'}(1)\{2-2\alpha\}+\overline{w'}(1)\{2\alpha\}+\underline{w'}(2)\{\alpha-1\}+\overline{w'}(2)\{-\alpha\}+\underline{w'}(3)\{\alpha-1\}+\overline{w'}(3)\{-\alpha\} \\
&\quad +\underline{w'}(12)\{1-\alpha\}+\overline{w'}(12)\{\alpha\}+\underline{w'}(13)\{1-\alpha\}+\overline{w'}(13)\{\alpha\}+\underline{w'}(23)\{2\alpha-2\}+\overline{w'}(23)\{-2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w'}(123)\{2-2\alpha\}+\overline{w'}(123)\{2\alpha\}\Big] \\
&+ \frac{1}{6}\Big[\underline{w''}(1)\{2-2\alpha\}+\overline{w''}(1)\{2\alpha\}+\underline{w''}(2)\{\alpha-1\}+\overline{w''}(2)\{-\alpha\}+\underline{w''}(3)\{\alpha-1\}+\overline{w''}(3)\{-\alpha\} \\
&\quad +\underline{w''}(12)\{1-\alpha\}+\overline{w''}(12)\{\alpha\}+\underline{w''}(13)\{1-\alpha\}+\overline{w''}(13)\{\alpha\}+\underline{w''}(23)\{2\alpha-2\}+\overline{w''}(23)\{-2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w''}(123)\{2-2\alpha\}+\overline{w''}(123)\{2\alpha\}\Big] \\
&= \frac{1}{6}\Big[(1-\alpha)\underline{w'}(1)+\alpha\overline{w'}(1)+(1-\alpha)\underline{w''}(1)+\alpha\overline{w''}(1) \quad (\leftarrow\ v^{\alpha}_{w'}+v^{\alpha}_{w''} \in IG \text{ の順列 123 における 1 の貢献度}) \\
&\quad +(1-\alpha)\underline{w'}(1)+\alpha\overline{w'}(1)+(1-\alpha)\underline{w''}(1)+\alpha\overline{w''}(1) \quad (\leftarrow\ \text{順列 132 における貢献度}) \\
&\quad +(1-\alpha)\underline{w'}(12)+\alpha\overline{w'}(12)+(1-\alpha)\underline{w''}(12)+\alpha\overline{w''}(12) \\
&\quad -(1-\alpha)\underline{w'}(2)-\alpha\overline{w'}(2)-(1-\alpha)\underline{w''}(2)-\alpha\overline{w''}(2) \quad (\leftarrow\ \text{順列 213 における貢献度}) \\
&\quad +(1-\alpha)\underline{w'}(13)+\alpha\overline{w'}(13)+(1-\alpha)\underline{w''}(13)+\alpha\overline{w''}(13) \\
&\quad -(1-\alpha)\underline{w'}(3)-\alpha\overline{w'}(3)-(1-\alpha)\underline{w''}(3)-\alpha\overline{w''}(3) \quad (\leftarrow\ \text{順列 312 における貢献度}) \\
&\quad +(1-\alpha)\underline{w'}(123)+\alpha\overline{w'}(123)+(1-\alpha)\underline{w''}(123)+\alpha\overline{w''}(123) \\
&\quad -(1-\alpha)\underline{w'}(23)-\alpha\overline{w'}(23)-(1-\alpha)\underline{w''}(23)-\alpha\overline{w''}(23) \quad (\leftarrow\ \text{順列 231 における貢献度}) \\
&\quad +(1-\alpha)\underline{w'}(123)+\alpha\overline{w'}(123)+(1-\alpha)\underline{w''}(123)+\alpha\overline{w''}(123) \\
&\quad -(1-\alpha)\underline{w'}(23)-\alpha\overline{w'}(23)-(1-\alpha)\underline{w''}(23)-\alpha\overline{w''}(23)\Big] \quad (\leftarrow\ \text{順列 321 における貢献度}) \\
&= \phi_1(v^{\alpha}_{w'}+v^{\alpha}_{w''}) = \sigma_1^*(w'+w'')(t'+t'')
\end{aligned}$$

が満たされる. ■

補題 **4.2** の証明

σ を 4 つの公理 EF, SYM, NP, AD2 を満たす解写像とすると, σ は式 (20) で表現される σ^* と一致することを示す. 以下, 場合分けして考える.

ケース 1: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム $w \in IG^{\{123\}}$ に対し, 以下の $w_1, w_2, \ldots, w_7$ がすべて区間ゲームとして定義可能 (すなわち, 以下のすべての表現 $[a,b]$ に対し, $a \le b$ が成立しており, $[a,b]$ を閉区間として定義できる) であるとする.

$$\begin{cases} w_1(1) &= [\underline{w}(1), \overline{w}(1)] \\ w_1(2) &= [0,0] \\ w_1(3) &= [0,0] \\ w_1(12) &= [\underline{w}(1), \overline{w}(1)] \\ w_1(13) &= [\underline{w}(1), \overline{w}(1)] \\ w_1(23) &= [0,0] \\ w_1(123) &= [\underline{w}(1), \overline{w}(1)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_2(1) &= [0,0] \\ w_2(2) &= [\underline{w}(2), \overline{w}(2)] \\ w_2(3) &= [0,0] \\ w_2(12) &= [\underline{w}(2), \overline{w}(2)] \\ w_2(13) &= [0,0] \\ w_2(23) &= [\underline{w}(2), \overline{w}(2)] \\ w_2(123) &= [\underline{w}(2), \overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_3(1) &= [0,0] \\ w_3(2) &= [0,0] \\ w_3(3) &= [\underline{w}(3), \overline{w}(3)] \\ w_3(12) &= [0,0] \\ w_3(13) &= [\underline{w}(3), \overline{w}(3)] \\ w_3(23) &= [\underline{w}(3), \overline{w}(3)] \\ w_3(123) &= [\underline{w}(3), \overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_4(1) &= [0,0] \\ w_4(2) &= [0,0] \\ w_4(3) &= [0,0] \\ w_4(12) &= [\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2), \\ & \quad \overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2)] \\ w_4(13) &= [0,0] \\ w_4(23) &= [0,0] \\ w_4(123) &= [\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2), \\ & \quad \overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_5(1) &= [0,0] \\ w_5(2) &= [0,0] \\ w_5(3) &= [0,0] \\ w_5(12) &= [0,0] \\ w_5(13) &= [\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3)] \\ w_5(23) &= [0,0] \\ w_5(123) &= [\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_6(1) &= [0,0] \\ w_6(2) &= [0,0] \\ w_6(3) &= [0,0] \\ w_6(12) &= [0,0] \\ w_6(13) &= [0,0] \\ w_6(23) &= [\underline{w}(23) - \underline{w}(2) - \underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(23) - \overline{w}(2) - \overline{w}(3)] \\ w_6(123) &= [\underline{w}(23) - \underline{w}(2) - \underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(23) - \overline{w}(2) - \overline{w}(3)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_7(1) &= [0,0] \\ w_7(2) &= [0,0] \\ w_7(3) &= [0,0] \\ w_7(12) &= [0,0] \\ w_7(13) &= [0,0] \\ w_7(23) &= [0,0] \\ w_7(123) &= [\underline{w}(123) - \underline{w}(12) - \underline{w}(13) - \underline{w}(23) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2) + \underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(123) - \overline{w}(12) - \overline{w}(13) - \overline{w}(23) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2) + \overline{w}(3)] \end{cases}$$

ここで $\sum_{i=1}^{7} w_i = w$ である. 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,\ldots,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1), 0, 0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0, (1-\alpha)\underline{w}(2) + \alpha\overline{w}(2), 0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0, 0, (1-\alpha)\underline{w}(3) + \alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2)) + \alpha(\overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2)) + \alpha(\overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2))}{2}, 0 \right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3))}{2}, 0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3))}{2} \right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right)$$

となる. 一般性を失うことなく, 以下はプレイヤー 1 について考える. $\sum_{i=1}^{7} w_i = w$ なので, AD2 より,

$$\begin{aligned}
\sigma_1(w)(t) &= (1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1)+0+0+ \\
&+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2))+\alpha(\overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2))}{2}+\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}+0 \\
&+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3} \\
&= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha)-3(1-\alpha)-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(1)\{6\alpha-3\alpha-3\alpha+2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(2)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(2)\{-3\alpha+2\alpha\}+\underline{w}(3)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(3)\{-3\alpha+2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(12)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(12)\{3\alpha-2\alpha\}+\underline{w}(13)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(13)\{3\alpha-2\alpha\} \\
&\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(23)\{-2\alpha\}+\underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\}+\overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\
&= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)).
\end{aligned}$$

ケース 2: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム $w \in IG^{\{123\}}$ に対し, **ケース 1** における w_4 のみ定義不可能 (すなわち $\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2) > \overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)$) な場合. w_4 以外は**ケース 1** と不変, w_4 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_1(1) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) &=& [0,0] \\ w_1(3) &=& [0,0] \\ w_1(12) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) &=& [0,0] \\ w_1(123) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_2(1) &=& [0,0] \\ w_2(2) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) &=& [0,0] \\ w_2(12) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) &=& [0,0] \\ w_2(23) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_3(1) &=& [0,0] \\ w_3(2) &=& [0,0] \\ w_3(3) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) &=& [0,0] \\ w_3(13) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} w_4(1) &=& [0,0] \\ w_4(2) &=& [0,0] \\ w_4(3) &=& [0,0] \\ w_4(12) &=& [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ && -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) &=& [0,0] \\ w_4(23) &=& [0,0] \\ w_4(123) &=& [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ && -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_5(1) &=& [0,0] \\ w_5(2) &=& [0,0] \\ w_5(3) &=& [0,0] \\ w_5(12) &=& [0,0] \\ w_5(13) &=& [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ && \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \\ w_5(23) &=& [0,0] \\ w_5(123) &=& [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ && \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_6(1) &=& [0,0] \\ w_6(2) &=& [0,0] \\ w_6(3) &=& [0,0] \\ w_6(12) &=& [0,0] \\ w_6(13) &=& [0,0] \\ w_6(23) &=& [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ && \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \\ w_6(123) &=& [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ && \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_7(1) &=& [0,0] \\ w_7(2) &=& [0,0] \\ w_7(3) &=& [0,0] \\ w_7(12) &=& [0,0] \\ w_7(13) &=& [0,0] \\ w_7(23) &=& [0,0] \\ w_7(123) &=& [\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ && \overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \end{cases}$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,...,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1), 0, 0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0, (1-\alpha)\underline{w}(2) + \alpha\overline{w}(2), 0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0, 0, (1-\alpha)\underline{w}(3) + \alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, 0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}, 0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_5 + w_6 + w_7. \tag{21}$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\
t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123)
\end{aligned}
$$

(21) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$
\sigma(w + w_4)(t + t_4) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) \tag{22}
$$

$$
\sigma(\Sigma_{j=1,j\neq 4}^{7} w_j)(\Sigma_{j=1,j\neq 4}^{7} t_j) = \Sigma_{j=1,j\neq 4}^{7} \sigma(w_j)(t_j) \tag{23}
$$

(22) と (23) の左辺同士を比較すると, (21) および $t + t_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_5 + t_6 + t_7$ より, (22) と (23) の左辺は等しい. ゆえに,

$$
\begin{aligned}
\sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) &= \sum_{j=1,j\neq 4}^{7} \sigma(w_j)(t_j) \\
\sigma(w)(t) &= \sum_{j=1,j\neq 4}^{7} \sigma(w_j)(t_j) - \sigma(w_4)(t_4) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (24) より,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(w)(t) &= (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 + \\
&+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3))}{2} + 0 + \\
&+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123) - \underline{w}(12) - \underline{w}(13) - \underline{w}(23) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2) + \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(123) - \overline{w}(12) - \overline{w}(13) - \overline{w}(23) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2) + \overline{w}(3))}{3} \\
&- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2)) + \alpha(-\overline{w}(12) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2))}{2} \\
&= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha) - 3(1-\alpha) + 2(1-\alpha) - 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha - 3\alpha + 2\alpha - 3\alpha\} \\
&\quad + \underline{w}(2)\{2(1-\alpha) - 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{2\alpha - 3\alpha\} + \underline{w}(3)\{-3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{-3\alpha + 2\alpha\} \\
&\quad + \underline{w}(12)\{-2(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{-2\alpha + 3\alpha\} + \underline{w}(13)\{3(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{3\alpha - 2\alpha\} \\
&\quad + \underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\
&= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20))
\end{aligned}
$$

ケース 3: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_5 のみ定義不可能 (すなわち $\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3) > \overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3)$) な場合. $\Rightarrow$ **ケース 2 と同様であり, 証明略**.

ケース 4: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_6 のみ定義不可能 (すなわち $\underline{w}(23) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3) > \overline{w}(23) - \overline{w}(2) - \overline{w}(3)$) な場合. $\Rightarrow$ **ケース 2 と同様であり, 証明略**

ケース 5: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_7 のみ定義不可能 (すなわち $\underline{w}(123) - \underline{w}(12) - \underline{w}(13) - \underline{w}(23) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2) + \underline{w}(3) > \overline{w}(123) - \overline{w}(12) - \overline{w}(13) - \overline{w}(23) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2) + \overline{w}(3)$) な場合. w_7 以外は**ケース 1** と不変, w_7 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\begin{cases} w_1(1) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) &=& [0,0] \\ w_1(3) &=& [0,0] \\ w_1(12) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) &=& [0,0] \\ w_1(123) &=& [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_2(1) &=& [0,0] \\ w_2(2) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) &=& [0,0] \\ w_2(12) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) &=& [0,0] \\ w_2(23) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) &=& [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_3(1) &=& [0,0] \\ w_3(2) &=& [0,0] \\ w_3(3) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) &=& [0,0] \\ w_3(13) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) &=& [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_4(1) &=& [0,0] \\ w_4(2) &=& [0,0] \\ w_4(3) &=& [0,0] \\ w_4(12) &=& [\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2), \\ && \quad \overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)] \\ w_4(13) &=& [0,0] \\ w_4(23) &=& [0,0] \\ w_4(123) &=& [\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2), \\ && \quad \overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_5(1) &=& [0,0] \\ w_5(2) &=& [0,0] \\ w_5(3) &=& [0,0] \\ w_5(12) &=& [0,0] \\ w_5(13) &=& [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ && \quad \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \\ w_5(23) &=& [0,0] \\ w_5(123) &=& [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ && \quad \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_6(1) &=& [0,0] \\ w_6(2) &=& [0,0] \\ w_6(3) &=& [0,0] \\ w_6(12) &=& [0,0] \\ w_6(13) &=& [0,0] \\ w_6(23) &=& [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ && \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \\ w_6(123) &=& [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ && \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_7(1) &=& [0,0] \\ w_7(2) &=& [0,0] \\ w_7(3) &=& [0,0] \\ w_7(12) &=& [0,0] \\ w_7(13) &=& [0,0] \\ w_7(23) &=& [0,0] \\ w_7(123) &=& [-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ && \quad -\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{cases}$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,...,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1), 0, 0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0, (1-\alpha)\underline{w}(2) + \alpha\overline{w}(2), 0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0, 0, (1-\alpha)\underline{w}(3) + \alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)) + \alpha(\overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)) + \alpha(\overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2))}{2}, 0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}, 0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_7 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6. \tag{25}$$

これまでと同様に, 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(25) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\sigma(w + w_7)(t + t_7) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_7)(t_7) \tag{26}$$

$$\sigma(\Sigma_{j=1}^{6} w_j)(\Sigma_{j=1}^{6} t_j) = \Sigma_{j=1}^{6} \sigma(w_j)(t_j) \tag{27}$$

(26) と (27) の左辺同士を比較すると, (25) および $t + t_7 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$ より, (26) と (27) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sigma(w_7)(t_7) &= \sum_{j=1}^{6} \sigma(w_j)(t_j) \\ \sigma(w)(t) &= \sum_{j=1}^{6} \sigma(w_j)(t_j) - \sigma(w_7)(t_7) \end{aligned} \tag{28}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (28) より,

$$\begin{aligned} &\sigma_1(w)(t) = \\ &\quad (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 + \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2)) + \alpha(\overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2))}{2} \\ &+ \quad \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3))}{2} + 0 + \\ &- \quad \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123) + \underline{w}(12) + \underline{w}(13) + \underline{w}(23) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2) - \underline{w}(3)) + \alpha(-\overline{w}(123) + \overline{w}(12) + \overline{w}(13) + \overline{w}(23) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2) - \overline{w}(3))}{3} \\ &= \quad \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha) - 3(1-\alpha) - 3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha - 3\alpha - 3\alpha + 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(2)\{-3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{-3\alpha + 2\alpha\} + \underline{w}(3)\{-3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{-3\alpha + 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(12)\{3(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{3\alpha - 2\alpha\} + \underline{w}(13)\{3(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{3\alpha - 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\ &= \quad \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \end{aligned}$$

ケース 6: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_5 が定義不可能 (すなわち $\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2) > \overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2)$ かつ $\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3) > \overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3)$) な場合. w_4 と w_5 以外は**ケース 1** と不変, w_4 と w_5 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_1(1) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) & = & [0,0] \\ w_1(3) & = & [0,0] \\ w_1(12) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) & = & [0,0] \\ w_1(123) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_2(1) & = & [0,0] \\ w_2(2) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) & = & [0,0] \\ w_2(12) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) & = & [0,0] \\ w_2(23) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_3(1) & = & [0,0] \\ w_3(2) & = & [0,0] \\ w_3(3) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) & = & [0,0] \\ w_3(13) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_4(1) & = & [0,0] \\ w_4(2) & = & [0,0] \\ w_4(3) & = & [0,0] \\ w_4(12) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \;-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) & = & [0,0] \\ w_4(23) & = & [0,0] \\ w_4(123) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \;-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_5(1) & = & [0,0] \\ w_5(2) & = & [0,0] \\ w_5(3) & = & [0,0] \\ w_5(12) & = & [0,0] \\ w_5(13) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \;-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \\ w_5(23) & = & [0,0] \\ w_5(123) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \;-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_6(1) & = & [0,0] \\ w_6(2) & = & [0,0] \\ w_6(3) & = & [0,0] \\ w_6(12) & = & [0,0] \\ w_6(13) & = & [0,0] \\ w_6(23) & = & [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \;\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \\ w_6(123) & = & [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \;\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_7(1) & = & [0,0] \\ w_7(2) & = & [0,0] \\ w_7(3) & = & [0,0] \\ w_7(12) & = & [0,0] \\ w_7(13) & = & [0,0] \\ w_7(23) & = & [0,0] \\ w_7(123) & = & [\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \;\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,...,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1),0,0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0,(1-\alpha)\underline{w}(2)+\alpha\overline{w}(2),0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0,0,(1-\alpha)\underline{w}(3)+\alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2},0,\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0,\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2},\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3},\text{同じ},\text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 + w_5 = w_1 + w_2 + w_3 + w_6 + w_7. \tag{29}$$

これまで同様, 任意の $\alpha \leq\in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(29) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\begin{aligned} \sigma(w + w_4 + w_5)(t + t_4 + t_5) &= \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) && (30) \\ \sigma(w_1 + w_2 + w_3 + w_6 + w_7)(t_1 + t_2 + t_3 + t_6 + t_7) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) + \sigma(w_7)(t_7) && (31) \end{aligned}$$

(30) と (31) の左辺同士を比較すると, (29) および $t + t_4 + t_5 = t_1 + t_2 + t_3 + t_6 + t_7$ より, (30) と (31) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) + \sigma(w_7)(t_7) \\ \sigma(w)(t) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) + \sigma(w_7)(t_7) - \sigma(w_4)(t_4) - \sigma(w_5)(t_5) \quad (32) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (32) より,

$$\begin{aligned} \sigma_1(w)(t) &= (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 + 0 \\ &+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123) - \underline{w}(12) - \underline{w}(13) - \underline{w}(23) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2) + \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(123) - \overline{w}(12) - \overline{w}(13) - \overline{w}(23) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2) + \overline{w}(3))}{3} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2)) + \alpha(-\overline{w}(12) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2))}{2} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13) + \underline{w}(1) + \underline{w}(3)) + \alpha(-\overline{w}(13) + \overline{w}(1) + \overline{w}(3))}{2} \\ &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha) + 2(1-\alpha) - 3(1-\alpha) - 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha + 2\alpha - 3\alpha - 3\alpha\} \\ &\quad + \underline{w}(2)\{2(1-\alpha) - 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{2\alpha - 3\alpha\} + \underline{w}(3)\{2(1-\alpha) - 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{2\alpha - 3\alpha\} \\ &\quad + \underline{w}(12)\{-2(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{-2\alpha + 3\alpha\} + \underline{w}(13)\{-2(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{-2\alpha + 3\alpha\} \\ &\quad + \underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\ &= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \end{aligned}$$

ケース 7: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_6 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 6 と同様であり, 証明略.**

ケース 8: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_7 が定義不可能 (すなわち $\underline{w}(12) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2) > \overline{w}(12) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2)$ かつ $\underline{w}(123) - \underline{w}(12) - \underline{w}(13) - \underline{w}(23) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2) + \underline{w}(3) > \overline{w}(123) - \overline{w}(12) - \overline{w}(13) - \overline{w}(23) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2) + \overline{w}(3)$) な場合. w_4 と w_7 以外は**ケース 1** と不変, w_4 と w_7 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\begin{cases} w_1(1) &= [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) &= [0,0] \\ w_1(3) &= [0,0] \\ w_1(12) &= [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) &= [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) &= [0,0] \\ w_1(123) &= [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_2(1) &= [0,0] \\ w_2(2) &= [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) &= [0,0] \\ w_2(12) &= [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) &= [0,0] \\ w_2(23) &= [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) &= [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_3(1) &= [0,0] \\ w_3(2) &= [0,0] \\ w_3(3) &= [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) &= [0,0] \\ w_3(13) &= [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) &= [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) &= [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_4(1) &= [0,0] \\ w_4(2) &= [0,0] \\ w_4(3) &= [0,0] \\ w_4(12) &= [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) &= [0,0] \\ w_4(23) &= [0,0] \\ w_4(123) &= [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_5(1) &= [0,0] \\ w_5(2) &= [0,0] \\ w_5(3) &= [0,0] \\ w_5(12) &= [0,0] \\ w_5(13) &= [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \\ w_5(23) &= [0,0] \\ w_5(123) &= [\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_6(1) &= [0,0] \\ w_6(2) &= [0,0] \\ w_6(3) &= [0,0] \\ w_6(12) &= [0,0] \\ w_6(13) &= [0,0] \\ w_6(23) &= [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \\ w_6(123) &= [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{cases} \quad \begin{cases} w_7(1) &= [0,0] \\ w_7(2) &= [0,0] \\ w_7(3) &= [0,0] \\ w_7(12) &= [0,0] \\ w_7(13) &= [0,0] \\ w_7(23) &= [0,0] \\ w_7(123) &= [-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & \quad -\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{cases}$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,...,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1), 0, 0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0, (1-\alpha)\underline{w}(2) + \alpha\overline{w}(2), 0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0, 0, (1-\alpha)\underline{w}(3) + \alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,

$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)) + \alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)) + \alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, 0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,

$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}, 0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,

$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,

$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)) + \alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 + w_7 = w_1 + w_2 + w_3 + w_5 + w_6. \tag{33}$$

これまで同様, 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(33) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\sigma(w + w_4 + w_7)(t + t_4 + t_7) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_7)(t_7) \tag{34}$$

$$\sigma(w_1 + w_2 + w_3 + w_5 + w_6)(t_1 + t_2 + t_3 + t_5 + t_6) = \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) \tag{35}$$

(34) と (35) の左辺同士を比較すると, (33) および $t + t_4 + t_7 = t_1 + t_2 + t_3 + t_5 + t_6$ より, (34) と (35) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_7)(t_7) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) \\ \sigma(w)(t) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) - \sigma(w_4)(t_4) - \sigma(w_7)(t_7) \end{aligned} \tag{36}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (36) より,

$$\begin{aligned} &\sigma_1(w)(t) = \\ &\quad (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 \\ &+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(13) - \underline{w}(1) - \underline{w}(3)) + \alpha(\overline{w}(13) - \overline{w}(1) - \overline{w}(3))}{2} + 0 \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12) + \underline{w}(1) + \underline{w}(2)) + \alpha(-\overline{w}(12) + \overline{w}(1) + \overline{w}(2))}{2} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123) + \underline{w}(12) + \underline{w}(13) + \underline{w}(23) - \underline{w}(1) - \underline{w}(2) - \underline{w}(3)) + \alpha(-\overline{w}(123) + \overline{w}(12) + \overline{w}(13) + \overline{w}(23) - \overline{w}(1) - \overline{w}(2) - \overline{w}(3))}{3} \\ &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha) - 3(1-\alpha) - 3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha - 3\alpha - 3\alpha + 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(2)\{-3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{-3\alpha + 2\alpha\} + \underline{w}(3)\{-3(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{-3\alpha + 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(12)\{3(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{3\alpha - 2\alpha\} + \underline{w}(13)\{3(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{3\alpha - 2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\ &= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \end{aligned}$$

ケース 9: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_5 と w_6 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 8 と同様であり, 証明略.**

ケース 10: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_5 と w_7 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 8 と同様であり, 証明略.**

ケース 11: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_6 と w_7 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 8 と同様であり, 証明略.**

ケース 12: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_5 と w_6 が定義不可能 (すなわち $\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)>\overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)$ かつ $\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)>\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)$ かつ $\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3)>\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)$) な場合. w_4 と w_5 と w_6 以外は**ケース 1** と不変, w_4 と w_5 と w_6 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_1(1) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) & = & [0,0] \\ w_1(3) & = & [0,0] \\ w_1(12) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) & = & [0,0] \\ w_1(123) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_2(1) & = & [0,0] \\ w_2(2) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) & = & [0,0] \\ w_2(12) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) & = & [0,0] \\ w_2(23) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_3(1) & = & [0,0] \\ w_3(2) & = & [0,0] \\ w_3(3) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) & = & [0,0] \\ w_3(13) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_4(1) & = & [0,0] \\ w_4(2) & = & [0,0] \\ w_4(3) & = & [0,0] \\ w_4(12) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) & = & [0,0] \\ w_4(23) & = & [0,0] \\ w_4(123) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_5(1) & = & [0,0] \\ w_5(2) & = & [0,0] \\ w_5(3) & = & [0,0] \\ w_5(12) & = & [0,0] \\ w_5(13) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \\ w_5(23) & = & [0,0] \\ w_5(123) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_6(1) & = & [0,0] \\ w_6(2) & = & [0,0] \\ w_6(3) & = & [0,0] \\ w_6(12) & = & [0,0] \\ w_6(13) & = & [0,0] \\ w_6(23) & = & [-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \\ w_6(123) & = & [-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_7(1) & = & [0,0] \\ w_7(2) & = & [0,0] \\ w_7(3) & = & [0,0] \\ w_7(12) & = & [0,0] \\ w_7(13) & = & [0,0] \\ w_7(23) & = & [0,0] \\ w_7(123) & = & [\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

任意の $\alpha\in[0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i=(1-\alpha)\underline{w_i}(123)+\alpha\overline{w_i}(123)$ $(i\in\{1,2,\dots,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1)=((1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1),0,0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2)=(0,(1-\alpha)\underline{w}(2)+\alpha\overline{w}(2),0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3)=(0,0,(1-\alpha)\underline{w}(3)+\alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4)=$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5)=$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2},0,\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 + w_5 + w_6 = w_1 + w_2 + w_3 + w_7. \tag{37}$$

これまで同様, 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(37) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\sigma(w + w_4 + w_5 + w_6)(t + t_4 + t_5 + t_6) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) \tag{38}$$
$$\sigma(w_1 + w_2 + w_3 + w_7)(t_1 + t_2 + t_3 + t_7) = \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_7)(t_7) \tag{39}$$

(38) と (39) の左辺同士を比較すると, (37) および $t + t_4 + t_5 + t_6 = t_1 + t_2 + t_3 + t_7$ より, (38) と (39) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_7)(t_7) \\ \sigma(w)(t) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_7)(t_7) - \sigma(w_4)(t_4) - \sigma(w_5)(t_5) - \sigma(w_6)(t_6) \end{aligned} \tag{40}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (40) より,

$$\begin{aligned} \sigma_1(w)(t) &= (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 \\ &+ \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{3} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha)+2(1-\alpha)-3(1-\alpha)-3(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha+2\alpha-3\alpha-3\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(2)\{2(1-\alpha)-3(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{2\alpha-3\alpha\} + \underline{w}(3)\{2(1-\alpha)-3(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{2\alpha-3\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(12)\{-2(1-\alpha)+3(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{-2\alpha+3\alpha\} + \underline{w}(13)\{-2(1-\alpha)+3(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{-2\alpha+3\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\ &= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \end{aligned}$$

ケース 13: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_5 と w_7 が定義不可

能 (すなわち $\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)>\overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)$ かつ $\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3)>\overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)$ かつ $\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3)>\overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)$) な場合. w_4 と w_5 と w_7 以外は**ケース 1** と不変, w_4 と w_5 と w_7 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\left\{\begin{array}{ccl} w_1(1) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) & = & [0,0] \\ w_1(3) & = & [0,0] \\ w_1(12) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) & = & [0,0] \\ w_1(123) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccl} w_2(1) & = & [0,0] \\ w_2(2) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) & = & [0,0] \\ w_2(12) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) & = & [0,0] \\ w_2(23) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccl} w_3(1) & = & [0,0] \\ w_3(2) & = & [0,0] \\ w_3(3) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) & = & [0,0] \\ w_3(13) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccl} w_4(1) & = & [0,0] \\ w_4(2) & = & [0,0] \\ w_4(3) & = & [0,0] \\ w_4(12) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) & = & [0,0] \\ w_4(23) & = & [0,0] \\ w_4(123) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccl} w_5(1) & = & [0,0] \\ w_5(2) & = & [0,0] \\ w_5(3) & = & [0,0] \\ w_5(12) & = & [0,0] \\ w_5(13) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \\ w_5(23) & = & [0,0] \\ w_5(123) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccl} w_6(1) & = & [0,0] \\ w_6(2) & = & [0,0] \\ w_6(3) & = & [0,0] \\ w_6(12) & = & [0,0] \\ w_6(13) & = & [0,0] \\ w_6(23) & = & [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \\ w_6(123) & = & [\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \quad \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccl} w_7(1) & = & [0,0] \\ w_7(2) & = & [0,0] \\ w_7(3) & = & [0,0] \\ w_7(12) & = & [0,0] \\ w_7(13) & = & [0,0] \\ w_7(23) & = & [0,0] \\ w_7(123) & = & [-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

任意の $\alpha\in[0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i=(1-\alpha)\underline{w_i}(123)+\alpha\overline{w_i}(123)$ ($i\in\{1,2,\ldots,7\}$) であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1)=((1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1),0,0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2)=(0,(1-\alpha)\underline{w}(2)+\alpha\overline{w}(2),0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3)=(0,0,(1-\alpha)\underline{w}(3)+\alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4)=$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2},0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_5)(t_5)=$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2},0,\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(\overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,
$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 + w_5 + w_7 = w_1 + w_2 + w_3 + w_6. \tag{41}$$

これまで同様, 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(41) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\sigma(w + w_4 + w_5 + w_7)(t + t_4 + t_5 + t_7) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_7)(t_7) \tag{42}$$
$$\sigma(w_1 + w_2 + w_3 + w_6)(t_1 + t_2 + t_3 + t_6) = \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) \tag{43}$$

(42) と (43) の左辺同士を比較すると, (41) および $t + t_4 + t_5 + t_7 = t_1 + t_2 + t_3 + t_6$ より, (42) と (43) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_7)(t_7) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) \\ \sigma(w)(t) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) + \sigma(w_6)(t_6) \\ &\quad -\sigma(w_4)(t_4) - \sigma(w_5)(t_5) - \sigma(w_7)(t_7) \end{aligned} \tag{44}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (44) より,

$$\begin{aligned} &\sigma_1(w)(t) = \\ &\quad (1-\alpha)\underline{w}(1) + \alpha\overline{w}(1) + 0 + 0 + 0 \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2} \\ &- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3} \\ &= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha)-3(1-\alpha)-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\} + \overline{w}(1)\{6\alpha-3\alpha-3\alpha+2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(2)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\} + \overline{w}(2)\{-3\alpha+2\alpha\} + \underline{w}(3)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\} + \overline{w}(3)\{-3\alpha+2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(12)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(12)\{3\alpha-2\alpha\} + \underline{w}(13)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(13)\{3\alpha-2\alpha\} \\ &\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\} + \overline{w}(23)\{-2\alpha\} + \underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\} + \overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big] \\ &= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \end{aligned}$$

ケース 14: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_6 と w_7 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 13 と同様であり, 証明略.**

ケース 15: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_5 と w_6 と w_7 が定義不可能な場合. ⇒ **ケース 13 と同様であり, 証明略.**

ケース 16: (19) で定義される一般的な 3 人区間ゲーム w に対し, **ケース 1** における w_4 と w_5 と w_6 と w_7 が定義不可能 (すなわち $\underline{w}(12)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2) > \overline{w}(12)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)$ かつ $\underline{w}(13)-\underline{w}(1)-\underline{w}(3) > \overline{w}(13)-\overline{w}(1)-\overline{w}(3)$ かつ $\underline{w}(23)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3) > \overline{w}(23)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)$ かつ $\underline{w}(123)-\underline{w}(12)-\underline{w}(13)-\underline{w}(23)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3) > \overline{w}(123)-\overline{w}(12)-\overline{w}(13)-\overline{w}(23)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)$) な場合. w_4 と w_5 と w_7 以外は**ケース 1** と不変, w_4 と w_5 と w_7 のみ変更した以下の区間ゲーム w_1 から w_7 を考える.

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_1(1) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(2) & = & [0,0] \\ w_1(3) & = & [0,0] \\ w_1(12) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(13) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \\ w_1(23) & = & [0,0] \\ w_1(123) & = & [\underline{w}(1),\overline{w}(1)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_2(1) & = & [0,0] \\ w_2(2) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(3) & = & [0,0] \\ w_2(12) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(13) & = & [0,0] \\ w_2(23) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \\ w_2(123) & = & [\underline{w}(2),\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_3(1) & = & [0,0] \\ w_3(2) & = & [0,0] \\ w_3(3) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(12) & = & [0,0] \\ w_3(13) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(23) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \\ w_3(123) & = & [\underline{w}(3),\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_4(1) & = & [0,0] \\ w_4(2) & = & [0,0] \\ w_4(3) & = & [0,0] \\ w_4(12) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \\ w_4(13) & = & [0,0] \\ w_4(23) & = & [0,0] \\ w_4(123) & = & [-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2), \\ & & \quad -\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_5(1) & = & [0,0] \\ w_5(2) & = & [0,0] \\ w_5(3) & = & [0,0] \\ w_5(12) & = & [0,0] \\ w_5(13) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \\ w_5(23) & = & [0,0] \\ w_5(123) & = & [-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_6(1) & = & [0,0] \\ w_6(2) & = & [0,0] \\ w_6(3) & = & [0,0] \\ w_6(12) & = & [0,0] \\ w_6(13) & = & [0,0] \\ w_6(23) & = & [-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \\ w_6(123) & = & [-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} w_7(1) & = & [0,0] \\ w_7(2) & = & [0,0] \\ w_7(3) & = & [0,0] \\ w_7(12) & = & [0,0] \\ w_7(13) & = & [0,0] \\ w_7(23) & = & [0,0] \\ w_7(123) & = & [-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3), \\ & & \quad -\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3)] \end{array}\right.$$

任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, 各ゲームにおいて実現値が $t_i = (1-\alpha)\underline{w_i}(123) + \alpha\overline{w_i}(123)$ $(i \in \{1,2,...,7\})$ であるときに σ が与える利得ベクトルを考える.

w_1 においては, プレイヤー 2 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_1)(t_1) = ((1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1),0,0)$.

w_2 においては, プレイヤー 1 および 3 が Null であることと EF より, $\sigma(w_2)(t_2) = (0,(1-\alpha)\underline{w}(2)+\alpha\overline{w}(2),0)$.

w_3 においては, プレイヤー 1 および 2 が Null であることと EF より, $\sigma(w_3)(t_3) = (0,0,(1-\alpha)\underline{w}(3)+\alpha\overline{w}(3))$.

w_4 においては, プレイヤー 1 と 2 が対称であることと, 3 が Null であることと, EF より,
$\sigma(w_4)(t_4) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}, 0\right).$$

w_5 においては, プレイヤー 1 と 3 が対称であることと, 2 が Null であることと, EF より,

$\sigma(w_5)(t_5) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}, 0, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_6 においては, プレイヤー 2 と 3 が対称であることと, 1 が Null であることと, EF より,

$\sigma(w_6)(t_6) =$

$$\left(0, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{2}, \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(23)+\underline{w}(2)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(23)+\overline{w}(2)+\overline{w}(3))}{2}\right).$$

w_7 においては, プレイヤー 1, 2, 3 が対称であることと EF より,

$\sigma(w_7)(t_7) =$

$$\left(\frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3}, \text{同じ}, \text{同じ}\right).$$

ここで, 以下が成り立っていることに注意する.

$$w + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 = w_1 + w_2 + w_3. \tag{45}$$

これまで同様, 任意の $\alpha \in [0,1]$ に対し, $t \in w(123)$ と $t_j \in w_j(123)$ $(j = 1,2,...,7)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} t &= (1-\alpha)\underline{w}(123) + \alpha\overline{w}(123) \\ t_j &= (1-\alpha)\underline{w_j}(123) + \alpha\overline{w_j}(123) \end{aligned}$$

(45) の両辺に **AD2** を適用すると,

$$\sigma(w + w_4 + w_5 + w_6 + w_7)(t + t_4 + t_5 + t_6 + t_7) = \sigma(w)(t) + \sigma(w_4)(t_4) + \sigma(w_5)(t_5) + \sigma(w_6)(t_6) + \sigma(w_7)(t_7) \tag{46}$$

$$\sigma(w_1 + w_2 + w_3)(t_1 + t_2 + t_3) = \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) \tag{47}$$

(46) と (47) の左辺同士を比較すると, (45) および $t + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = t_1 + t_2 + t_3$ より, (46) と (47) の左辺は等しい. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sigma(w)(t) + \sum_{i=4}^{7} \sigma(w_i)(t_i) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) \\ \sigma(w)(t) &= \sigma(w_1)(t_1) + \sigma(w_2)(t_2) + \sigma(w_3)(t_3) - \sigma(w_4)(t_4) - \sigma(w_5)(t_5) - \sigma(w_6)(t_6) - \sigma(w_7)(t_7) \end{aligned} \tag{48}$$

が成り立つ. 以下, 一般性を失うことなくプレイヤー 1 について考える. (48) より,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(w)(t) &= (1-\alpha)\underline{w}(1)+\alpha\overline{w}(1)+0+0\\
&- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(12)+\underline{w}(1)+\underline{w}(2))+\alpha(-\overline{w}(12)+\overline{w}(1)+\overline{w}(2))}{2}\\
&- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(13)+\underline{w}(1)+\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(13)+\overline{w}(1)+\overline{w}(3))}{2}-0\\
&- \frac{(1-\alpha)(-\underline{w}(123)+\underline{w}(12)+\underline{w}(13)+\underline{w}(23)-\underline{w}(1)-\underline{w}(2)-\underline{w}(3))+\alpha(-\overline{w}(123)+\overline{w}(12)+\overline{w}(13)+\overline{w}(23)-\overline{w}(1)-\overline{w}(2)-\overline{w}(3))}{3}\\
&= \frac{1}{6}\Big[\underline{w}(1)\{6(1-\alpha)-3(1-\alpha)-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(1)\{6\alpha-3\alpha-3\alpha+2\alpha\}\\
&\quad +\underline{w}(2)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(2)\{-3\alpha+2\alpha\}+\underline{w}(3)\{-3(1-\alpha)+2(1-\alpha)\}+\overline{w}(3)\{-3\alpha+2\alpha\}\\
&\quad +\underline{w}(12)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(12)\{3\alpha-2\alpha\}+\underline{w}(13)\{3(1-\alpha)-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(13)\{3\alpha-2\alpha\}\\
&\quad +\underline{w}(23)\{-2(1-\alpha)\}+\overline{w}(23)\{-2\alpha\}+\underline{w}(123)\{2(1-\alpha)\}+\overline{w}(123)\{2\alpha\}\Big]\\
&= \sigma_1^*(w)(t). \quad (\because (20)) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5 おわりに

本稿では, 特性関数形ゲームに不確実性を導入した区間ゲームに適用する解概念として, 解写像を新たに提示した. そして, その具体的な表現としてシャープレイ写像の性質を考察し, シャープレイ写像が, 効率性, 対称性, ナルプレイヤー条件, 区間ゲームにおける加法性の 4 つの公理を満たす唯一の解写像であることを示した.

今後の課題を記して本稿を閉じることにする. 1 点目に, 区間ゲームにおける解写像の具体的表現として, 本稿では特性関数形ゲームの解概念であるシャープレイ値に基づいたシャープレイ写像を考えたが, 同様に, バンザフ指数 (Banzhaf index) や割引シャープレイ値 (discounted Shapley value) に基づいた解写像を考えることができる. その際, これらの解写像の公理化が論点となる. 2 点目に, 特性関数形ゲームにおいては, シャープレイ値のような n 次元利得ベクトルの 1 点を与える解概念のほかに, コアや安定集合など, n 次元利得ベクトルの集合を与える解概念がある. こうした集合型の解概念を区間ゲームの解写像に適用することが考えられる. 3 番目に, これらの解写像に基づいた解同士の関係 (たとえば, シャープレイ写像が与える利得ベクトルがコア写像が与える利得ベクトルの集合に含まれるか否か, また含まれる場合の条件など) を分析することが有用となる. なお, 本稿では全体提携の形成を前提として, シャープレイ写像を定義し, その公理化を行ったが, こうした解同士の関係を分析する上では, そもそも全体提携が形成されるための条件である優加法性について, 区間ゲームにおける定義を明確化する必要がある. 4 点目に, 本稿では不確実性を閉区間として定めたが, これを長方形などの平面に拡張することが可能である. 最後に, 破産問題や空港の滑走路建設における費用分担問題など, 不確実性が存在する現実の協力ゲーム的状況を区間ゲームとして定式化した上で, 解写像を導出し, その示唆を得ることが考えられる. 例えば, 本稿の導入部分で述べたように, 破産問題においては, 債権者は債務者の償還時点での支払い能力についての不確実性に直面した上で, 債権契約を結ばなければならない. こうした状況は, 不確実性をモデルに含む区間ゲームを用いることが自然であり, こうした分析によって新たな知見が得られる可能性がある[11].

なお, 区間ゲームにおける解写像は, 「不確実性があるもとでの配分案についてのルール＝ 全体提携の実現値に関する条件付契約」とみなすことができる. 不完備契約の理論によると, 一般に, 不確実性があるもとでの

[11] 初めて区間ゲームを定式化した Branzei et al. [12] は, 破産問題に不確実性を導入するという目的を持っていたが, そこで考察の対象となった不確実性は, 債務者の支払い能力ではなく, 債権者の債権額についての不確実性である.

条件付契約は合意が困難といわれている. その理由は, 契約が複雑になりすぎて取引費用が大きくなってしまったり, 契約後に起こりうる事象の立証可能性, 予測可能性, および記述可能性に限界があるためである. ここで示した解写像やシャープレイ写像は, こうした不完備契約の問題を解決する 1 つのアプローチであると解釈することができる.

参考文献

[1] JP. Aubin. 1974. Coeur et Valeur des Jeux Flous a Paiments Lateraux. *Comptes Rendus de l.AcadÃl'mie des Sciences Paris* 279(A): 891–894.

[2] R. J. Aumann and M. Maschler. 1964. The Bargaining Set for Cooperative Games. *Annals of Mathematics Studies* 52: 443–476.

[3] S. Z. Alparslan Gök. 2010. Cooperative Interval Games: Theory and Applications. *Lambert Academic Publishing*.

[4] S. Z. Alparslan Gök. 2014. On the Interval Shapley Value. *Optimization* 63: 747–755.

[5] S. Z. Alparslan Gök, R.Branzei and S. Tijs. 2008. Cores and Stable Sets for Interval Games. *CentER Discussion Paper*: No.2008–17.

[6] S. Z. Alparslan Gök, R.Branzei and S. Tijs. 2009. Convex Interval Games. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*: 1–14.

[7] S. Z. Alparslan Gök, R.Branzei and S. Tijs. 2009. Airport Interval Games and their Shapley Value . *Operational Research Decisions* 19: 9–18.

[8] S. Z. Alparslan Gök, R. Branzei and S. Tijs. 2010. The Interval Shapley Value: An Axiomatization. *Central European Journal of Operations Research* 18: 131–140.

[9] S. Z. Alparslan Gök, S. Micuel, and S. Tijs. 2009. Cooperation under Interval Uncertainty. *Mathematical Methods of Operational Research* 69: 99–109.

[10] R. J. Aumann and B. Peleg. 1960. Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66: 173–179.

[11] R. Branzei, O.Branze, S. Zeynep Alparslan Gök and S. Tijs. 2010. Cooperative interval games: a survey. *Central European Journal of Operations Research* 18: 397–411.

[12] R. Branzei, D. Dimitrov and S. Tijs. 2003. Shapley-like Values for Interval Bankruptcy Games. *Economic Bulletin* 3: 1–8.

[13] R. Branzei, S. Tijs and S. Z. Alparslan Gök. 2010. How to Handle Interval Solutions for Cooperative Interval Games. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 18 (2): 123–132.

[14] A. Charnes and D. Granot. 1973. Prior Solutions: Extensions of Convex Nucleolus Solutions to Chance Constrained Games. *Proceedings of the Computer Science and Statistics Seventh Symposium at Iowa State University*: 323–332.

[15] M. Davis and M. Maschler. 1965. The Kernel of a Cooperative Game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12: 223–259.

[16] W. Fei, D-F. Li and Y-F Ye. 2018. An Approach to Computing Interval-valued Discounted Shapley Values for a Class of Cooperative Games under Interval Data *International Journal of Generay Systems* 47: 794–808.

[17] D. B. Gillies. 1959. Solutions to General Non-Zero-Sum Games, in *Contributions to the Theory of Games* Volume IV: 47–85.

[18] H. Habis and P. J-J. Herings. 2011. Transferable Utility Games with Uncertainty. *Journal of Economic Theory* 146: 2126–2139.

[19] W. Han, H. Sun and G. Xu. 2012. A New Approach of Cooperative Interval Games: The Interval Core and Shapley Value Revisited. *Operational Research Letters* 40: 462–468.

[20] S. Ishihara and J. Shino. 2020. A Solution Mapping and its Axiomatization in Two-Person Interval Games. *WIAS Discussion Paper Series* No.2019-005.

[21] S. Ishihara, J. Shino and S. Yamauchi. 2020. Interval Games and its Solution Concepts: Some Observations and Projections. *Waseda Global Forum* No.16.

[22] D-F. Li, Y-F Ye and W. Fei. 2020. Extension of Generalized Solidarity Values to Interval-Valued Cooperative Games. *Journal of Industrial and Management Optimization* 16: 919–931.

[23] K. Liang and D. Li. 2019. A Direct Method of Interval Banzhaf Values of Interval Cooperative Games. *Journal of Systems Science and Systems Engineering* 28: 382–391.

[24] F. Meng, X. Chen and C. Tan. 2016. Cooperative Fuzzy Games with Interval Characteristic Functions. *International Journal of Operational Research* 16: 1–24.

[25] R. Moore. 1979. Methods and Applications of Interval Analysis. *Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics*.

[26] O. Palanci, S. Z. Alparslan Gök, M.O. Olgun and G-W. Weber. 2016. Transportation Interval Situations and Related Games. *OR Spectrum*, 38: 119–136.

[27] O. Palanci, S. Z. Alparslan Gök and G-W. Weber. 2015. An Axiomatization of the Interval Shapley Value and on Some interval Solution Concepts. *Contributions to Game Theory and Management*, VIII: 243–251.

[28] D. Schmeidler. 1969. The Nucleolus of a Characteristic Function Game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17: 1163–1170.

[29] L. S. Shapley. 1953. A Value for n-Person Games. *Annals of Mathematics Studies* 28: 307–318.

[30] J. Suijs and P. Borm. 1999. Stochastic Cooperative Games: Superadditivity, Convexity, and Certainty Equivalents. *Games and Economic Behavior* 27: 331–345.

[31] J. Suijs, P. Borm, A. De Waegenaere and S. Tijs. 1999. Cooperative Games with Stochastic Payoffs. *European Journal of Operations Research* 113: 193–205.

[32] J. Timmer, P. Borm, and S. Tijs. 2005. Convexity in Stochastic Cooperative Situations. *International Game Theory Review* 7: 25–42.

[33] J. von Neumann and O. Morgenstern. 1953. *Theory of Games and Economic Behavior, 3rd ed.* Princeton University Press.