WINPEC Working Paper Series No. J2001
September 2020

# 「複数キーワードオークションにおける均衡分析：2 人の広告主の入札値が同じケース」

中川　彩野

現代政治経済研究所
(Waseda INstitute of Political EConomy)

早稲田大学

# 複数キーワードオークションにおける均衡分析：2人の広告主の入札値が同じケース [*]

中川 彩野 [†]

**概要**

本論文では複数の検索語句を扱うキーワードオークション (複数キーワードオークション) において、グルーピングの導入がオークションの均衡にどのような影響をもたらすかを分析する。本論文では Dhangwatnotai[2] が導入したグルーピングという手法を用いて、入札者である広告主が 2 人であるような複数キーワードオークションにおける均衡分析を行った。均衡分析の結果、広告主の評価値を加重平均した値 (WAV) を入札する戦略が重要な役割を果たすことが分かった。特にグループが 1 つのケースではすべてのナッシュ均衡を図示することが可能であり、WAV を入札する戦略が支配戦略均衡となった。またグループが 2 つのケースでは、2 人の広告主が同じ値を入札するという均衡の必要十分条件を導出した。さらに均衡における検索エンジンの利潤と社会余剰を比較した結果、グルーピングを導入したほうが検索エンジンの利潤が上がるが、社会余剰は下がることが明らかになった。

Keywords: 複数キーワードオークション, ナッシュ均衡
JEL Classification: C70, D44

## 1　はじめに

本論文では複数の検索語句を同時に扱うキーワードオークションにおいて、オークションの均衡がグルーピングの導入によってどのように影響を受けるかを分析する。キーワードオークションとは、インターネット検索である語句を検索したとき、検索結果の

---

* 本研究を遂行するにあたり、早稲田大学政治経済学術院の船木由喜彦氏、阿部貴晃氏、篠田太郎氏、早稲田大学高等研究所の横手康二氏、エコール・ポリテクニークの郡山幸雄氏に貴重なコメントを頂いた。ここに謝意を記す。
† 早稲田大学大学院経済学研究科, 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1, E-mail: ayano.nakagawa.5335@gmail.com

周囲に表示される広告を扱うオークションである。キーワードオークションは Google や Yahoo! JAPAN といった検索エンジンで実際に利用されている。電通 [6] によれば、2019 年時点で日本のインターネット広告媒体費 1 兆 6630 億円のうちキーワードオークションを含む運用型広告費は 1 兆 3267 億円となり、前年比 15.2 パーセント増という広告市場の中でも成長の大きい分野である。検索結果に応じて広告を表示することには、検索語句に興味がある検索エンジン利用者にターゲットを絞って掲示することができるという利点がある。したがって効果的な広告手段として幅広く用いられている。

キーワードオークションでは、ある検索語句の検索結果のページに表示される、複数の広告枠が売り買いされる。検索エンジンが売り手であり、広告主が買い手である。広告主は自らの商品広告と関連がある検索語句に対して入札を行う。広告主が入札するのは、検索結果のページに表示させる自らの広告について、1 回クリックされるごとにいくらまでなら支払うことができるかという値である。検索エンジンは広告主たちの入札を基に、各広告枠に表示する広告内容と 1 クリック当たりの広告費用を決定する。そして検索エンジンの利用者が語句を検索するたびに、オークションの結果に従って広告が表示される。その後、検索エンジンの利用者が広告を 1 クリックするごとに、広告主はオークションによって決まっている広告費用を検索エンジンに支払う。このオークションでは広告主はいつでも入札値を変化させることができる。したがって自分がある検索語句のページに掲載している広告がどの程度クリックされ、自分がいくら支払っているのかをふまえて入札値を柔軟に変化させることができる。

このようなキーワードオークションについて、Edelman, Ostrovsky and Schwarz [4] では GSP オークションと VCG オークションという 2 つのオークションメカニズムに関して理論的な分析と比較を行った。GSP オークションとは第二価格オークションを一般化させたオークション方式である。GSP オークションでは広告主の入札値の高い順に広告の掲載順が決まる。そして広告枠は自らの入札値ではなく、自らの入札値の次に高い入札値によって定まる額を費用として支払う。通常の第二価格オークションでは、入札者は自らの評価値を入札することが支配戦略である。しかし GSP オークションではその限りではない。一方 VCG オークションでは、まず GSP 同様に入札値の高い順に広告掲載順を決定する。次に広告主は自分がオークションに参加する場合としない場合の、他の広告主の利得の差を費用として支払う。この費用の決定方法は一種の「迷惑料」として解釈される。すなわち、広告主は自らがオークションに参加することによって他の広告主が被った迷惑に対して費用を支払う。VCG オークションでは広告主は自らの評価値と同じ値を入札することが支配戦略である。したがって VCG オークションは GSP オークションに比べて、支配戦略均衡があるという点で結果が安定しやすいという特徴がある。

Edelman et al. [4] が導入した LEF (Locally Envy Free) 均衡を用いて GSP オークションと VCG オークションの比較を行った Edelman and Ostrovsky [3] や、実験室実験によって両オークションでの均衡と検索エンジンの利潤を分析した Fukuda, Kamijo, Takeuchi, Mashui and Funaki [5] など、キーワードオークションについて分析する論文は多数あるが、ほとんどの研究は単一の検索語句を対象とする分析である。すなわち、オークションの対象となる検索語句は 1 つに固定されている。そして 1 つに固定した検索語句についてのキーワードオークションについて、広告主の戦略や均衡を分析したり、検索エンジンの利潤を検証したりしている。

現実には複数の検索語句を扱う状況が数多くあるにもかかわらず、複数の検索語句を対象とする研究はいまだ少ない。なぜなら複数キーワードオークションでは扱う検索語句の数は膨大であり、多数の検索語句を扱う場合は検索語句同士に関連があることによって最適化が難しいからである。

複数キーワードオークションを扱った先行研究として Colini-Baldeschi, Leonardi, Henzinger and Starnberger [1] や Dhangwatnotai [2] が挙げられる。特に Dhangwatnotai [2] は、複数の検索語句が存在しそれぞれに複数の広告枠があるメカニズムを提案し、検索語句のグルーピングという新たな手法を導入した。そしてナッシュ均衡において社会余剰がどの程度達成されるかを検証した。以下では複数キーワードオークションの分析手法であるグルーピングについて詳述する。

Dhangwatnotai [2] の提案した検索語句のグルーピングとは、関連するいくつかの検索語句を 1 つのグループにまとめ、広告主は個々の検索語句ではなくグループに対して入札する方法である。検索語句が関連しているかどうかの判断は検索エンジンが行う。検索エンジンがどのようにグルーピングしたかは、オークションの開始前に広告主に通知される。例えば、「ランニングシューズ」「バスケットボールシューズ」「サッカーシューズ」などの検索語句を「スポーツシューズ」というグループにまとめるとする。このようにグルーピングを行われたとき、広告主は個々のシューズ名ではなく「スポーツシューズ」に対して入札を行う。靴屋としての広告を出したい広告主は、自らが扱う個々のシューズ名に対して個別に入札値を決定しなくても、「スポーツシューズ」全体に対して入札することが可能になる。

グルーピングという手法は、広告主と検索エンジンの双方に利点がある。前述の通り、キーワードオークションでは語句が検索されるたびにオークションが行われる。したがって広告主たちはオークションの様子を観察しながら逐一入札値を変化させなければならない。しかし自らが扱う商品に関連する検索語句が多い場合、そのすべてに対して頻繁に入札値を変更することは困難である。グルーピングによって似ている検索語句に一括で入札

することが可能になるならば、広告主は入札に際しての負担を軽減することが可能である。また検索エンジンにとっても、グルーピングの導入は負担を軽減させる。例えばグルーピングをせずに複数の検索語句をオークションにかけるとする。すると多数の広告主たちが各々いくつもの入札値を頻繁に変化させることになる。するとそれらの入札値を処理しなければならない検索エンジン側のシステムに、膨大な負荷がかかる。したがってグルーピングの導入によって扱う入札値の個数が減るならば、検索エンジンにとっても負担の軽減になるのである。

グルーピングは大変有用な手法であるが、グルーピングを提案しモデル化した Dhang-watnotai [2] では均衡分析がなされていない。グルーピングを用いた場合に広告主がどのような戦略をとり、どのような均衡が実現するのかについてはさらなる分析が必要である。そこで本論文では、複数キーワードオークションにおいてグルーピングを導入したときの均衡について分析を行う。すなわち本論文は、既存研究において十分に分析されていない複数の検索語句をオークションする状況を扱い、複数の検索語句を扱う研究では初めてとなる均衡分析を行う。ただしグルーピングを導入する際には、広告主が決定した入札戦略をオークション結果を決めるために必要な入札値へと変換する必要があり、通常のオークションのような均衡分析は容易ではない。またどのような検索語句を 1 つのグループとしてまとめるかによって、検索語句同士の関係が補完的になったり代替的になったりするという難しさもある。ゆえに本論文では広告主が 2 人の場合に限定する。広告主の人数が制限された状況であっても、複数キーワードオークションにおける均衡分析を行うことによって、これまで行われてきた単一のキーワードオークションでの均衡との比較が可能になる。

そして本論文では、オークションのメカニズムとして VCG オークションを用いる。広告主が 2 人であるとき、GSP オークションと VCG オークションでの広告枠の割り当ては一致する。またグルーピングを導入しない一般の VCG オークションでは、自身の評価値をそのまま入札する「正直申告戦略」が支配戦略であることが知られている。本オークションでも VCG オークションを用いることによって、グルーピングを導入しない場合の均衡とグルーピングを導入した場合の均衡との比較が容易になる。

また本論文ではグルーピングの方法として、すべての検索語句を 1 つのグループにまとめる場合と 2 つのグループにする場合、2 つの場合のみを分析対象とする。これはグルーピングを導入する際に入札値の変換を行うために、グループの数が増えるほど分析が困難になるからである。具体的には、グループの数が増えるとある検索語句が複数のグループに含まれる可能性があり、その検索語句でのオークション結果の決定が難しくなることや、前述の通りグループの作り方によって検索語句同士の関係性が複雑に変わりうるから

である。そしてグループが 2 つの場合には、その構成として 2 つのグループに包含関係がないが共通部分がある「羽型」と、片方がもう片方に含まれている「卵型」という 2 つのタイプを考えることができる。本論文ではグループが 1 つの場合、グループが 2 つで羽型の場合、グループが 2 つで卵型の場合の 3 つの場合について、それぞれ均衡分析を行う。グルーピングの導入方法としては限定的ではあるが、これら 3 つの場合での均衡分析の結果をグルーピングをしない場合と比較することによって、グルーピングの導入そのものがオークションの均衡にどのような影響をもたらすかを明らかにすることが可能である。

さらにグループが 2 つの場合の均衡分析は、2 人の広告主が同じ値を入札する均衡に対象を絞る。2 人の広告主が同じ値を入札する均衡ではすべての検索語句で両広告主の入札が「引き分け」となる。このとき両広告主にとっては、検索結果のページで最も良い広告枠を取ることと 2 番目に良い広告枠を取ることとが無差別になっている。このようなケースは限定的な状況であるが、このようなケースでの均衡分岐の結果をグループが 1 つの場合と比較することによって、グループの数を増やすことによる影響を明らかにすることができる。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 章で本論文における複数キーワードオークションについて定式化し、モデルを示す。第 3 章では検索語句を 1 つのグループにまとめる場合の均衡分析を行う。第 4 章では 2 つのグループにする場合の均衡分析を、卵型と羽型に分けて行う。第 5 章では、均衡分析の結果をもとに検索エンジンの利潤および社会余剰を比較する。そして第 6 章にて本論文の結論と今後の課題を示す。

# 2 モデル

## 2.1 複数キーワードオークション

本オークションの買い手である広告主の集合を $N$ とし、$N = \{1, 2\}$、すなわち広告主は 2 人であるとする。

$T$ を検索語句の集合とする。ここでいう検索語句とは、検索エンジンのユーザーが検索窓に入力する語句のことである。そしてキーワード $K \subseteq T$ を非空の検索語句の集合とし、キーワード構造 $\mathcal{K}$ をすべてのキーワードの集合であるとする。ここでいうキーワードはすなわち第 1 章で述べた「グループ」のことである。検索エンジンがグループを決める、すなわちグルーピングするとは、オークションの開始前にキーワード構造 $\mathcal{K}$ を設定し、広告主に通知することである。本モデルでのキーワード構造において、すべての検索語句はいずれかのキーワードに含まれる ($\bigcup_{K_l \in \mathcal{K}} K_l = T$)。ただしキーワード構造は検索

語句の分割ではないから、キーワード同士には共通部分があっても良い。

各検索語句 $t \in T$ の検索結果のページには 2 つの広告枠がある。各広告枠はそれぞれ CTR(click through rate) と呼ばれる指標を持つ。CTR とは広告枠がどれくらいクリックされやすいかを表す指標であり、検索結果のページの上部に表示される広告枠の方が下部に比べてクリックされやすい。したがって検索語句 $t$ のページの 1 番目の枠の CTR を $\theta^{1t}$、2 番目の枠の CTR を $\theta^{2t}$ とおくと、$\theta^{1t} > \theta^{2t}$ となる。$\delta^t := \theta^{1t} - \theta^{2t}$ とする。

広告主 $i \in N$ の入札は $b_i : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ で表される。本オークションでは、売り手である検索エンジンがキーワード構造を決定したのち、買い手である広告主が各キーワードに対して入札値を決定する。広告主は各検索語句ではなく、検索語句の集合であるキーワードに対して入札を行う。そして $s_i := (b_i(K_l))_{K_l \in \mathcal{K}}$ を広告主 $i$ の戦略と呼び、広告主 $i$ の戦略の集合を $S_i$ で表す。

広告主たちがキーワードに対して行った入札は、ある変換ルールに従って検索語句に対する入札に変換される。変換されたあとの広告主 $i$ の検索語句 $t$ に対する入札を $b_i(t)$ で表す。本論文では変換ルールとして Dhangwatnotai[2] が提示した Max ルールを用いる。$D(t) = \{K \in \mathcal{K} | t \in K\}$ によって検索語句 $t$ を含むキーワードの集合を表すと、Max ルールによって広告主の入札は以下のように変換される。

$$b_i(t) := \max_{K \in D(t)} b_i(K)$$

すなわち Max ルールとは、検索語句 $t$ を含むキーワードに対してなされた入札値のうち、最大の値を $t$ への入札値として採用するルールである。

上記ルールによって入札値が変換されたのち、検索エンジンは変換された入札値を用いて各検索語句のページにおける広告枠の割り当ておよび支払額を決定する。割り当てと支払額の決定には VCG メカニズムを用いる。ある検索語句 $t$ において、$b_i(t) > b_j(t)$ すなわち広告主 $i$ が勝ち広告主 $j$ が負けるならば広告主 $i$ が 1 番目の枠を、広告主 $j$ が 2 番目の枠を得る。$b_i(t) = b_j(t)$ すなわち引き分けの場合は各広告主は $\frac{1}{2}$ の確率で 1 番目の枠を、$\frac{1}{2}$ の確率で 2 番目の枠を得る。広告主 $i$ が 1 番目の枠を獲得した場合、広告主 $i$ は $\delta^t b_j(t)$ を検索エンジンに支払う。ここで $b_j(t)$ は 2 番目の枠を獲得した広告主 $j$ の入札値である。一方 2 番目の枠を獲得した広告主 $j$ には支払いはない。これは VCG メカニズムにおける支払額は自身がオークションに参加することによって発生する他の広告主の迷惑料であることに由来する。1 番目の枠を獲得した広告主がオークションに参加していなければ、もう 1 人の広告主が 1 番目の枠を獲得し $\theta^{1t} b_j(t)$ を得ていたはずである。したがって 1 番目の枠を獲得した広告主は $\theta^{1t} b_j(t) - \theta^{2t} b_j(t) = \delta^t b_j(t)$ を支払う。一方 2 番目の枠を獲得した広告主のオークションへの参加不参加にかかわらず、もう 1 人の広告主は 1

番目の枠を得る。したがって 2 番目の広告枠を獲得した広告主には支払いは発生しない。

本オークションにおいて、各広告主は検索語句に対して評価値を持つ。広告主 $i$ の検索語句 $t$ に対する評価値を $v_i^t \in \mathbb{R}_+$ で表す。$v_i^t$ は検索語句 $t$ のページに自分の広告が表示されることに対する広告主 $i$ の評価である。広告主 $i$ の実際の利得は広告が掲載される広告枠の CTR によって変化し、検索エンジンに支払う額を含めた広告主 $i$ の検索語句 $t$ における利得は以下のようになる。

$$u_i^t(s_1, s_2) = \begin{cases} \theta^{1t} v_i^t - \delta^t b_j(t) & if\ b_i(t) > b_j(t) \\ \theta^{2t} v_i^t & if\ b_i(t) < b_j(t) \\ \frac{1}{2}[\theta^{1t} v_i^t - \delta^t b_j(t)] + \frac{1}{2}[\theta^{2t} v_i^t] & if\ b_i(t) = b_j(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

そして広告主 $i$ のオークションにおける総利得は各検索語句における利得の総和であり、

$$u_i(s_1, s_2) = \sum_{t \in T} u_i^t(s_1, s_2)$$

で表される。

本オークションにおいて、広告主 $i$ の戦略 $s_i$ が相手の戦略 $s_j$ に対して

$$u_i(s_i, s_j) \geq u_i(s_i', s_j) \ \ \forall s_i' \in S_i$$

を満たすとき、$s_i$ を $s_j$ に対する最適反応戦略であると呼ぶ。

そしてある戦略の組 $(s_1, s_2)$ が互いに相手の戦略に対する最適反応戦略になっている、すなわち

$$u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1', s_2) \ \ \forall s_1' \in S_1,$$

$$u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, s_2') \ \ \forall s_2' \in S_2.$$

を満たすとき、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡であるという。

# 3　キーワードが１つのケース

本章では $|\mathcal{K}| = 1$、すなわちすべての検索語句が 1 つのキーワードに含まれており、$\mathcal{K} = \{K\}, K = T$ となる場合について分析する。検索語句の数にかかわらず広告主は単一の実数をキーワードに対して入札する。簡易化のため本章では広告主のキーワード $K$ に対する入札値を $b_i \in \mathbb{R}_+$ for $i = 1, 2$ と表す。 キーワードが 1 つしかないとき、変換された検索語句への入札値はキーワードに対する入札値と同じである。したがってすべての検索語句 $t \in T$ について $b_i(t) = b_i$ となる。

本章における分析の結果を述べる前に、広告主 $i$ の検索語句に対する加重平均評価値 (weighted average values, WAV) を以下のように定義する。

$$\mathrm{WAV}_i = \frac{1}{\sum_{t\in T}\delta^t}\sum_{t\in T}\delta^t v_i^t \text{ for each } i = 1, 2. \tag{3.1}$$

各検索語句に対する重みは $\delta^t = \theta^{1t} - \theta^{2t}$、すなわちその検索語句のページにおける 1 番目の枠と 2 番目の枠の CTR の差である。各広告主の WAV を用いると、$|\mathcal{K}| = 1$ の状況では以下の通りすべてのナッシュ均衡を導出することが可能である。

**命題 3.1.** $|\mathcal{K}| = 1$ とする。一般性を失わず、$\mathrm{WAV}_1 \geq \mathrm{WAV}_2$ と仮定する。戦略プロファイル $(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は、戦略プロファイルが以下の (i),(ii) のどちらかを満たすことである。

(i) $b_1 \leq \mathrm{WAV}_2$ かつ $b_2 \geq \mathrm{WAV}_1$,
(ii) $b_1 \geq \mathrm{WAV}_2$ かつ $b_2 \leq \mathrm{WAV}_1$ かつ $b_1 > b_2$.

証明は付録を参照。

命題 3.1 はこのモデルにおけるすべてのナッシュ均衡を記述している。(i) の条件を満たすような戦略プロファイルでは広告主 2 がすべての検索語句において 1 番目の枠を獲得している。対して (ii) の条件を満たすような戦略プロファイルでは広告主 1 がすべての検索語句において 1 番目の枠を獲得している。

命題 3.1 から、広告主の WAV はナッシュ均衡の境界としての役割を果たすことが分かる。また次のような結果も導くことができる。

**系 3.1.** $|\mathcal{K}| = 1$ とする。このとき唯一の支配戦略均衡 $(s_1, s_2) = (b_1, b_2) = (\mathrm{WAV}_1, \mathrm{WAV}_2)$ が存在する。

証明は付録を参照。

系 3.1 は各広告主にとって WAV を入札することが唯一の支配戦略であり、支配戦略均衡になっていることを示している。これは正直申告戦略を定義できない本モデルにおいて、WAV が正直申告戦略と似た役割を果たしていることを意味している。本オークションにおいて、広告主たちは各検索語句に対して評価値を持っているが、入札する対象は検索語句ではなくキーワードである。VCG メカニズムを用いたオークションでは正直申告戦略が支配戦略均衡となるが、本オークションでは自身の評価値をそのまま入札するという正直申告戦略を定義することができないのである。系 3.1 の結果は本モデルにおいて、正直申告戦略の代わりに WAV がその役割を果たすことを示している。

命題 3.1 と系 3.1 の結果は図 1 のように表すことができる。戦略プロファイルを $\mathbb{R}^2_+$ 空間上のベクトルと考えれば、ナッシュ均衡は図中の色付き部分 (点線を含まず太線の境界を含む) であり、支配戦略均衡は図中黒丸である。

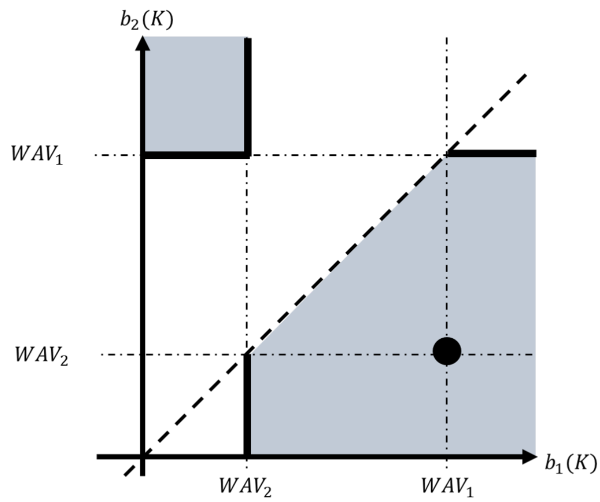


図 1　ナッシュ均衡と支配戦略均衡

## 4　キーワードが 2 つのケース

本章では $|\mathcal{K}| = 2$、すなわちキーワードが 2 つある場合について分析する。2 つのキーワードに共通部分がない場合は、前章で分析したキーワードが 1 つであるオークションを 2 つ行うことと同一である。したがって本章では 2 つのキーワードに共通部分がある場合に限定して分析する。2 つのキーワードをそれぞれ $K_1, K_2$ で表し、$K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ とする。このとき、キーワード構造として以下の 2 つのタイプが考えられる。

(i) $K_1 \setminus K_2 \neq \emptyset$ かつ $K_2 \setminus K_1 \neq \emptyset$

(ii) $K_1 \subsetneq K_2$

以降タイプ (i) のキーワード構造を「羽型」、タイプ (ii) のキーワード構造を「卵型」と呼称する。羽型のキーワード構造では検索語句の集合が 3 つの部分 $K_1 \setminus K_2$, $K_1 \cap K_2$, $K_2 \setminus K_1$ に分けられる。$K_1 \setminus K_2 := X$ に含まれる検索語句を $x$ で表す。同様に $K_1 \cap K_2 := Y$ に含まれる検索語句を $y$ で、$K_2 \setminus K_1 := Z$ に含まれる検索語句を $z$ で表す。対して卵型のキーワード構造では検索語句の集合が 2 つの部分 $K_1, K_2 \setminus K_1$ に分けられる。$K_1 := Y$ に含まれる検索語句を $y$ で表し、$K_2 \setminus K_1 := Z$ に含まれる検索語句を $z$ で表す。羽型と

卵型のキーワード構造を図示すると図 2 のようになる。

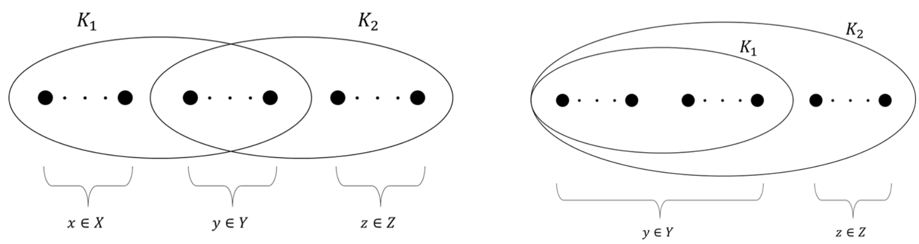


図 2　羽型 (左) と卵型 (右) のキーワード構造

図からわかるように、卵型のキーワード構造は羽型のキーワード構造において $X = \emptyset$ としたものである。したがって卵型は羽型の特殊例であると言える。

(3.1) と同様に、広告主 $i$ の $X$ に対する WAV を次のように定義する。

$$\mathrm{WAV}_i^X = \frac{1}{\sum_{x \in X} \delta^x} \sum_{x \in X} \delta^x v_i^x \text{ for each } i = 1, 2. \tag{4.1}$$

$X$ を $Y$ や $Z$ に置き換えることで $\mathrm{WAV}_i^Y$ や $\mathrm{WAV}_i^Z$ も同様に定義することができる。また $X \cup Y$ である $K_1$ に対する $\mathrm{WAV}_i^{K_1}$ や、$Y \cup Z$ である $K_2$ に対する $\mathrm{WAV}_i^{K_2}$ も同様に定義可能である。

## 4.1　羽型タイプのグルーピング

本節ではキーワードが 2 つあり、羽型タイプのグルーピングがなされている場合の均衡を分析する。図 2 で示されている通り、羽型タイプのグルーピングではキーワード $K_1$ と $K_2$ に $Y$ という共通部分がある。したがって広告主 $i$ が $s_i = (b_i(K_1), b_i(K_2))$ という入札を行ったとき、$X$ と $Z$ に含まれる検索語句にはそれぞれ $b_i(K_1)$ と $b_i(K_2)$ が適用され、$Y$ に含まれる検索語句には $b_i(K_1)$ と $b_i(K_2)$ のどちらか大きいほうが適用される。また $X$ に含まれる検索語句 $x$ に対する変換後の入札値 $b_i(x)$ はすべての $x \in X$ において同一である。同様に、検索語句 $y \in Y$、$z \in Z$ はそれぞれ同じ入札値を共有する。

以下 $b_i(K_1)$ と $b_i(K_2)$ の大小関係によって場合分けを行い、それぞれにおいて 2 人の広告主が同じ値 $(b_1(K_1) = b_2(K_1)$ かつ $b_1(K_2) = b_2(K_2))$ を入札する戦略プロファイルがナッシュ均衡である必要十分条件を示す。

**命題 4.1.** $b^*(K_1) > b^*(K_2)$ であるような戦略 $(b^*(K_1), b^*(K_2)) \in \mathbb{R}_+^2$ を考える。以下の 2 つの条件

1. $\mathrm{WAV}_1^{K_1} = \mathrm{WAV}_2^{K_1} = b^*(K_1)$
2. $\mathrm{WAV}_1^{Z} = \mathrm{WAV}_2^{Z} = b^*(K_2)$

が成立するとき、両広告主がどちらも戦略 $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ をとる戦略プロファイル $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ はナッシュ均衡である。また $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ がナッシュ均衡であるとき、条件 1 および 2 が成立する。

証明は付録を参照。

命題 4.1 の戦略プロファイルにおいて両広告主は互いに同じ値を入札し、その値は $K_1$ に対する入札 $b^*(K_1)$ の方が $K_2$ に対する入札 $b^*(K_2)$ に比べて大きくなっている。このとき、変換ルールによって $K_1 = X \cup Y$ に属する検索語句には $b^*(K_1)$ が適用され、残りの $Z$ に属する検索語句には $b^*(K_2)$ が適用される。このような戦略プロファイルの下で両広告主が同じ値を入札することが均衡となる、すなわちすべての検索語句において引き分けであることが均衡であるためには、両広告主の WAV が $K_1$ と $Z$ それぞれで一致している必要がある。また両広告主の WAV が一致しているときには、ちょうど一致する値を入札値とする戦略プロファイルがナッシュ均衡となる。すなわち両広告主の WAV が一致することが、この戦略プロファイルが均衡になることの必要十分条件になっている。

$K_2$ への入札値のほうが大きい均衡についても、命題 4.1 において $X$ と $Z$ を入れ替えれば同様の条件が導出できる。すなわち $K_1 = X \cup Y$ と $Z$ における WAV についての 2 つの条件を $K_2 = Y \cup Z$ と $X$ における WAV についての 2 つの条件にすることで、$b^*(K_1) < b^*(K_2)$ であるような戦略を両広告主がとるナッシュ均衡についても必要十分条件を導くことが可能である。

$b^*(K_1) = b^*(K_2)$ となるようなナッシュ均衡については、次のような結果となる。

**命題 4.2.** $b^*(K_1) = b^*(K_2)$ であるような戦略 $(b^*(K_1), b^*(K_2)) \in \mathbb{R}_+^2$ を考える。$b^* := b^*(K_1) = b^*(K_2)$ と置き、

$$\mathrm{WAV}_1 = \mathrm{WAV}_2 = b^*$$

が成立するとき、両広告主が $(b^*(K_1), b^*(K_2)) = (b^*, b^*)$ をとる戦略プロファイル $(s_1, s_2) = ((b^*, b^*), (b^*, b^*))$ はナッシュ均衡である。また $(s_1, s_2) = ((b^*, b^*), (b^*, b^*))$ がナッシュ均衡であるとき、上記の条件が成立する。

証明は付録を参照。

命題 4.2 の結果は、前述した $b^*(K_1) > b^*(K_2)$ である均衡と $b^*(K_1) < b^*(K_2)$ である

均衡の条件を合わせたものとして解釈できる。すなわち $b^*(K_1) = b^*(K_2)$ ですべての検索語句において同じ入札値が適用されることになるのであれば、検索語句全体で両広告主の WAV が等しくなっていなければならないのである。

## 4.2　卵型タイプのグルーピング

本節ではキーワードが 2 つあり、卵型タイプのグルーピングがなされている場合の均衡を分析する。図 2 で示されている通り、卵型タイプのグルーピングでは $K_1$ が $K_2$ に含まれており、$K_1$ と $K_2$ の共通部分 $Y$ は $K_1$ と一致する。羽型と異なり $X$ はなく、$Y$ と $Z$ のみである。このとき広告主 $i$ が $s_i = (b_i(K_1), b_i(K_2))$ という入札を行うと、$Y$ に含まれる検索語句には $b_i(K_1)$ と $b_i(K_2)$ のどちらか大きいほうが適用され、$Z$ には $b_i(K_2)$ が適用される。羽型と異なり、$b_i(K_1)$ がそのまま適用される検索語句はない。

以下では $b_i(K_1)$ と $b_i(K_2)$ の大小関係によって 2 つの場合に分け、それぞれにおいて 2 人の広告主が同じ値 ($b_1(K_1) = b_2(K_1)$ かつ $b_1(K_2) = b_2(K_2)$) を入札する戦略プロファイルがナッシュ均衡である必要十分条件を示す。

**命題 4.3.** $b^*(K_1) > b^*(K_2)$ であるような戦略 $(b^*(K_1), b^*(K_2)) \in \mathbb{R}^2_+$ を考える。以下の 2 つの条件

1. $\mathrm{WAV}_1^Y = \mathrm{WAV}_2^Y = b^*(K_1)$
2. $\mathrm{WAV}_1^Z = \mathrm{WAV}_2^Z = b^*(K_2)$

が成立するとき、両広告主がどちらも $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ をとる戦略プロファイル $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ はナッシュ均衡である。また $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ がナッシュ均衡であるとき、条件 1 および 2 が成立する。

証明は付録を参照。

前述した通り、本節で扱う卵型グルーピングは前節で扱った羽型グルーピングの $X$ にあたる部分がないものであるという点で、羽型グルーピングの特殊例であると言える。例題 4.3 の結果も、前節の命題 4.1 の特殊例として捉えることができる。すなわち命題 4.1 では $K_1 = X \cup Y$ 全体と $Z$ で WAV が等しいという条件であったが、卵型では $X$ にあたる部分が存在しないため、$Y$ と $Z$ で WAV が等しいという条件になっている。

次に $K_1$ に対する入札値よりも $K_2$ に対する入札値のほうが高いか同じである ($b^*(K_1) \leq b^*(K_2)$) 入札を両広告主が行うナッシュ均衡について分析する。羽型の場

合とは異なり、卵型においては $bi(K_2)$ のほうが大きい場合はすべての検索語句に対して $b_i(K_2)$ を適用することになる。したがって卵型においては $b_i(K_1) < b_i(K_2)$ の場合と $b_i(K_1) = b_i(K_2)$ の場合を分ける必要はない。

**命題 4.4.** $b^*(K_1) \leq b^*(K_2)$ であるような戦略 $(b^*(K_1), b^*(K_2)) \in \mathbb{R}_+^2$ を考える。

$$\mathrm{WAV}_1 = \mathrm{WAV}_2 = b^*(K_2)$$

が成立するとき、両広告主が $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ をとる戦略プロファイル $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ はナッシュ均衡である。また $(s_1, s_2) = ((b^*(K_1), b^*(K_2)), (b^*(K_1), b^*(K_2)))$ がナッシュ均衡であるとき、上記の条件が成立する。

証明は付録を参照。

卵型グルーピングでは $b^*(K_1) = b^*(K_2)$ とした場合だけでなく、$b^*(K_1) < b^*(K_2)$ とした場合でもすべての検索語句で同じ入札値 $(= b^*(K_2))$ が適用されることになる。したがって前節の命題 4.2 と同様、検索語句全体で WAV が等しいという条件が、$b^*(K_1) < b^*(K_2)$ の場合でも適用されるのである。

# 5　検索エンジンの利潤と社会余剰

本章ではこれまでの均衡分析の結果を用いて、検索エンジンの利潤および社会余剰について検討する。オークションを行うことによる社会余剰の変化だけでなく利潤も検討することは重要である。なぜならグルーピングをオークションに導入するか否かを決定するのは検索エンジンであるからである。

## 5.1　均衡における検索エンジンの利潤の比較

複数キーワードオークションにおいて、検索エンジンの利潤は各広告主が支払った額の合計である。本モデルでは各検索語句のページにおいて 1 番目の枠を獲得した広告主が 2 番目の枠を獲得した広告主の入札値によって定まる額を支払い、2 番目の枠を獲得した広告主は何も支払わない。したがって検索エンジンの利潤 $\pi$ は一般に以下の式で表される。

$$\pi = \sum_{t \in T} (\delta^t \times \min\{b_1(t), b_2(t)\}) \tag{5.1}$$

まず、検索エンジンがグルーピングを導入せず、複数の検索語句をばら売りするケースを考える。すなわち $|\mathcal{K}| = |T|$ となるケースである。このケースでは通常の VCG メカニ

ズムを用いたキーワードオークション同様自らの評価値を入札する正直申告戦略が支配戦略となり、支配戦略均衡が存在する。支配戦略均衡の下で各広告主が各検索語句に対して自らの評価値を入札するとき、1 番目の枠を獲得するのは評価値が大きいほうの広告主であり、支払う額は小さいほうの評価値に $\delta$ を乗じたものである。したがって均衡における検索エンジンの利潤は

$$\pi = \sum_{t \in T} (\delta^t \times \min\{v_1^t, v_2^t\}) \tag{5.2}$$

となる。

次に、$|\mathcal{K}| = 1$ となるケースを考える。命題 3.1 から、$|\mathcal{K}| = 1$ の場合はすべてのナッシュ均衡が導出できている。したがって均衡における検索エンジンの利潤の範囲を導出可能である。検索エンジンの利潤が最も低くなるのは 2 番目の枠を取る広告主が 0 を入札した場合である。対して最も高くなるのは、2 番目の枠を取る広告主が、1 番目の枠を取る広告主の $WAV$ を入札した場合である。したがって $|\mathcal{K}| = 1$ となるケースにおける、ナッシュ均衡での検索エンジンの利潤の範囲は

$$0 \leq \pi \leq \max\left\{\sum_{t \in T}(\delta^t \mathrm{WAV}_1), \sum_{t \in T}(\delta^t \mathrm{WAV}_2)\right\} = \max\left\{\sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t), \sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t)\right\} \tag{5.3}$$

となる。

ここで

$$0 < \sum_{t \in T}(\delta^t \times \min\{v_1^t, v_2^t\}) \leq \max\left\{\sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t), \sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t)\right\}$$

となるから、(5.2) および (5.3) より、$|\mathcal{K}| = 1$ となるグルーピングを導入した場合、検索エンジンがグルーピングなしの場合よりも高い利潤を得ることができる均衡が存在すると言える。検索エンジンにとっては複数ある検索語句をばら売りするよりも、グループにまとめて売ることによって利益を得ることが可能なのである。

さらに $|\mathcal{K}| = 2$ のケースについて検討する。本ケースでは、第 4 章で示した命題で求めた必要十分条件がすべて成立しているとし、命題で扱った均衡での利潤について分析する。例えば命題 4.1 で扱ったナッシュ均衡では、両広告主が両キーワードで同じ値を入札しているから、すべての検索語句において両広告主は $\frac{1}{2}$ の確率で 1 番目の枠を獲得し、相手の入札値によって定まる費用を支払う。また均衡における入札値はどちらの広告主も $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ であると同時に広告主の WAV と一致しているから、均衡における検索

エンジンの利潤は広告主 1 の WAV を用いて

$$\begin{aligned}
\pi &= \sum_{x\in X}(\delta^x \mathrm{WAV}_1^{K_1}) + \sum_{y\in Y}(\delta^y \mathrm{WAV}_1^{K_1}) + \sum_{z\in Z}(\delta^z \mathrm{WAV}_1^{Z}) \\
&= (\sum_{x\in X}\delta^x + \sum_{y\in Y}\delta^y)\mathrm{WAV}_1^{K_1} + (\sum_{z\in Z}\delta^z)\mathrm{WAV}_1^{Z} \\
&= (\sum_{x\in X}\delta^x + \sum_{y\in Y}\delta^y)\frac{\sum_{x\in X}(\delta^x v_1^x) + \sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)}{\sum_{x\in X}\delta^x + \sum_{y\in Y}\delta^y} + (\sum_{z\in Z}\delta^z)\frac{\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{z\in Z}\delta^z} \\
&= \sum_{x\in X}(\delta^x v_1^x) + \sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y) + \sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z) \\
&= \sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t)
\end{aligned}$$

と表される。また $\mathrm{WAV}_1^{K_1} = \mathrm{WAV}_2^{K_1}$ かつ $\mathrm{WAV}_1^{Z} = \mathrm{WAV}_2^{Z}$ であるとき、$\sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) = \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)$ であるから、この均衡における検索エンジンの利潤は

$$\pi = \sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) = \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t) \tag{5.4}$$

である。第 4 章で扱った $|\mathcal{K}| = 2$ のケースにおけるその他の均衡についても、上記と同様の議論から均衡における検索エンジンの利潤は (5.4) になることが導かれる。

(5.2) と (5.4) より、

$$\sum_{t\in T}(\delta^t \times \min\{v_1^t, v_2^t\}) \leq \sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) = \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)$$

であるから、複数検索語句をばら売りするよりも $|\mathcal{K}| = 2$ となるようにグルーピングしたほうが利潤が高いことがわかる。また $|\mathcal{K}| = 2$ のケースにおける均衡がすべて存在して $\sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) = \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)$ となるとき、

$$\max\left\{\sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t), \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)\right\} = \sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) = \sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)$$

である。したがって $|\mathcal{K}| = 2$ のケースでの検索エンジンの利潤は、$|\mathcal{K}| = 1$ のケースでの均衡における利潤の最大値と一致する。以上の議論から、第 4 章で扱ったような $|\mathcal{K}| = 2$ のケースの均衡が存在するときには、検索エンジンは $|\mathcal{K}| = 2$ となるようグルーピングを導入したほうが良い。

## 5.2　均衡における社会余剰の比較

本オークションにおける社会余剰を SW と置くと、SW は以下の式で表される。

$$SW = u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) + \pi$$

すなわち SW は 2 人の広告主の利得と検索エンジンの利潤を足し合わせたものである。検索エンジンの利潤は 2 人の広告主の支払額の合計であるから、SW は両広告主が獲得した広告枠の CTR と評価値を掛け合わせ足したものであると言える。

前節同様、まず複数の検索語句をばら売りするケースを考える。前述の通り、このケースでは支配戦略均衡が存在し、均衡において各検索語句の 1 番目の枠を獲得するのは評価値が大きいほうの広告主である。したがって均衡における社会余剰は

$$SW = \sum_{t \in T}(\theta^{1t} \times \max\{v_1^t, v_2^t\} + \theta^{2t} \times \min\{v_1^t, v_2^t\} \tag{5.5}$$

となる。

次に、$|\mathcal{K}| = 1$ となるケースを考える。命題 3.1 から、$|\mathcal{K}| = 1$ の場合には「広告主 1 がすべての検索語句で 1 番目の枠を獲得する」もしくは「広告主 2 が全ての検索語句で 1 番目の枠を獲得する」という 2 通りの均衡しかない。したがって均衡における社会余剰は

$$SW = \begin{cases} \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t + \theta^{2t} v_2^t) \\ \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t + \theta^{2t} v_1^t) \end{cases} \tag{5.6}$$

の 2 通りである。

さらに $|\mathcal{K}| = 2$ のケースについて検討する。利潤についての分析同様、第 4 章で示した命題で求めた必要十分条件がすべて成立しているとし、命題で扱った均衡での社会余剰について分析する。均衡ではいずれも両広告主が両キーワードで同じ値を入札している。したがってすべての検索語句において広告主 1 が 1 番目の枠を獲得する確率が $\frac{1}{2}$、広告主 2 が 1 番目の枠を獲得する確率が $\frac{1}{2}$ となり、均衡における社会余剰は

$$SW = \frac{1}{2}\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t + \theta^{2t} v_2^t) + \frac{1}{2}\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t + \theta^{2t} v_1^t) \tag{5.7}$$

となる。

(5.6) と (5.7) より、$|\mathcal{K}| = 2$ のケースでの社会余剰は $|\mathcal{K}| = 1$ のケースの均衡における 2 通りの社会余剰の平均になる。また (5.5) と (5.6) より、

$$\sum_{t \in T}(\theta^{1t} \times \max\{v_1^t, v_2^t\} + \theta^{2t} \times \min\{v_1^t, v_2^t\}) \geq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t + \theta^{2t} v_2^t)$$

かつ

$$\sum_{t\in T}(\theta^{1t}\times\max\{v_1^t,v_2^t\}+\theta^{2t}\times\min\{v_1^t,v_2^t\})\geq\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_2^t+\theta^{2t}v_1^t)$$

であるから、$|\mathcal{K}|=1$ のケースでの均衡における社会余剰よりもばら売りの場合の支配戦略均衡における社会余剰の方が大きいことが分かる。

以上の議論より、最も社会余剰が大きくなるのはグルーピングを導入せず、検索語句をばら売りするときであることが分かる。前述の通り、ばら売りの場合の支配戦略均衡では、両広告主は自らの評価値を個々の検索語句に対して入札している。したがってオークションの結果、すべての検索語句で 2 人のうちより評価値が高いほうに 1 番目の枠を、低いほうに 2 番目の枠を割り当てることができるため、社会余剰が最も高くなるのである。一方グルーピングを行う場合は、広告主は検索語句ではなくキーワードに対して入札するため、ばら売りの場合よりも戦略の範囲が制限されている。その結果同じキーワードに属する検索語句に対しては同じ広告枠の割り当てをすることになり、検索語句ごとの評価値の違いを反映することができない。このような理由から、本モデルではグルーピングを導入すると、社会余剰を最大化する均衡が達成できない。

# 6　おわりに

本論文では複数の検索語句を同時に扱うキーワードオークションにおいて、オークションの均衡がグルーピングの導入によってどのように影響を受けるかを分析した。具体的には Dhangwatnotai[2] で提案されたグルーピングの手法を用いて、複数の検索語句を扱うキーワードオークションを定義し、均衡分析を行った。グルーピングについてはすべての検索語句を 1 つのキーワードとしてグルーピングするケースと 2 つのキーワードにグルーピングするケースの 2 つの場合に分けた。また 2 つのキーワードにグルーピングするケースについてはさらに羽型と卵型の 2 つのタイプのキーワード構造に分けた。そしてばら売り、$|\mathcal{K}|=1$、$|\mathcal{K}|=2$ という 3 つのケースについて、検索エンジンの利潤と社会余剰を比較した。

均衡分析の結果、いずれのケースでも広告主が検索語句についての WAV を入札する戦略が重要であることが分かった。$|\mathcal{K}|=1$ のケースでは、すべてのナッシュ均衡を図示した。そして図における境界線の役割を果たすのが 2 人の広告主の WAV となっていることが分かった。また両広告主が自らの WAV を入札することが唯一の支配戦略均衡となっていることも明らかになった。本オークションでは検索語句に対して評価値を持っているが入札する対象はキーワードであるから、通常の VCG オークションのように正直申告戦

略を定義できない。したがって $|\mathcal{K}| = 1$ のケースで WAV を入札する戦略が支配戦略となることは、WAV が本オークションにおいて正直申告と似た役割を果たすことを示唆している。

$|\mathcal{K}| = 2$ のケースでは、羽型と卵型それぞれのキーワード構造において、両広告主が同じ値を入札するようなナッシュ均衡の必要十分条件を求めた。$|\mathcal{K}| = 2$ のケースでは $K_1$ と $K_2$ どちらの入札値を大きくするかによって、戦略プロファイルの場合分けができる。いずれの場合においても、両広告主の WAV が一致しているという条件が必要十分条件になることが分かった。この状況において両広告主にとっては、すべての検索語句において 1 番目の枠を獲得することと 2 番目の枠を獲得することが無差別になっている。このような状況は特殊なケースであるが、このような特殊ケースであっても $|\mathcal{K}| = 1$ のケース同様に WAV が重要な役割を果たしていることが明らかになった。

均衡における検索エンジンの利潤については、グルーピングを導入することで利潤が高くなる可能性があることが分かった。複数キーワードオークションにおいてグルーピングを導入するか否かを決定するのはオークション主催者である検索エンジンであるから、この結果はグルーピングの導入をするインセンティブになると言える。ただし $|\mathcal{K}| = 2$ のケースでは両広告主の入札値が一致するという限られた均衡での利潤でしか分析していない。したがって本稿で扱っていない状況において、均衡での検索エンジンの利潤が低くなる可能性はある。

一方社会余剰の観点ではグルーピングを導入するよりも、ばら売りのほうが良いことが分かった。これはグルーピングを導入することによって広告主が取ることができる戦略が制限され、複数の検索語句で同じ割り当てをしなければならないことによるものである。ばら売りならば広告主の評価値の大小に合わせて広告枠を割り当てることができるが、グルーピングを導入した場合はそのような望ましい均衡を達成できないのである。

今後の課題は大きく分けて 3 つある。1 つ目は、キーワードが 2 つのケースにおける均衡分析の範囲を広げることである。本稿では両広告主が同じ値を入札する均衡しか分析していない。したがって今後は両者の入札値が異なり、どちらの広告主が 1 番目の枠をとるかが決まるような均衡を分析する必要がある。本稿の結果から、そのような均衡においても WAV が重要な役割を果たすのではないかと考えられる。また WAV はあるひとまとまりの検索語句に対する評価値を加重平均した値であるが、そのほかにひとまとまりの検索語句に対する評価値の最大値や最小値を入札するなどの戦略も考えられる。それらの戦略が均衡となるか、またそれらの戦略と WAV を入札する戦略とを組み合わせた場合に何が起こるかを分析するなどして、分析可能な均衡の範囲を広げることが課題の 1 つである。

2 つ目は、モデルの一般化をすることである。本論文における分析では広告主が 2 人し

かいないために各検索語句について広告枠が 2 つずつしかない。したがってキーワードオークションに特徴的な、複数の枠を扱うために均衡が広くなるという状況をとらえきれていないという課題がある。また検索語句をグルーピングしたキーワードの数も、1 つか 2 つと限定的である。キーワードの個数を 3 つ以上に増やした場合に均衡がどのようになるか、WAV を入札する戦略が依然として均衡になりうるのかを分析する必要がある。また本論文では広告枠の配分と費用の決定について VCG メカニズムを用いたが、これを GSP メカニズムなどほかのメカニズムに変えることによって、グルーピングの有効性や均衡の実現がどのように変化するのかを明らかにすることも有用である。

3 つ目は、本論文の成果をもとに実験によってグルーピングの影響を分析することである。本論文で用いた複数の検索語句を扱うオークションは、モデルに含まれるプリミティブの多さゆえに、理論的な分析が困難である。例えばキーワードの個数を任意とした場合、本論文のように羽型・卵型といった単純な場合分けではすべての場合を網羅できない。またグルーピングという手法自体もいまだ十分議論されていない手法であるから、実験によって効果を検証することも必要である。また理論分析と実際の人間の行動は異なるため、グルーピングを導入したときの被験者の行動の変化や、本論文で扱った均衡が実現するかを実験によって検証することによって、興味深い結果を得られると考えられる。

## 参考文献


[1] Colini-Baldeschi, R., Leonardi, S., Henzinger, M., and Starnberger, M. (2016), On multiple keyword sponsored search auctions with budgets. *ACM Transactions on Economics and Computation, 4*(1), 1-12.

[2] Dhangwatnotai, P. (2011), Multi-keyword sponsored search. *Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce,* 91-100.

[3] Edelman, B., and Ostrovsky, M. (2007), Strategic bidder behavior in sponsored search auctions. *Decision support systems, 43*(1), 192-198.

[4] Edelman, B., Ostrovsky, M. and Schwarz, M. (2007), Internet Advertising and the Generalized Second Price Auction: Selling Billions Dollars Worth of Keywords. *American Economic Review, 97*(1), 242-259.

[5] Fukuda, E., Kamijo, Y., Takeuchi, A., Masui, M. and Funaki, Y. (2013), Theoretical and Experimental investigations of the performance of keyword auction mechanisms. *The RAND Journal of Economics, 44*(3), 438-461.

[6] 電通「2019 年日本の広告費」https://www.dentsu.co.jp/news/release/pdf-

cms/2020014-0311.pdf (2020 年 8 月 14 日閲覧).

# 付録

## 命題 3.1 の証明

**証明.** 戦略プロファイル $(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ が (i) を満たすとき、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡であることを示す。$b_1 \leq \mathrm{WAV}_2$ のとき、WAV の定義から、

$$\begin{aligned} b_1 &\leq \mathrm{WAV}_2 \\ \Leftrightarrow b_1 &\leq \frac{\sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t)}{\sum_{t \in T} \delta^t} \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T} \delta^t \times b_1 &\leq \sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t) \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T}(\delta^t b_1) &\leq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} - \theta^{2t}) v_2^t \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_2^t) &\leq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t - \delta^t b_1) \end{aligned} \tag{A.1}$$

が成り立つ。(A.1) より、広告主 1 の入札値 $b_1$ に対して広告主 2 が勝つような戦略が最適反応戦略になる。同様に $b_2 \geq \mathrm{WAV}_1$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} b_2 &\geq \mathrm{WAV}_1 \\ \Leftrightarrow b_2 &\geq \frac{\sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t)}{\sum_{t \in T} \delta^t} \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T} \delta^t \times b_2 &\geq \sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t) \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T}(\delta^t b_2) &\geq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} - \theta^{2t}) v_1^t \\ \Leftrightarrow \sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_1^t) &\geq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t - \delta^t b_2) \end{aligned} \tag{A.2}$$

が成り立ち、広告主 2 の入札値 $b_2$ に対して広告主 1 が負けるような戦略が最適反応戦略になる。仮定より $\mathrm{WAV}_1 \geq \mathrm{WAV}_2$ であるから $(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ が (i) を満たすとき、$b_2 \geq b_1$ となっている。したがって (A.1), (A.2) が成り立つとき、どちらも相手の戦略に対する最適反応戦略をとっているため、戦略プロファイル $(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡である。

$(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ が (ii) を満たすときは、(A.1), (A.2) の不等号を逆にすることによって、$\sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_2^t) \geq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t - \delta^t b_1)$ および $\sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_1^t) \leq \sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t - \delta^t b_2)$ が

得られる。すなわち広告主 1 は広告主 2 の入札値 $b_2$ に対して勝つような戦略が最適反応戦略であり、広告主 2 は広告主 1 の入札値 $b_1$ に対して負けるような戦略が最適反応戦略である。したがって、(ii) の条件の下で $b_1 \geq b_2$ となる戦略プロファイル $(s_1, s_2)$ では互いに相手の戦略に対する最適反応戦略をとっているから、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡である。

最後に戦略プロファイル $(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるとき、(i) または (ii) を満たすことを示す。$|\mathcal{K}| = 1$ のときのナッシュ均衡は、$b_1 \geq b_2$ となっているか $b_1 \leq b_2$ となっているかのどちらかである。ナッシュ均衡において $b_1 \geq b_2$ となっているならば、広告主 1 の利得 $u_1(s_1, s_2)$ について以下の不等式が成立する。

$$\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t - \delta^t b_2) \geq \sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_1) \tag{A.3}$$

すなわち、広告主 1 は $b_2$ に対して勝つような戦略が最適反応戦略になっている。そして (A.3) を変形することによって、

$$\begin{aligned}
&\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t - \delta^t b_2) \geq \sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_1) \\
\Leftrightarrow &\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_1^t - \theta^{2t} v_1^t) \geq \sum_{t \in T}(\delta^t b_2) \\
\Leftrightarrow &\sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t) \geq \sum_{t \in T} \delta^t \times b_2 \\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{t \in T}(\delta^t v_1^t)}{\sum_{t \in T} \delta^t} \geq b_2 \\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_1 \geq b_2
\end{aligned} \tag{A.4}$$

が得られる。一方広告主 2 は $b_1$ に対して負けるような戦略が最適反応戦略になるから、同様に変形すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t - \delta^t b_1) \leq \sum_{t \in T}(\theta^{2t} v_2) \\
\Leftrightarrow &\sum_{t \in T}(\theta^{1t} v_2^t - \theta^{2t} v_2^t) \leq \sum_{t \in T}(\delta^t b_1) \\
\Leftrightarrow &\sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t) \leq \sum_{t \in T} \delta^t \times b_1 \\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{t \in T}(\delta^t v_2^t)}{\sum_{t \in T} \delta^t} \leq b_1 \\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_2 \leq b_1
\end{aligned} \tag{A.5}$$

が得られる。したがって (A.4) および (A.5) より、条件 (i) が成立する。

逆にナッシュ均衡において $b_1 \leq b_2$ となっているならば、両広告主の利得から以下の 2 つの式が成立する。

$$\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_1^t - \delta^t b_2) \leq \sum_{t\in T}(\theta^{2t}v_1)$$

$$\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_2^t - \delta^t b_1) \geq \sum_{t\in T}(\theta^{2t}v_2)$$

これらの式を変形すると、それぞれ以下のような式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_1^t - \delta^t b_2) \leq \sum_{t\in T}(\theta^{2t}v_1)\\
\Leftrightarrow &\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_1^t - \theta^{2t}v_1^t) \leq \sum_{t\in T}(\delta^t b_2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t) \leq \sum_{t\in T}\delta^t \times b_2\\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{t\in T}(\delta^t v_1^t)}{\sum_{t\in T}\delta^t} \leq b_2\\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_1 \leq b_2
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_2^t - \delta^t b_1) \geq \sum_{t\in T}(\theta^{2t}v_2)\\
\Leftrightarrow &\sum_{t\in T}(\theta^{1t}v_2^t - \theta^{2t}v_2^t) \geq \sum_{t\in T}(\delta^t b_1)\\
\Leftrightarrow &\sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t) \geq \sum_{t\in T}\delta^t \times b_1\\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{t\in T}(\delta^t v_2^t)}{\sum_{t\in T}\delta^t} \geq b_1\\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_2 \geq b_1
\end{aligned} \tag{A.7}$$

そして (A.6) および (A.7) より、条件 (ii) が成立する。

以上の議論から、戦略プロファイル $(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるとき、$(s_1, s_2) = (b_1, b_2)$ は (i) または (ii) を満たす。

□

## 系 3.1 の証明

**証明.** 命題 3.1 の証明より、$b_2 \geq \mathrm{WAV}_1$ のとき、広告主 1 にとっては $b_2 \leq b_1$ となるような $b_1$ を入札することが最適反応戦略である。したがってこの状況では $b_1 = \mathrm{WAV}_1$

となる戦略も最適反応戦略である。対して $b_2 \le \mathrm{WAV}_1$ のとき、広告主 1 にとっては $b_2 \ge b_1$ となるような $b_1$ を入札することが最適反応戦略である。したがってこの状況では $b_1 = \mathrm{WAV}_1$ となる戦略も最適反応戦略である。ゆえに、広告主 1 の $b_1 = \mathrm{WAV}_1$ という戦略が他の戦略を支配するから、$b_1 = \mathrm{WAV}_1$ という戦略は支配戦略である。またこのほかに広告主 1 にとっての支配戦略は存在しない。同様の議論から、広告主 2 の $b_2 = \mathrm{WAV}_2$ という戦略は唯一の支配戦略である。したがって、$(s_1, s_2) = (\mathrm{WAV}_1, \mathrm{WAV}_2)$ という戦略プロファイルは唯一の支配戦略均衡である。 □

## 命題 4.1 の証明

第一に $(s_1, s_2)$ がナッシュ均衡ならば条件 1 と 2 を満たすことを示す。

$(s_1, s_2)$ がナッシュ均衡であることから、広告主 1 にとって、$s_2 = (b^*(K_1), b^*(K_2))$ に対して両キーワードで同じ値を入札することが最適反応戦略になっている。広告主 1 が両キーワードで同じ値を入札するとすべての検索語句で引き分けになるから、広告主 1 の利得は

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{2}[\theta^{1x} v_1^x - \delta^x b^*(K_1) + \theta^{2x} v_1^x] + \sum_{y \in Y} \frac{1}{2}[\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1) + \theta^{2y} v_1^y] + \sum_{z \in Z} \frac{1}{2}[\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2) + \theta^{2z} v_1^z] \tag{A.8}$$

となる。対して $b^*(K_1) > b^*(K_2)$ であることを踏まえたうえで、「$K_1$ で勝ち、$K_2$ で負ける」「$K_1$ で同じ値を入札し、$K_2$ で勝つ」「$K_1$ で同じ値を入札し、$K_2$ で負ける」「$K_1$ で負け、$K_2$ で同じ値を入札する」ときの広告主 1 の利得を考える。両キーワードで同じ値を入札することが最適反応になっていることから、以下の 4 つの式が得られる。

$$\sum_{x \in X} [(\theta^{1x} v_1^x - \delta^x b^*(K_1)) - (\theta^{2x} v_1^x)] + \sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] \le 0 \tag{A.9}$$

$$\sum_{x \in X} [(\theta^{1x} v_1^x - \delta^x b^*(K_1)) - (\theta^{2x} v_1^x)] + \sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] \ge 0 \tag{A.10}$$

$$\sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2x} v_1^z)] \le 0 \tag{A.11}$$

$$\sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2x} v_1^z)] \ge 0 \tag{A.12}$$

(A.9) と (A.10) より

$$\sum_{x\in X}[(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*(K_1))-(\theta^{2x}v_1^x)]+\sum_{y\in Y}[(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*(K_1))-(\theta^{2y}v_1^y)]=0 \quad \text{(A.13)}$$

が得られ、(A.11) と (A.12) から

$$\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*(K_2))-(\theta^{2x}v_1^z)]=0 \quad \text{(A.14)}$$

が得られる。(A.13) を変形すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X}[(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*(K_1))-(\theta^{2x}v_1^x)]+\sum_{y\in Y}[(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*(K_1))-(\theta^{2y}v_1^y)]=0\\
\Leftrightarrow &\sum_{x\in X}(\delta^x v_1^x)+\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)=(\sum_{x\in X}\delta^x+\sum_{y\in Y}\delta^y)b^*(K_1)\\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{x\in X}(\delta^x v_1^x)+\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)}{\sum_{x\in X}\delta^x+\sum_{y\in Y}\delta^y}=b^*(K_1)\\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_1^{K_1}=b^*(K_1) \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

が得られる。同様に (A.14) を変形すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*(K_2))-(\theta^{2x}v_1^z)]=0\\
\Leftrightarrow &\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)=\sum_{z\in Z}\delta^z b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{z\in Z}\delta^z}=b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_1^{Z}=b^*(K_2) \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

が得られる。

広告主 2 についても $s_1=(b^*(K_1),b^*(K_2))$ に対して両キーワードで同じ値を入札し引き分けになることが最適反応戦略になっていることから、広告主 1 と同様の議論より以下の 2 つの式が得られる。

$$\mathrm{WAV}_2^{K_1}=b^*(K_1) \quad \text{(A.17)}$$

$$\mathrm{WAV}_2^{Z}=b^*(K_2) \quad \text{(A.18)}$$

(A.15), (A.16), (A.17), (A.18) より、$(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡ならば条件 1 と 2 を満たす。

第二に条件 1 と 2 を満たすならば $(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡であることを示す。

条件 1 より $\mathrm{WAV}_1^{K_1} = b^*(K_1)$ であり、これを変形すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{WAV}_1^{K_1} &= b^*(K_1) \\
\Leftrightarrow \frac{\sum_{x \in X}(\delta^x v_1^x) + \sum_{y \in Y}(\delta^y v_1^y)}{\sum_{x \in X}\delta^x + \sum_{y \in Y}\delta^y} &= b^*(K_1) \\
\Leftrightarrow \sum_{x \in X}(\delta^x v_1^x) + \sum_{y \in Y}(\delta^y v_1^y) &= (\sum_{x \in X}\delta^x + \sum_{y \in Y}\delta^y) b^*(K_1) \\
\Leftrightarrow \sum_{x \in X}(\theta^{1x} v_1^x - \delta^x b^*(K_1)) + \sum_{y \in Y}&(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) \\
&= \sum_{x \in X}(\theta^{2x} v_1^x) + \sum_{y \in Y}(\theta^{2y} v_1^y) \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。(A.19) は広告主 1 にとって $K_1$ で勝つことと負けることの利得が変わらないことを表している。$Z$ についても $K_1$ 同様に条件 2 を変形させることで

$$\sum_{z \in Z}(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) = \sum_{z \in Z}(\theta^{2z} v_1^z) \qquad \text{(A.20)}$$

を得、広告主 1 にとって $K_2$ で勝つことと負けることの利得は変わらないと言える。(A.19) と (A.20) より、広告主 2 の $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ という入札に対して広告主 1 が $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ を入札し引き分けとなることは、最適反応戦略である。

同様に広告主 2 についても条件 1 と 2 から、広告主 1 の $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ という入札に対して同じく $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ を入札し引き分けとなることは最適反応戦略となる。したがって互いに相手の戦略に対して最適反応戦略をとっているから、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡である。

## 命題 4.2 の証明

命題 4.1 の証明と同様の手順で示すことができる。広告主 1 が両キーワードで広告主 2 の入札値 $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ と同じ値を入札することによって得られる利得は (A.8) の通りである。このとき $b^*(K_1) = b^*(K_1) = b^*$ であることを踏まえ、「$K_1, K_2$ 両方で勝つ」「$K_1, K_2$ 両方で負ける」ときの利得を考える。両キーワードで同じ値を入札することが最

適反応になっていることから、以下の 2 つの式が得られる。

$$\sum_{x\in X}[(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*)-(\theta^{2x}v_1^x)]+\sum_{y\in Y}[(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*)-(\theta^{2y}v_1^y)]$$
$$+\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*)-(\theta^{2z}v_1^z)]\leq 0$$
$$\sum_{x\in X}[(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*)-(\theta^{2x}v_1^x)]+\sum_{y\in Y}[(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*)-(\theta^{2y}v_1^y)]$$
$$+\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*)-(\theta^{2z}v_1^z)]\geq 0$$

2 つの式を合わせ、変形すると

$$\sum_{x\in X}[(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*)-(\theta^{2x}v_1^x)]+\sum_{y\in Y}[(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*)-(\theta^{2y}v_1^y)]$$
$$+\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*)-(\theta^{2z}v_1^z)]=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{x\in X}(\delta^x v_1^x)+\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)+\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{x\in X}\delta^x+\sum_{y\in Y}\delta^y+\sum_{z\in Z}\delta^z}=b^*$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{WAV}_1=b^* \quad \text{(A.21)}$$

が得られる。広告主 2 についても同様の議論から

$$\mathrm{WAV}_2=b^* \quad \text{(A.22)}$$

が得られるから、(A.21),(A.22) より、$(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡ならば条件を満たす。

広告主 1 の評価値についての条件 $\mathrm{WAV}_1=b^*$ が成立するとき、変形すると

$$\sum_{x\in X}(\theta^{1x}v_1^x-\delta^x b^*)+\sum_{y\in Y}(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*)+\sum_{z\in Z}(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*)=\sum_{x\in X}(\theta^{2x}v_1^x)+\sum_{y\in Y}(\theta^{2y}v_1^y)+\sum_{z\in Z}(\theta^{2z}v_1^z)$$

が得られ、すべての検索語句において勝つことと負けることの利得が変わらないことがわかる。したがって広告主 2 の $s_2=(b^*,b^*)$ に対して広告主 1 が $(b^*,b^*)$ を入札し引き分けとなることは最適反応である。広告主 2 についても同様の議論から、広告主 1 の $s_1=(b^*,b^*)$ に対して $(b^*,b^*)$ を入札することは最適反応であるから、$(s_1,s_2)$ はナッシュ均衡である。

## 命題 4.3 の証明

第一に $(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡ならば条件 1 と 2 を満たすことを示す。

$(s_1, s_2)$ がナッシュ均衡であることから、広告主 1 にとって、広告主 2 の $s_2 = (b^*(K_1), b^*(K_2))$ に対して両キーワードで同じ値を入札することが最適反応戦略になっている。広告主 1 が両キーワードで広告主 2 と同じ値を入札し引き分けになったとき、広告主 1 の利得は

$$\sum_{y \in Y} \frac{1}{2}[\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1) + \theta^{2y} v_1^y] + \sum_{z \in Z} \frac{1}{2}[\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2) + \theta^{2z} v_1^z] \tag{A.23}$$

となる。$b^*(K_1) > b^*(K_2)$ であることを踏まえ、「$K_1$ で勝ち、$K_2$ で同じ値を入札する」「$K_1$ で負け、$K_2$ で同じ値を入札する」「$K_1$ で同じ値を入札し、$K_2$ で勝つ」「$K_1$ で同じ値を入札し、$K_2$ で負ける」ときの広告主 1 の利得を考える。両キーワードで同じ値を入札することが最適反応になっていることから、以下の 4 つの式が得られる。

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] \leq 0 \tag{A.24}$$

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] \geq 0 \tag{A.25}$$

$$\sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] \leq 0 \tag{A.26}$$

$$\sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] \geq 0 \tag{A.27}$$

(A.24) と (A.25) から

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] = 0 \tag{A.28}$$

が得られ、(A.26) と (A.27) から

$$\sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] = 0 \tag{A.29}$$

が得られる。(A.28) を変形すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_1)) - (\theta^{2y} v_1^y)] = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{y \in Y} (\delta^y v_1^y) = \sum_{y \in Y} (\delta^y b^*(K_1)) \\
\Leftrightarrow &\frac{\sum_{y \in Y} (\delta^y v_1^y)}{\sum_{y \in Y} \delta^y} = b^*(K_1) \\
\Leftrightarrow &\mathrm{WAV}_1^Y = b^*(K_1) \qquad (\mathrm{A.30})
\end{aligned}$$

となり、(A.29) を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{z\in Z}[(\theta^{1z}v_1^z-\delta^y b^*(K_2))-(\theta^{2z}v_1^z)]=0\\
\Leftrightarrow&\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)=\sum_{z\in Z}(\delta^y b^*(K_2))\\
\Leftrightarrow&\frac{\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{z\in Z}\delta^z}=b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow&\mathrm{WAV}_1^Z=b^*(K_2) \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}
$$

となる。広告主 2 について、$s_1=(b^*(K_1),b^*(K_2))$ に対して両キーワードで同じ値を入札することが最適反応戦略になっているから、広告主 1 と同様の議論より以下の 2 つの式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{WAV}_2^Y&=b^*(K_1) \qquad \text{(A.32)}\\
\mathrm{WAV}_2^Z&=b^*(K_2) \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}
$$

(A.30), (A.31), (A.32), (A.33) より、$(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡であるならば条件 1 と 2 が成立する。

一方条件 1 と 2 が成立するとき、広告主 1 の評価値について $\mathrm{WAV}_1^Y=b^*(K_1)$ かつ $\mathrm{WAV}_1^Z=b^*(K_2)$ が成り立つ。それぞれ変形すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{WAV}_1^Y&=b^*(K_1)\\
\Leftrightarrow\frac{\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)}{\sum_{y\in Y}\delta^y}&=b^*(K_1)\\
\Leftrightarrow\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y)&=\sum_{y\in Y}\delta^y b^*(K_1)\\
\Leftrightarrow\sum_{y\in Y}(\theta^{1y}v_1^y-\delta^y b^*(K_1))&=\sum_{y\in Y}(\theta^{2y}v_1^y) \qquad \text{(A.34)}\\
\mathrm{WAV}_1^Z&=b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow\frac{\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{z\in Z}\delta^z}&=b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow\sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)&=\sum_{z\in Z}\delta^z b^*(K_2)\\
\Leftrightarrow\sum_{z\in Z}(\theta^{1z}v_1^z-\delta^z b^*(K_2))&=\sum_{z\in Z}(\theta^{2z}v_1^z) \qquad \text{(A.35)}
\end{aligned}
$$

となる。(A.34) および (A.35) は、それぞれ広告主 1 にとって $K_1$ と $K_2$ で勝つことと負けることの利得が変わらないことを表している。したがって広告主 2 の $s_2=$

$(b^*(K_1), b^*(K_2))$ に対して広告主 1 が $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ を入札し引き分けとなることは最適反応戦略となる。

同様に広告主 2 についても条件 1 と 2 から、広告主 1 の $s_1 = (b^*(K_1), b^*(K_2))$ に対して $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ を入札することは最適反応戦略である。したがって互いに相手の戦略に対して最適反応戦略をとっているから、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡である。

## 命題 4.4 の証明

$(s_1, s_2)$ がナッシュ均衡であることから、広告主 1 にとって、広告主 2 の $s_2 = (b^*(K_1), b^*(K_2))$ に対して両キーワードで同じ値を入札することが最適反応戦略になっている。広告主 1 が両キーワードで同じ値を入札したときの利得は (A.23) の通りである。$b^*(K_1) \leq b^*(K_2)$ であることを踏まえ、「$K_2 = Y \cup Z$ で勝つ」「$K_2$ で負ける」ときの広告主 1 の利得を考える。両キーワードで広告主 2 と同じ値を入札することが最適反応戦略になっていることから、以下の 2 つの式が得られる。

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_2)) - (\theta^{2y} v_1^y)] + \sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] \leq 0 \quad \text{(A.36)}$$

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_2)) - (\theta^{2y} v_1^y)] + \sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] \geq 0 \quad \text{(A.37)}$$

(A.36) と (A.37) を合わせると

$$\sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_2)) - (\theta^{2y} v_1^y)] + \sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] = 0$$

となり、これを変形すれば

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in Y} [(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_2)) - (\theta^{2y} v_1^y)] + \sum_{z \in Z} [(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) - (\theta^{2z} v_1^z)] = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{y \in Y} (\delta^y v_1^y) + \sum_{z \in Z} (\delta^z v_1^z) = (\sum_{y \in Y} \delta^y + \sum_{z \in Z} \delta^z) b^*(K_2) \\
\Leftrightarrow & \frac{\sum_{y \in Y} (\delta^y v_1^y) + \sum_{z \in Z} (\delta^z v_1^z)}{\sum_{y \in Y} \delta^y + \sum_{z \in Z} \delta^z} = b(K_2) \\
\Leftrightarrow & \mathrm{WAV}_1 = b^*(K_2) \qquad \text{(A.38)}
\end{aligned}$$

となる。広告主 2 についても同様の議論から $\mathrm{WAV}_2 = b^*(K_2)$ となることが分かる。(A.38) と合わせれば、$(s_1, s_2)$ がナッシュ均衡であるなら $\mathrm{WAV}_1 = \mathrm{WAV}_2 = b^*(K_2)$ が成り立つことが言える。

一方 $\mathrm{WAV}_1 = b^*(K_2)$ が成立するとき、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{WAV}_1 = b^*(K_2) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sum_{y\in Y}(\delta^y v_1^y) + \sum_{z\in Z}(\delta^z v_1^z)}{\sum_{y\in Y}\delta^y + \sum_{z\in Z}\delta^z} = b^*(K_2) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{y\in Y}(\theta^{1y} v_1^y - \delta^y b^*(K_2)) + \sum_{z\in Z}(\theta^{1z} v_1^z - \delta^z b^*(K_2)) = \sum_{y\in Y}(\theta^{2y} v_1^y) + \sum_{z\in Z}(\theta^{2z} v_1^z)
\end{aligned}
$$

であるから、広告主 1 にとって $K_2 = Y \cup Z$ 全体で勝つことと負けることの利得は変わらない。したがって広告主 2 の $s_2 = (b^*(K_1), b^*(K_2))$ という入札に対して広告主 1 が $(b^*(K_1), b^*(K_2))$ を入札し引き分けとなることは最適反応戦略となる。同様に広告主 2 についても、$\mathrm{WAV}_2 = b^*(K_2)$ から広告主 1 と同じ値を入札することが最適反応戦略になることが導かれる。ゆえに互いに相手の戦略に対して最適反応戦略をとっているので、$(s_1, s_2)$ はナッシュ均衡である。