ゴミと持続的成長

赤尾　健一*

No.0105

October, 2001

* Ken-ichi Akao
Associate Professor, School of Social Sciences, Waseda University
E-mail: akao@mn.waseda.ac.jp

ゴミと持続的成長
version 1.2

赤尾 健一
早稲田大学社会科学部

September 7, 2001

Abstract

ゴミ問題が持続的成長を終わらせるかを調べる。もしわれわれが消費したもの（廃棄される資本を含めて）がすべてゴミとして環境に負荷を与えるならば、経済成長を続ける経済は有限時間のうちに環境的破滅に至る。つまり、持続的成長は不可能である。もし、そのすべてがゴミとして環境に負荷を与えるものではないのならば、一定の条件の下で、環境的に持続可能性な持続的成長経路は、社会的最適となることができる。そのケースが生じるには、他の条件とともにある水準以上の自然の自浄能力が必要となる。

1 はじめに

環境保全と経済成長の両立可能性は、環境経済学の中心的問題のひとつである。実証面では環境クズネッツ曲線の計測が行われており、理論研究としては、最適成長理論の枠組みでその可能性の特徴付けが行われている。

その理論面での重要な結果は、Stokey(1998) と Aghion and Howitt(1998) によって得られている。それらが明らかにしたのは、最適経路として環境保全と経済成長が同時に生じるための必要条件が、環境汚染を引き起こさない産業部門が経済成長のエンジンであり、かつ代表的家計の異時点間消費の代替弾力性が 1 以下であることである。この結果は次のカラクリによってもたらされる。代替弾力性を低く設定することで、最適経路上での物的資本（それが汚染排出をもたらす）の持続的成長率が抑えられ、その結果、経済は環境的破滅に陥らない。一方で、持続的成長には、物的資本の限界生産性を家計の時間選好率より高く保つ必要がある。クリーンな産業部門で技術進歩は、汚染の増加なしにそれを可能とする。

汚染とは直接的には関係のない、知識や人的資本の蓄積が、経済成長のエンジンであると考えるのは、もっともなことと思われるので、この結果にはアピールするものがある。ただし低い代替弾力性には、注意が必要である。それは、持続的成長率は低くするものの、現在及び近い将来の消費量を増加させる。上記の研究では消費部門はクリーンであると考えられているが、これは必ずしも現実を反映していない。消費量がより多くなることはゴミの排出量を増加させることを意味する。このため、ゴミの存在を考慮するならば、環境保全と経済成長の両立条件は、いっそう厳しくなるかもしれない。あるいは持続的成長は不可能になるかもしれない。このことについて明らかにするのが、本研究の課題である。

以下では、まず最初に純粋に技術的な議論を展開する。すなわち、経済と環境のそれぞれの技術のみを考慮し、いわゆる持続状態が環境的破滅を引き起こさない条件を考察する。いくつかの不可能性定理が示される。すなわち、正の成長率をもつ持続状態はかならず環境的破滅に陥るケースを明らかにする。考察にはリサイクル活動も考慮される。残念ながら、リサイクル活動は環境的破滅を回避する役割は果たせないことが明らかになる。次いで、可能性定理が示される。つまり、環境保全と経済成長の両立が技術的に可能な状況が明らかになる。その両立可能性は、われわれが消費するもの（廃棄される物的資本を含めて）がすべて環境に負荷を与えるわけではなく、その一部が負荷を与えると解釈することによって可能となる。より具体的にいえば、知識、技術、ブランドといった形のない財もまたゴミとなるが、それは環境に負荷を与えないことに注目する。経済に投入され、やがて廃棄されて環境に負荷を与える財の投入量が非正の成長率をもつときに限り、経済成長と環境保全の両立は技術的に可能となる。次にこの研究は、家計の選好を考察に加え、最適経路として環境保全と経済成長の両立の可能性を考察する。はじめに、Stokey(1998) と Aghion and Howitt(1998) の結果に対比することを目的に、消費のみが負の外部性をもつケースが考察される。つまり、そこでは最終財消費を通じて生じるゴミのみが、そしてその一部が環境に負荷を与える。次に、資本の減耗分を含めたゴミと持続可能な開発のフルモデルが考察される。

本論に入るのに先だって、ここで本研究を通じた記号に関する約束と若干の用語の定義についてを述べておく。非負実数 $t \in [0, \infty)$ は時点を表す。特に $t = 0$ は現在時点である。時間の関数 $x : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ は (t) を省略して、単に x と表す。$x(t)$ と表記されるときは、それは x の時点 t での値を意味している。初期値 $x(0)$ を x_0 と表す。x の時間微分を $\dot{x}$ で表す。また、x の成長率を

$$g_x := \frac{\dot{x}}{x}$$

で表す。関数 $x : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ に関する等式と不等式は、すべて“（ルベーグ測度に関して）定義域のほとんどいたるところ” *a.e.* on $[0, \infty)$ の意味で用いられる。たとえば、$x = 0$ は

$$x = 0 \text{ a.e. on } [0, \infty)$$

の略記である。第3節以下で用いられる記号“$\max \int_0^\infty \cdot\, dt$” は、sporadically catching up の意味での最適経路を求めよ、という意味である。必ずしも$\lim_{T \to \infty} \int_0^T \cdot dt$ が存在することを仮定するものではない。対応して、“最適” という言葉は、sporadically catching up の意味での最適である。次に用語として、持続状態とは、時間の関数で表される各変数が、それぞれ一定の成長率をもつ状態をいう。均斉成長とは、持続状態でかつ、主要なマクロ経済変数である集計最終財産出量 Y、その集計消費量 C、および集計物的資本ストック量 K の成長率が等しい状況をいう。均斉成長におけるこれら3つの変数の同一の成長率を特に均斉成長率と呼ぶ。正の均斉成長率をもつ均斉成長を正の均斉成長と呼ぶ。

2 純粋に技術的な議論

2.1 持続的経済成長の不可能性

マクロ経済分析の標準的な想定として、消費と物的資本への投資について完全代替性を採用する。各時点での最終財の集計生産量を Y、その集計消費量を C、集計資本ストック量を K、そして資本減耗率を$\delta > 0$ とする。Y, C, K は時間の関数で、各時点で非負の値をとるものとする。資本減耗率δ は時間を通じて一定とする。最終財の分配は次の状態方程式で表される。

$$\dot{K} = Y - (C + \delta K) \tag{1}$$

環境面の記述として、自然環境の発展を次の状態方程式で表すことにする[1]：

$$\dot{E} = -z - \theta E, \quad E \in [E_{min}, 0),\ \theta > 0 \text{ (constant)}. \tag{2}$$

ここで E は自然環境の質を指標であり、より大きな値はより望ましい環境を表す。その下限 E_{min} を下回ることは、経済に不可逆的かつ累積的な取り返しのつかない損失を与えることを仮定する。したがって、持続的成長は自然環境の質がこのクリティカルな水準よりも劣化しないという条件の下でのみ可能となる。θ は自然の自浄係数であり、ここではそれは一定であると仮定されている。最後に z は汚染フローである。

はじめに汚染フローが、経済の生み出すゴミフローが消費と資本の減耗分の合計（$C + \delta K$、以下では一次ゴミと呼ぶことにする）に一致すると考えてみよう。このとき、次の命題が得られる。

Proposition 1 もし、$z = C + \delta K$ ならば、いかなる正の均斉成長（$g_Y = g_K = g_C > 0$）も有限時間で、環境的破滅に至る。

Proof. 自然環境の質の発展は

$$E(t) = E_0 e^{-\theta t} - K_0 (\frac{C}{K} + \delta) \frac{e^{g_K t} - e^{-\theta t}}{g_K + \theta}$$

で記述される。したがって$\lim_{t \to \infty} E(t) = -\infty$。 ■

[1] この定式化は、Aghion and Howitt (1998) にしたがっている。それは自然の自浄能力が環境が劣化すればするほど高まる、という設定である。ただしクリティカルな環境の質の下限 $E_{min} < 0$ が存在して、その水準を下回ると自然の自浄能力は失われ、反対に環境汚染に対して正のフィードバックが働くことが暗黙のうちに仮定されている。さらに、そのような状況では、経済はつぶれてしまうことも暗黙のうちに仮定されている。

2.2 リサイクル活動

現実の社会では、消費と資本の減耗分がそのままゴミになるわけではなく、リサイクル活動によって、一定の量は有用な資源として経済に還元されている。そこでリサイクル活動によって、上記の環境的破滅を免れることが可能かを検討しておく。

リサイクル率を $1-r \in [0,1)$ と表す。ここでは、ゴミの 100 %リサイクルは不可能であること $(r \neq 0)$ を仮定している。修正された最終財の分配は次の状態方程式で表される。

$$\dot{K} = Y - r(C + \delta K) \tag{3}$$

最初に持続状態におけるリサイクル率がいかなるものとなるかを見ておこう。

Proposition 2 各変数 Y, C, K, r の成長率が一定となる持続状態を考える。

(a) 均斉成長が生じているならば、リサイクル率は一定である。すなわち

$$g_Y = g_K = g_C \Rightarrow g_r = 0.$$

(b) リサイクル率が一定だが、均斉成長が生じていない状況は、資本減耗起源のゴミ産出量に等しく資本ストックが減少する状況である。すなわち

$$\dot{K} = -\delta r_0 K, \quad g_r = 0.$$

(c) リサイクル率が一定でないならば、それは *(i)* 消費量と資本ストック量が一定で最終財生産量の変化は単にゴミ産出量の変化を意味する状況か、*(ii)* 消費財起源のゴミ産出量に等しく資本ストックが減少する状況か、あるいは *(iii)* *(b)* に示された状況である。すなわち

$$\begin{aligned} &(i)\ Y = r(C_0 + \delta K_0), \quad g_K = g_C = 0, \\ &(ii)\ \dot{K} = -rC < 0, \\ &(iii)\ \dot{K} = -\delta r K < 0 \end{aligned}$$

のいずれかが成立する。

Proof. (a) (3) は

$$g_K = \frac{Y}{K} - r\frac{C}{K} - r\delta \tag{4}$$

と書ける。g_K が一定であることに注意すると、その時間微分は

$$0 = (g_Y - g_K)\frac{Y}{K} - (g_r + g_C - g_K)\frac{rC}{K} - \delta r g_r. \tag{5}$$

これより、もし均斉成長が生じているならば、

$$g_r(\frac{C}{K} + \delta)r = 0.$$

$(C/K+\delta)r \neq 0$ なので $g_r = 0$ を得る。

(b) (4) と (5) を組み合わせて、

$$g_r g_K + (g_Y - g_K - g_r)\frac{Y}{K} - (g_C - g_K)\frac{rC}{K} = 0 \tag{6}$$

が得られる。これをさらにもう一度時間微分すれば、持続状態であることを利用して

$$(g_Y - g_K - g_r)(g_Y - g_K) = (g_C - g_K)(g_r + g_C - g_K)\frac{rC}{Y} \text{ (constant)} \tag{7}$$

を得る。さて、$g_r = 0$ かつ均斉成長ではないことを仮定すると、(7) より $g_Y = g_C$ である。したがって (6) より

$$(g_Y - g_K)\frac{Y - rC}{K} = 0.$$

$g_Y - g_K \neq 0$ なので $Y - rC = 0$ が成立する。(3) より、$\dot{K} = -\delta r_0 K$ を得る。

(c) (7) をさらに時間微分することで次が得られる。

$$(g_C - g_K)(g_r + g_C - g_K)(g_r + g_C - g_Y) = 0.$$

したがって、この左辺の各項のそれぞれが 0 となるケースを考察すればよい。以下、$g_r \neq 0$ を仮定する。

(i) $g_C - g_K = 0$ のケース。(7) によって、このとき $(g_Y - g_K - g_r)(g_Y - g_K) = 0$。ただし、(a) の結果により $g_Y - g_K = 0$ （均斉成長）は成立しない。つまり、$g_Y - g_K - g_r = 0$。(6) に結果を代入して、$g_r g_K = 0$ を得る。つまり、$g_K = g_C = 0$。さらに (3) より

$$Y = r(C_0 + \delta K_0), \quad g_K = g_C = 0$$

が得られる。

(ii) $g_r + g_C - g_K = 0$ のケース。(7) によって、このとき $g_Y - g_K - g_r = 0$ か $g_Y - g_K = 0$ のいずれかが成立する。ただし、もし後者が成立するならば、(6) は、

$$g_r(\dot{K} - Y + rC) = \delta r K g_r = 0$$

を意味する。これは矛盾である。つまり $g_Y - g_K - g_r = 0$ である。このとき (6) より、$g_r(\dot{K} + rC) = 0$、つまり次が得られる。

$$\dot{K} = -rC < 0.$$

(iii) $g_r + g_C - g_Y = 0$ のケース。(7) は

$$(g_C - g_K)(g_r + g_C - g_K)\left(1 - \frac{rC}{Y}\right) = 0$$

を意味する。ここでは、(i)、(ii) で考察されたケースを除いてよいから、$Y = rC$ を得る。すなわち、

$$\dot{K} = -\delta r K < 0.$$

■

以上の結果は、持続状態が効率的なものであるか否かを問わず、人々にもっともらしく見えるような持続状態とは、リサイクル率が時間に対して不変であり、いわゆる均斉成長が生じている状態であることを示唆している。しかし、正の均斉成長と両立可能なリサイクル率一定の状態では、環境的破滅は免れない。これは命題1、2の簡単な系である。

Corollary 3 ゴミフローが $z = r(C+\delta K)$ で表されるとする。ここで $1-r \in [0,1)$ はリサイクル率である。リサイクル活動が存在する経済においても、いかなる正の均斉成長（$g_Y = g_K = g_C > 0$）も有限時間で、環境的破滅に至る。

Proof. 命題2 (a) によって $r = \bar{r}$ (constant)。したがって、環境の発展は

$$\dot{E} = -\bar{r}(C + \delta K) - \theta E$$

で表される。これは初期値 $\bar{r}C_0, \bar{r}K_0$ からはじまる、リサイクル率0のケースと等しい。命題1は消費と資本の初期値に依存せずに成立するので、主張は証明された。■

このように残念ながら、リサイクル活動は持続的成長に実現可能性を与えることはできない。さらに環境問題を無視するとしても、正の均斉成長状態でリサイクル活動を持続することについてすら、ある技術的条件が満たされなければ不可能である。

それを示すために、リサイクル活動のための投入物である労働について考えよう。リサイクルサービスの生産のための他の要素は捨象する。一次ゴミ1単位から $1-r$ をリサイクルするために必要な労働投入量を $q(r)$ で表すことにする。一次ゴミの量に対して線形の技術を想定し、また、リサイクルの技術進歩係数を Q で表すとする。このときリサイクル活動に必要な生の労働は

$$L_r = q(r)\frac{(C + \delta K)}{Q} \tag{8}$$

で表される。

Proposition 4 労働の総供給量が一定で効率的な生産が行われている経済を考える。その経済で正の均斉成長率 $g_Y = g_K = g_C > 0$ と正のリサイクル率の両方が実現しているならば、Q の成長率は均斉成長率と一致している。

Proof. 効率的な生産をともなう持続状態では、各部門の労働投入量の成長率は0でなければならない。ある部門で労働投入量が正の成長率をもつことは、労働総供給の制約を破壊することになる。つまり、あらゆる部門で労働投入量の成長率は非正である。一方で、負の成長率をもつ部門が存在することは、未利用労働が存在することを意味する。リサイクル活動は、効率的な経済でそれが行われている限り、環境と経済の両面によい影響を与えているので、未利用労働の存在

は、効率性に矛盾する。したがって$\dot{L}_r = 0$を得る。他方、命題2 (a) によって r は一定なので、

$$g_Q = g_K$$

でなければならない。■

この命題はリサイクル技術の不断の進歩が期待できないならば、長期的なリサイクル率は0であることを示唆している。

2.3 持続的経済成長の可能性

以上の議論は、ゴミ問題を考えるとき、最適経路を議論する以前に単に技術的な帰結として、経済成長に限界があることを示唆している。その結果をもたらした本質的な想定は、一次ゴミが、リサイクルで一部が削減されるとしても、そのまま汚染フローとなる、というものである。しかし、汚染フローを一次ゴミフローと必ずしも同一視しなくてもよいかもしれない。

Stokey-Aghion and Howitt の持続可能な発展のモデルの枠組みでは、正の持続的成長と環境の持続的改善を同時に実現するために、外生的（Stokey, 1998）あるいは内生的（Aghion and Howitt, 1998）に技術進歩の存在を仮定している。それらのモデルでは、消費財や資本は、実体のある財と実体のない知識や技術のミックスである。このように、一次ゴミフロー（$r(C+\delta K)$）が実体のないゴミを含むならば、その部分は自然環境に影響を与えることはない。このアイデアをさらに追跡しよう。

汚染フローと一次ゴミフローとを区別するために、ここでは産出されるゴミの重さで、汚染フロー、つまり実体のあるゴミの量を表すことと想定する。このようなゴミフローを表現するために、最終財の生産要素として、天然資源フローを導入することにする。R でその投入量を表す。天然資源フローの量は重量単位で表されている。最終財の生産プロセスとは、投入された天然資源フローを他の生産要素を用いて最終財に変換するプロセスであるとみなす。つまり、R、その他生産要素の投入によって得られる生産物 Y の重さは R と等しいと考えよう。このとき、消費財起源のゴミの重さは

$$r\frac{R}{Y}C$$

で表される。一方、資本ストック起源のゴミの重さを考えるために、資本ストックの重さで表現される“経済の重さ”を導入する。資本1単位の重さを w_K で表せば、経済の重さ W は次の式で表される：

$$W = w_K K.$$

したがって、資本ストック起源のゴミの重さは

$$w_K r\delta K = r\delta W$$

で表される。全体としてのゴミの重さ、つまり汚染フローは、

$$z = r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) \tag{9}$$

である。これより、環境の質の状態方程式は

$$\dot{E} = -r\left(R\frac{C}{Y} + \delta W\right) - \theta E \tag{10}$$

と表されることになる。われわれは以上の議論によって、新たな状態変数 W を導入した。この経済の重さに関する状態方程式は、マテリアルバランスによって

$$\dot{W} = -r\left(R\frac{C}{Y} + \delta W\right) + R \tag{11}$$

で表される。以上の新たな設定で、最後の持続不可能性に関する命題が得られる。

Proposition 5 汚染フローが *(9)* で表される経済を考える。もし、天然資源の持続的成長率 g_R が正ならば、いかなる正の均斉成長（$g_Y = g_K = g_C > 0$）も有限時間で、環境的破滅に至る。

Proof. 均斉成長経路を考える。(11) より、経済の重さは

$$W^*(t) = W_0^* e^{-r\delta t} + R_0\left(1 - r\frac{C^*}{Y^*}\right)\frac{e^{g_R t} - e^{-r\delta t}}{g_R + r\delta} > 0$$

で表される。ここで

$$1 - r\frac{C^*}{Y^*} = \frac{\dot{K}^* + r\delta K^*}{Y^*} > 0 \text{ (constant)}$$

であり、ある時点以降 W^* は狭義単調増加し、$\lim_{t\to\infty} W(t) = \infty$。したがって、もし天然資源の成長率 g_R が正ならば、ある時点以降、汚染フローは自然の自浄能力を上回りつづける。その結果、$\lim_{t\to\infty} E(t) = -\infty$。 ■

環境的破滅を回避するためには、正の均斉成長において $g_R \leq 0$ でなければならない[2]。この想定の下で、次の命題が得られる。

[2]特に g_R が負の値をとる状況では、天然資源が実際には再生可能資源であるかどうかに関わらず、経済はそれをあたかも枯渇性資源のように利用していることになる。

Proposition 6 $g_R \leq 0$ を満たす均斉成長を考える。このとき、次が成立する。

$$g_R = g_E = g_W = \frac{R+\theta E}{W-E}, \tag{12}$$

$$\frac{C}{Y} = \frac{1}{r}\left(1 - g_R\frac{W}{R}\right) - \delta\frac{W}{R}, \tag{13}$$

$$g_K = [g_R + r\delta]\frac{W}{R}\frac{Y}{K} - r\delta, \tag{14}$$

$$\theta(-E) \geq R, \quad \frac{R}{W} > g_R + \delta, \tag{15}$$

ここで最初の不等式は、$g_R \leq 0$ と同値であり、そのなかの等号は $g_R = 0$ のとき、そのときに限り成立する。また、2番目の不等式は $C/Y > 0$ と同値である。さらに正の均斉成長（$g_K > 0$）であるには

$$g_R + r\delta > \frac{RK}{WY}r\delta \tag{16}$$

でなければならない。

Proof. (11) より

$$g_W = -r\left(\frac{R}{W}\frac{C}{Y} + \delta\right) + \frac{R}{W} = -r\delta + \frac{R}{W}\left(1 - r\frac{C}{Y}\right) \text{ (constant)}$$

と書ける。したがって、持続状態で $g_W = g_R$。この結果を (10) に代入する。

$$g_E = -r\left(\frac{C}{Y} + \delta\frac{W}{R}\right)\frac{R}{E} - \theta \text{ (constant)}.$$

よって、$g_E = g_R$ でなければならない。さらに $g_R = g_E = g_W$ なので、(10), (11) から

$$(W-E)g_R = Wg_W - Eg_E = R + \theta E,$$

すなわち

$$g_R = \frac{R+\theta E}{W-E}$$

を得る。消費ー生産比 C/Y は

$$\frac{C}{Y} = \left[\left(\frac{R}{W} - g_R\right)\frac{1}{r} - \delta\right]\frac{W}{R} = \frac{1}{r}\left(1 - (g_R + r\delta)\frac{W}{R}\right).$$

一方、資本成長率 g_K は、$g_K = (Y/K)[1 - r(c/Y)] - r\delta$ なので

$$g_K = [g_R + r\delta]\frac{W}{R}\frac{Y}{K} - r\delta$$

となる。消費ー生産比が正であるには、

$$\frac{R}{W} > g_R + \delta$$

でなければならない。また、正の資本成長率のためには

$$g_R + r\delta > \frac{RK}{WY} r\delta$$

が要求される。■

この結果から、持続状態において、最終財生産量に対する消費の比 C/Y は、他の変数が不変ならば、自然の自浄能力θ が高いほど高くなることがわかる。一方、資本成長率は低下する。つまり自然の自浄能力は消費に制約を与えている。リサイクル活動はこの制約を緩めるのと同じ働きをする。すなわちリサイクル率が高まると、つまり r が低下すると、消費ー生産比は上昇する。一方で、資本成長率はそれが正の成長率である限り低下する[3]。ただし、このような考察は、自然の自浄能力の変化が経済の内生変数に及ぼす影響を無視している。それらを考慮した分析のためには、最適経路について考察する必要がある。それは次節以降の課題である。

最適経路に関する考察のために、ここでの技術的話題の最後として、$g_R \leq 0$ をともなう正の均斉成長がどのような技術の下で可能であるかを検討しておく。この問いを考えるには、天然資源採取部門について考察する必要がある。天然資源採取のための生産要素を、ここでは簡単に労働のみであると仮定しよう。正の均斉成長でもし、天然資源採取部門に（労働増加的）技術進歩が持続的に生じるならば、天然資源フローは正の成長率をもつことになる。これはすでに見たように、持続状態においては各部門の労働投入量は時間を通じて不変となるためである。命題５が示すように、このケースでは、正の均斉成長は環境的破滅に突入する。

正の均斉成長において、この状況を避けるためには、ふたつの極端な想定のどちらかを採用しなければならない。一つは、天然資源採取部門では技術進歩が一切生じないとする仮定である。もう一つは、その部門では究極の技術進歩が生じ、その結果、経済は何ら生産要素の必要なしに天然資源を採取できるとする仮定である。前者の仮定の下では、持続状態において天然資源フローの投入量は時間を通じて一定となる。一方、後者では持続状態で天然資源フローの投入量が負の成長率で低下することが許される。このふたつの想定に対応して、以下のふたつの節では、ゴミ問題が存在する世界において、持続的成長が実現するかどうかを調べることにする。

3

$$g_K = g_R \frac{W}{R}\frac{Y}{K} + r\delta\left[\frac{W}{R}\frac{Y}{K} - 1\right]$$

と変形できることに気付くこと。$g_R \leq 0$ なので、$g_K > 0$ であるためには

$$\frac{W}{R}\frac{Y}{K} - 1 > 0$$

でなければならない。したがって r の低下は g_K の低下をもたらす。

3 消費外部性と持続可能な発展

この節を含む以下の二つの節では、正の均斉成長が社会的最適経路の必要条件を満たすかを調べる。経路が社会的に最適であるためには、少なくともそれが環境的破滅に至らないものであることが要求される。したがって、ここで調べられる社会的に最適な正の均斉成長経路は、持続可能な発展経路と呼ぶことができるだろう。

以下の二節にわたって採用される共通の仮定として、経済の人口は一定とし、その人口を 1 に基準化する。それによって一人あたりに関する議論と社会集計に関する議論は一致することになる。各時点での労働供給は固定的でその総量は人口に等しいとする。各時点で時間に対して不変の瞬間的社会厚生関数

$$\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}-\gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega},\quad \gamma,\sigma,\omega>0\ (\text{constant})\ .$$

を採用する。

さてこの節では特に、Aghion and Howitt (1998) の結果との対比が可能なモデルを考察する。第一に彼らのモデルにおいて、環境マネジメントに関する技術革新は想定されていない。これに対応して、ここではリサイクル率が 0 のケースを扱う。また、彼らは生産、あるいは資本ストックが生み出す負の外部性に注目し、消費が生み出す外部性は考慮していない。これに対して、ここでは資本ストックが生み出す外部性を捨象し、消費外部性のみを考察する。具体的には産業廃棄物δW を考察から排除する。したがって、ここでは経済の重さに関する law of motion は現れない[4]。

前節での考察に対応して二つのモデルが検討される。一つは、正の均斉成長で天然資源の投入量が時間を通じて一定となるモデルである。もう一つは、正の均斉成長で天然資源の投入量が負の成長率をもつケースである。

3.1 天然資源投入量が一定のケース

ここでは次の形式の最終財生産関数を用いる：

$$Y=AKR^{1-\nu},\quad A>0,\nu\in(0,1).$$

均斉成長において、最終財生産に関して資本の平均生産性は、時間を通じて一定でなければならない[5]。ここで採用された関数型は、均斉成長経路で R が一定のもとでこの条件を満たす最も簡単なものである。なお、Stokey(1998), Aghion and Howitt(1998) が考察した生産に外部性が存在するケースでは、このタイプの生産関数では正の均斉成長は不可能であったことに注意しよう。

[4]形式的にいえば、次節で示すモデルにおいて$\delta=0,r=1$ の特殊ケースをここでは扱う。

[5]最終財に関する資本の平均生産性は Y/K であり、$g_Y=g_K$ なので、時間を通じて平均生産性は一定である。

ここでの唯一の労働投入先は天然資源採取部門である。そして経済の労働供給量は1に固定されている。したがって、時間を通じて $R=1$ であり、ここでの問題は次のように表される。

$$\max \int_0^\infty \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] e^{-\rho t}dt$$

$$\text{subject to } Y = AK,$$

$$\dot{K} = Y - C, \tag{17}$$

$$\dot{E} = -\frac{C}{Y} - \theta E, \tag{18}$$

$$C, K \geq 0,\ E \in [E_{min}, 0),$$

$$K(0) = K_0 > 0,\ E(0) = E_0 \in [E_{min}, 0) \text{ given.}$$

問題に対応する（経常価値）ハミルトニアンを次のように表す。

$$H = \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] + \lambda(Y-C) - \zeta\left(\frac{C}{Y} + \theta E\right)$$

ここで、λ と ζ は共役変数である。問題の解が満たすべき必要条件は

1. Maximum conditions

$$\frac{\partial H}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda - \frac{\zeta}{Y} = 0. \tag{19}$$

2. Adjoint equations

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \left[\lambda A + \zeta\frac{C}{YK}\right], \tag{20}$$

$$\dot{\zeta} = (\rho+\theta)\zeta - \gamma(-E)^{\omega}. \tag{21}$$

である。

次の命題は、このモデルに関して、これらの条件を満たす正の均斉成長経路が存在するための条件を示している。前節の技術的考察によって、均斉経路上では $g_E = 0$ であることがわかっている。その経路が環境的に持続可能なものであるには、$E \geq E_{min}$ が成立する必要がある。命題は、そのための条件もまた含んでいる。

Proposition 7 正の均斉成長最適経路が存在するための必要十分条件は

$$\sigma = 1, \tag{22}$$

$$\rho\gamma\theta^{-(1+\omega)} + (\rho+\theta)(A-\rho) > 0, \tag{23}$$

$$\rho\gamma(-E_{min})^{\omega} + (\rho+\theta)\left[A\theta - \frac{\rho}{(-E_{min})}\right] \geq 0, \tag{24}$$

である。ここで1行目は $g_E = 0$ を満たす均斉成長最適経路が存在するための必要条件であり、2行目と3行目はそれぞれ、均斉成長経路が正であること（$g_K > 0$）、環境的に持続可能であること（$E \geq E_{min}$）を保証する必要十分条件である。さらに、正の均斉成長最適経路は一意で、

$$\rho\gamma(-E_0)^{1+\omega} + (\rho+\theta)A\theta(-E_0) - \rho(\rho+\theta) = 0 \tag{25}$$

を満たす環境の質の初期値 E_0 と均斉成長率

$$g_K = A[1-\theta(-E_0)] \tag{26}$$

で特徴付けられる。

Proof. 証明は (a), (b), (c) の3つステップに分かれる。(a) では $\sigma = 1$ を導出する。(b) では、命題の他の等式と不等式を導出する。最後に (c) として、正の均斉成長最適経路の存在と一意性を示す。

(a) (19) を次のように書きなおす：

$$YC^{-\sigma} - \lambda Y - \zeta = 0.$$

その時間微分は

$$YC^{-\sigma}(1-\sigma)g_K - \dot{\lambda}Y - \lambda Y g_K - \dot{\zeta} = 0.$$

(20), (21) を代入して整理することで

$$YC^{-\sigma}(1-\sigma)g_K - (g_K + \rho - A)\lambda Y - \left(\rho + \theta - \frac{C}{K}\right)\zeta + \gamma(-E)^{\omega} = 0$$

が得られる。再び (19) を利用して、λY を消去することで次を得る。

$$YC^{-\sigma}(-\sigma g_K - \rho + A) - \theta\zeta + \gamma(-E)^{\omega} = 0.$$

あるいは

$$\zeta = \frac{-\sigma g_K - \rho + A}{\theta} YC^{-\sigma} + \frac{\gamma(-E)^{\omega}}{\theta}.$$

時間微分をとって、

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \frac{-\sigma g_K - \rho + A}{\theta} YC^{-\sigma}(1-\sigma)g_K \\ &= \left[\zeta - \frac{\gamma(-E)^{\omega}}{\theta}\right](1-\sigma)g_K.\end{aligned}$$

これを (21) と組み合わせると、次が得られる。

$$[\rho + \theta - (1-\sigma)g_K]\zeta - \frac{\gamma(-E)^{\omega}}{\theta}[\theta - (1-\sigma)g_K] = 0.$$

明らかに、$\rho+\theta-(1-\sigma)g_K \neq 0$ なので

$$\zeta = \frac{\theta-(1-\sigma)g_K}{\theta[\rho+\theta-(1-\sigma)g_K]}\gamma(-E)^{\omega} \text{ (constant)}$$

である。これは $\dot{\zeta}=0$ を意味するから、再び (21) より、

$$\zeta = \frac{1}{\rho+\theta}\gamma(-E)^{\omega} \tag{27}$$

である。これら二つの等式から、簡単な計算により$\sigma=1$ (22) が得られる。
さらにこのとき、(19) は

$$\lambda Y = Y/C - \zeta \text{ (constant)}$$

と書けるから、

$$g_\lambda = -g_K$$

である。また、(19) より

$$\frac{\zeta}{\lambda Y} = \frac{1}{\lambda C} - 1$$

である。これを (20) に代入して (17) と組み合わせることで

$$\lambda = \frac{1}{\rho K} \tag{28}$$

が得られる。

(b) 消費-資本比を次のように表記する。

$$S_C := \frac{C}{K}$$

(18) より $S_C = A\theta(-E)$。(17) と組み合わせれば、(26) が直ちに得られる。
一方、$\sigma=1$ のもとで、(19), (28) より

$$\zeta = A\left(\frac{1}{S_C}-\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\theta(-E)} - \frac{A}{\rho}.$$

これと (27) から、

$$\frac{1}{\theta(-E)} - \frac{A}{\rho} = \frac{\gamma(-E)^{\omega}}{\rho+\theta}$$

を得る。整理して、(25)

$$\rho\gamma(-E)^{1+\omega} + (\rho+\theta)A\theta(-E) - \rho(\rho+\theta) = 0$$

が得られる。そこで関数 $f: R_+ \to R$ を次のように定義する。

$$f(x) := \rho\gamma x^{1+\omega} + (\rho+\theta)A\theta x - \rho(\rho+\theta).$$

明らかに $f(x)$ は連続かつ、狭義単調増加関数であり、$f(0) < 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ なので、$f(x) = 0$ の解 x^* は正かつ一意に定まる。問題は、x^* が $g_K > 0$ と $x^* \leq -E_{min}$ に両立するか、である。ここで後者は、$f(-E_{min}) \geq 0$ に帰着する。すなわち、(24) の

$$\rho\gamma(-E_{min})^{\omega} + (\rho+\theta)\left[A\theta - \frac{\rho}{(-E_{min})}\right] \geq 0$$

である。一方、前者に関しては、(17) より $g_K = A - S_C = A(1-\theta x^*)$ なので

$$g_K > 0 \Leftrightarrow x^* < \theta^{-1}$$

である。さらにこの条件は $f(\theta^{-1}) > 0$ と同値である。すなわち (23)

$$f(\theta^{-1}; A, \theta, \rho, \gamma) = \rho\gamma\theta^{-(1+\omega)} + (\rho+\theta)(A-\rho) > 0.$$

(c) よく知られているようにもし最大化ハミルトニアンが状態変数に関して (jointly) 狭義凹ならば、条件 (19)-(20)、及び横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}[\lambda(t)K(t) + \zeta(t)E(t)] = 0$$

を満たす実行可能経路は最適かつ一意である。$g_\lambda = -g_K$, $g_\zeta = g_E = 0$ なので、横断性条件は明らかに満たされている。よって、最大化ハミルトニアンの凹性が確認できればよい。

$\sigma = 1$ のもとで、(19) は

$$1 - \lambda C - \zeta\frac{C}{Y} = 0$$

と書ける。これをハミルトニアンに代入して、最大化ハミルトニアン

$$H^* = -\ln\left(\lambda + \zeta\frac{1}{AK}\right) - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega} + \lambda AK - \zeta\theta E - 1$$

を得る。関数 h を

$$h(K) := \ln\left(\lambda + \zeta\frac{1}{AK}\right)$$

と定義しよう。

$$h'(K) = -\frac{(\zeta/A)K^{-2}}{\lambda + (\zeta/A)K^{-1}} = -\frac{(\zeta/A)}{K[\lambda K + (\zeta/A)]}$$

であり、正の均斉成長に対応する共役変数λ, ζ、およびパラメータ A は正なので $h\prime$ は K の狭義単調増加関数である。つまり、$h'' > 0$、であり、H^* の狭義凹性が得られた。 ■

この命題に対する第一印象は、異時点間の代替弾力性に関する厳しい制約、すなわち正確にそれは 1 でなければならない、ということを除けば、持続的成長が実現するための条件はそれほど厳しいものではない、ということではないだろうか。特に、正の均斉成長を保証する条件 (23) は、環境問題を除いたモデルでのそれ ($A-\rho>0$) よりも弱い。その直観的な理由は、環境問題の存在が自由放任の状態よりも、消費を抑制するためである。ここでは消費が負の外部性を発生させるので、消費が少なければ少ないほど、環境に対する負荷は小さくなる。同時に、より少ない消費は資本蓄積を促し経済の成長率を高める。つまり環境的持続可能性と持続的経済成長は、このモデルの枠組みでは両立がより容易である。ただし、以前にも注意したように、Stokey(1998), Aghion and Howitt(1998) の場合、ここでの AK タイプの生産関数では環境問題が障壁となって、持続的経済成長は不可能であった。現実の世界には、さまざまな原因によって環境に負荷がかかっている。したがって、ここでの経済成長に関する結果は、消費外部性のみを取り上げ、生産外部性を捨象したことによるものであると解釈するのが妥当である。

むしろ、この命題の重要な含意は、(24) にある。すなわち、自然の自浄能力θが小さな社会では、最終財生産の生産性パラメータ A は十分に高くなければならないことである。逆の言い方をすれば、いかに A が高くとも、θ が小さければ、環境制約 E_{min} の存在が、経済の持続的成長を不可能にさせる。

3.2 天然資源投入量が減少するケース

ここでは天然資源投入量が減少するケースを扱う。用いられる最終財生産関数は次の形のものである：

$$Y = AK^{\alpha}(BL)^{\beta}R^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha,\beta > 0 \text{ (constant)}\ ,\ \alpha+\beta<1,$$

ここで L は生の労働投入量を、BL は効率的労働投入量を表す。均斉成長では資本に関する最終財の平均生産性 Y/K は一定に保たれる。正の均斉成長において K が正の成長率をもつ一方で R が負の成長率をもつならば、平均生産性を維持するために、効率的労働は BL は正の成長率を持たねばならない。したがって、前項でみた AK タイプの生産関数では持続的成長は不可能であり、(労働増加的)技術進歩係数 B の持続的増加が要求される。内生的成長モデルで標準的に用いられている、もっとも簡単な技術進歩係数の law of motion として、ここでは

$$\dot{B} = \eta(1-L)B, \quad \eta > 0 \text{ (constant)}\ .$$

の形式を採用しよう。注意として、前節の最後で述べたように、天然資源投入量が減少するケースでは、天然資源採取には一切の投入が必要でないと想定しなければならない。したがって、労働供給は最終財生産と研究開発の 2 部門にそれぞれ、L と $1-L$ に分配される。

ここでわれわれが考察する問題は次のように表される：

$$\max \int_0^\infty \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] e^{-\rho t}dt$$

$$\text{subject to } Y = AK^\alpha (BL)^\beta R^{1-\alpha-\beta}, \tag{29}$$

$$\dot{K} = Y - C, \tag{30}$$

$$\dot{B} = \eta(1-L)B \tag{31}$$

$$\dot{E} = -\frac{RC}{Y} - \theta E, \tag{32}$$

$$L \in [0,1],\ R, C, K \geq 0,\ E \in [E_{min}, 0),$$

$$K_0, B_0 > 0,\ E_0 \in [E_{min}, 0) \text{ given.}$$

共役変数を λ, μ, ζ として（経常価値）ハミルトニアンを次のように定義する。

$$H = \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] + \lambda(Y-C) + \mu\eta(1-L)B - \zeta\left(\frac{RC}{Y} + \theta E\right).$$

問題の解が満たすべき必要条件は

1. Maximum conditions

$$\frac{\partial H}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda - \zeta\frac{R}{Y} = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = (1-\alpha-\beta)\lambda\frac{Y}{R} - (\alpha+\beta)\zeta\frac{C}{Y} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = \beta\lambda\frac{Y}{L} - \mu\eta B + \beta\zeta\frac{RC}{YL} = 0. \tag{35}$$

2. Adjoint equations

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \alpha\left[\lambda\frac{Y}{K} + \zeta\frac{RC}{YK}\right], \tag{36}$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \left[\beta\lambda\frac{Y}{B} + \mu\eta(1-L) + \beta\zeta\frac{RC}{YB}\right], \tag{37}$$

$$\dot{\zeta} = (\rho+\theta)\zeta - \gamma(-E)^\omega. \tag{38}$$

である。

ここでの課題は、これらの条件を満たす正の均斉成長経路が存在するかを調べることである。以下では、そのような経路を、正の均斉 Pontryagin 経路と呼ぶことにしよう。その存在は、正の均斉最適経路の存在の必要条件である[6]。

[6]多くの内生的成長モデルがそうであるように、ここでのモデルも非凸性にとりつかれている。したがって、横断性条件を含む Pontryagin の最大値原理が最適解の十分条件であるとは限らない。

ここでは均斉成長経路上で、$g_L = 0$ を想定する[7]。このとき、前節での技術的な議論により、$g_R < 0$ をともなうあらゆる正の均斉成長経路で

$$g_K = g_Y = g_C > 0 \text{ (constant)}, \tag{39}$$

$$g_B = \frac{1}{\beta}[(1-\alpha)g_K - (1-\alpha-\beta)g_R] > 0 \text{ (constant)}, \tag{40}$$

$$g_E = g_R < 0 \text{ (constant)} \tag{41}$$

が成立している。

Proposition 8 *(a)* $g_R < 0$ をともなう正の均斉最適経路が存在するための必要条件は

$$\sigma > 1, \tag{42}$$

$$1 < \frac{\eta}{\rho}, \tag{43}$$

$$\theta > \frac{-\beta(1-\sigma)(\eta-\rho)}{(1-\alpha)(1+\omega)-(1-\sigma)[\beta(1+\omega)+(1-\alpha-\beta)]} \tag{44}$$

である。ここで最初と最後の条件は、正の均斉 *Pontryagin* 経路が環境の質の改善をともなうこと（$g_R < 0$）を保証する。2番目の不等式は正の均斉成長率が実行可能であることを保証する。これらの条件の下で、正の均斉成長率は一意に定まり、

$$g_K = \frac{\beta(1+\omega)(\eta-\rho)}{(1-\alpha)(1+\omega)-(1-\sigma)[\beta(1+\omega)+(1-\alpha-\beta)]} > 0, \tag{45}$$

である。

(b) この3条件が成立するとき、任意の $E_0 \in [E_{min}, 0)$ に対してある $K_0, B_0 > 0$ が存在して、*(45)* の均斉成長率と

$$g_R = \frac{1-\sigma}{1+\omega} g_K < 0 \tag{46}$$

をもつ均斉 *Pontryagin* 経路が存在する。また、この経路は横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}[\lambda(t)K(t) + \mu(t)B(t) + \zeta(t)E(t)] = 0$$

を満たす。

---

[7] 均斉成長に要求されるのは、

$$g_{BL} = BL(g_B + g_L) = [(1-\alpha)g_K - (1-\alpha-\beta)g_R]/\beta \text{ (constant)},$$

のみである。これと $g_B = \eta(1-L)$, $L \in [0,1]$ を満たす解は、$g_L = 0$ となるものとともに、L がベルヌイ型微分方程式の解として単調に減少し 0 に収束するものがある。しかし、これら二つの解のいずれを選択しても経済全体への結果は変わらない。このため、$g_L = 0$ となる方の解をここでは選択している。

Proof. (a) $g_R < 0$ をともなう正の均斉最適経路の存在を仮定する。

この経路上である時点 $t \geq 0$ において $\zeta(t) \leq 0$ であると仮定しよう。このとき (34) によって $\lambda(t) \leq 0$ となるが、これらは (33) と矛盾する。したがって $\zeta > 0, \lambda > 0$、そして (34) は

$$\frac{\lambda Y}{\zeta R}\left(\frac{Y}{C}\right) = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} > 0 \tag{47}$$

と書ける。さらにこれより

$$g_\lambda - g_\zeta + g_K - g_R = 0. \tag{48}$$

(35) に (47) を代入すると

$$\frac{\mu BY}{\zeta RC} = \frac{\beta}{\eta L(1 - \alpha - \beta)} > 0 \tag{49}$$

である。したがって$\mu > 0$ と

$$g_\mu - g_\zeta + g_K - g_B = 0 \tag{50}$$

が得られる。(48), (50) から

$$(g_\lambda - g_\mu) - (g_B - g_K) = 0$$

である。

(34) と (35) を組み合わせて $\zeta CR/Y$ の項を消去することで

$$\frac{\lambda Y}{\mu B} = \frac{(\alpha + \beta)\eta L}{\beta} \tag{51}$$

が得られる。(37) に (49)、(51) を代入して

$$g_\mu = \rho - \eta(1 - L) - \beta\left(\frac{\lambda Y}{\mu B} + \frac{\zeta RC}{\mu YB}\right) = \rho - \eta \tag{52}$$

を得る。つまり、g_μ は一定。よって、(48), (50) からすべての共役変数は均斉成長経路で一定である。

特に (38) に関して

$$g_\zeta = (\rho + \theta) - \gamma\frac{(-E)^\omega}{\zeta} \text{ (constant)}$$

なので

$$g_\zeta = \omega g_R < 0. \tag{53}$$

(48) と (53) を (33) に代入すると

$$(C_0)e^{-\sigma g_K t} = \left(\lambda_0 + \zeta_0\frac{R_0}{Y_0}\right)e^{[(1+\omega)g_R - g_K]t}.$$

すなわち

$$(1-\sigma)g_K = (1+\omega)g_R$$

である。この等式が $g_K > 0, g_R < 0$ と両立するのは、(42) の条件 $\sigma > 1$ が満たされるとき、そのときに限られる。そしてこのとき

$$g_R = \frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K. \tag{54}$$

(53)、(54) を (48) と (50) のそれぞれに代入することで

$$g_\lambda = g_\zeta - g_K + g_R = -\sigma g_K < 0, \tag{55}$$

$$g_\mu = g_\zeta - g_B + g_R = (1-\sigma)g_K - g_B < 0 \tag{56}$$

が得られる。

(56) に (40)、(52)、そして (54) を代入すれば

$$\begin{aligned}
\rho - \eta &= (1-\sigma)g_K - g_B \\
&= (1-\sigma)g_K - \frac{1}{\beta}[(1-\alpha)g_K - (1-\alpha-\beta)g_R] \\
&= (1-\sigma)g_K - \frac{1}{\beta}\left[(1-\alpha)g_K - (1-\alpha-\beta)\frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K\right] \\
&= \left[-\frac{1-\alpha}{\beta} + (1-\sigma)\left(1+\frac{1-\alpha-\beta}{\beta(1+\omega)}\right)\right]g_K \\
&= -\frac{(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\sigma)[\beta(1+\omega) + (1-\alpha-\beta)]}{\beta(1+\omega)}g_K.
\end{aligned}$$

すなわち、(45)

$$g_K = \frac{\beta(1+\omega)(\eta-\rho)}{(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\sigma)[\beta(1+\omega) + (1-\alpha-\beta)]}$$

を得る。 $\sigma > 1$ で分母は正であり、したがって $g_K > 0$ ならば、(43) の不等式 $\eta/\rho > 1$ が成立しなければならない。

以上のように g_K が具体的に得られたので、すべての成長率がパラメータの関数として導出できる。特に g_B からは、(31) によって $L = 1 - g_B/\eta$ が得られる。制約条件 $L \leq 1$ は $\eta/\rho > 1$ と $(1-\sigma)g_K < 0$ によって狭義不等式で満たされる。一方、もう一つの実行可能性条件 $L \geq 0$ は $g_B \leq \eta$ 、すなわち

$$\begin{aligned}
g_B &= \frac{(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\alpha-\beta)(1-\sigma)}{\beta(1+\omega)}g_K \\
&= \frac{(\eta-\rho)[(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\alpha-\beta)(1-\sigma)]}{(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\sigma)[\beta(1+\omega) + (1-\alpha-\beta)]} \leq \eta
\end{aligned}$$

と同値である。整理して

$$\begin{aligned}
&\eta(1-\sigma)\beta(1+\omega) \\
&\leq \rho[(1-\alpha)(1+\omega) - (1-\alpha-\beta)(1-\sigma)].
\end{aligned}$$

この左辺は負であり、右辺は正なので、不等号は厳密な不等式で成立する。

残された条件 (43) は、(32) から得られる。これは次のように書きなおされる。

$$\frac{RC}{Y(-E)} = g_E + \theta > 0. \tag{57}$$

つまり $\theta > -g_E$ でなければならない。$g_E = g_R$ であることに気付けば、(54) と (45) により

$$\begin{aligned} -g_E &= -\frac{1-\sigma}{1+\omega} g_K \\ &= \frac{-\beta(\eta-\rho)(1-\sigma)}{(1-\alpha)(1+\omega)-(1-\sigma)[\beta(1+\omega)+(1-\alpha-\beta)]} < \theta \end{aligned}$$

が得られる。

(b) 変数 $Y, C, R, L, K, B, E, \lambda, \mu, \zeta$ がその実行可能性条件とともに (29) から (38) までを満たせば、それは Pontryagin 経路である。そのような経路で、(a) で導出された成長率をもつ正の均斉 Pontryagin 経路が構成できるならば、主張の前半部分は証明される。したがって、以下では (a) で導出された成長率が用いられる。すでに (a) で導出した関係に加えて、以下の等式を導く

はじめに (36) に対応するものとして、これに (47) を代入して整理する：

$$\begin{aligned} g_\lambda &= \rho - \alpha\left(\frac{Y}{K} + \zeta\frac{RC}{\lambda Y K}\right) = \rho - \alpha\frac{Y}{K}\left(1 + \frac{\zeta RC}{\lambda Y^2}\right) \\ &= \rho - \alpha\frac{Y}{K}\left(1 + \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) = \rho - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{Y}{K}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{Y}{K} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}(\rho - g_\lambda) > 0 \tag{58}$$

を得る。

次に (30) に対応するものとして、(30) に (58) を代入すると

$$g_K = \frac{Y}{K} - \frac{C}{K} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}(\rho - g_\lambda) - \frac{C}{K}$$

であり、これより

$$\frac{C}{K} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\left(\rho - g_\lambda - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}g_K\right) > 0, \tag{59}$$

ここで最後の不等式は (55) と (42) から次が成立することによる。

$$\rho - g_\lambda - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}g_K = \rho + \left(\sigma - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)g_K > 0.$$

(33) に対応するものとして、この等式に、(47)、 (58)、 (59) を代入して

$$
\begin{aligned}
C^{-\sigma} - \lambda - \zeta\frac{R}{Y} &= C^{-\sigma} - \frac{\lambda Y}{C}\left(\frac{C}{Y} + \frac{\zeta RC}{\lambda Y^2}\right) \\
&= C^{-\sigma} - \frac{\lambda Y}{C}\left(\frac{\rho - g_\lambda - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}g_K}{\rho - g_\lambda} + \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る。整理して、

$$
\frac{C^{1-\sigma}}{\lambda Y} = \frac{\rho - g_\lambda - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}g_K}{\rho - g_\lambda} + \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta} > 0. \tag{60}
$$

(38) は

$$
\frac{(-E)^{\omega}}{\zeta} = \frac{\rho + \theta - g_\zeta}{\gamma} > 0. \tag{61}
$$

と書ける。

(31) に対応するのは

$$
L = 1 - g_B/\eta \in (0,1) \tag{62}
$$

である。(40) と (45) によって、L の値はすでに決まっており、定数として扱うことができる。

このことから、(29) を

$$
\frac{Y}{K^\alpha B^\beta R^{1-\alpha-\beta}} = L^\beta > 0 \tag{63}
$$

と表すことにする。

以上で、条件 (42) − (44) のもとで、各変数の成長率に関して (40)、 (41)、 (53) − (56)、そして (45) を想定したとき、(29) から (38) の連立方程式と同値な連立方程式 (63)、 (59)、 (57)、(60)、 (56)、 (51)、(58)、 (61) が得られる[8]。これらの連立方程式を満たす、$Y, C, R, K, B, E, \lambda, \mu, \zeta$ が得られるならば、それは Pontryagin 経路 である。

ここで各方程式の右辺はすべて正の定数であり、E を所与として、対数変換した連立方程式

$$
\Phi \times \begin{pmatrix} \ln K \\ \ln Y \\ \ln C \\ \ln R \\ \ln B \\ \ln \lambda \\ \ln \mu \\ \ln \zeta \end{pmatrix} = a \ln(-E) + b
$$

[8]ここで (62) の L はすでに決定されているので省かれている。さらに成長率 g_K が固定されているために、方程式は一本少なくなっている。具体的には、(34) が他の等式に組み込まれている。

で表すことができる。ただし、

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 & -1+\alpha+\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\sigma & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix},$$

そして b は各方程式の右辺に対数を取ったものを要素にもつ列ベクトルである。$\det[\Phi] = \beta(1-\sigma) \neq 0$ であり、初期値 E_0 が定まれば、他の初期値は一意に定まる。さらに$\Phi^{-1}a$ が (40)、(41)、(53) − (56) で定められる成長率に対応していることも確認できる。したがって、そうして与えられた初期値とこれらの成長率のもとで、任意の時点で、各変数は以上の連立方程式を満たす。

最後に横断性条件の成立を確認する。(53) によって

$$\begin{aligned} & e^{-\rho t}\left[\lambda(t)K(t) + \mu(t)B(t) + \zeta(t)E(t)\right] \\ &= e^{-\rho t}\zeta(t)E(t)\left(\frac{\lambda K}{\zeta E} + \frac{\mu B}{\zeta E} + 1\right) \\ &= e^{[-\rho+(1+\omega)g_R]t}\zeta_0 E_0\left(\frac{\lambda K}{\zeta E} + \frac{\mu B}{\zeta E} + 1\right). \end{aligned}$$

(49) と (51) より (·) は定数である。また、$g_R < 0$ なので、$t \to \infty$ で上式の値は 0 に収束する。 ■

ここで得られた結果は Aghion and Howitt (1998) が得ているものとほとんど同じである。異時点間の代替弾力性に関する$\sigma > 1$ と環境問題のない世界での正の均斉成長を保証する条件$\eta > \rho$ は全く同じで、詳細は異なるものの自然の自浄能力の水準に関する制約条件が

$$\theta > -\frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K$$

と表されることは同じである。このことは、天然資源投入量 R が低下するケースに関しては、生産の外部性と消費の外部性のどちらを考慮することも、持続性への含意は同じであることを示唆している。その可能な解釈は、次のようなものだろう。直接的には消費によって負の外部性が発生するのだけれども、その基礎となっている要因は天然資源の投入量である。ここでは、この R が、経済成長と環境改善の双方を実現しながら、低下する状況が最適となるための条件を求めている。形式上 R は、Aghion and Howitt (1998) （そして Stokey, 1998）のモデルにおける汚染削減技術係数と同じ働きをしている。したがって、ほとんど同じ結果が得られた、というわけである。

同じ結果が得られた、ということは理論上の興味を損なわせるが、持続可能性に対する含意は、２重に強められる。すなわち、自然の自浄能力の水準が低すぎると、環境制約によって、正の均斉成長は最適ではなくなるということである。

これは、生産と消費の双方の外部性について、当てはまることであることが確認された。

4 資本減耗とリサイクル活動を含むモデル

ここでは、第2節の技術的議論で用いたモデルを考察する。リサイクル活動を含めるためにリサイクル技術 Q の進歩が

$$\dot{Q} = \eta_Q L_Q Q$$

で記述されるとする。ここでη_Q は正定数、L_Q はその R&D に投入される労働を表す。また、最終財生産部門への労働投入量を L_fで表すことにする。リサイクルに関する技術係数 $q(r)$ は次の性質をもつものとする。

$$q'(r) < 0 \text{ all } r \in (0,1), \quad q(1) = 0, \ \lim_{r\to 0} q(r) = \infty, \ \lim_{r\to 1} q(r) = 0.$$

以下では内点解経路が考察の対象とされる。

4.1 天然資源投入量が一定のモデル

この節では、天然資源採取部門において技術進歩が生じないケースを考察する。採用される最終財生産関数は次の形式のものである[9]：

$$Y = AKL_f^{\beta}R^{1-\nu}, \quad A > 0, \ \beta, \nu \in (0,1) \text{ (constant)} .$$

問題は次のように記述される。

$$\max \int_0^{\infty} \left[\frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \gamma \frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega} \right] e^{-\rho t} dt$$

$$\text{subject to } Y = AKL_f^{\beta}R^{1-\nu} \tag{64}$$

$$\dot{K} = Y - r(C + \delta K), \tag{65}$$

$$\dot{Q} = \eta_r L_Q Q, \tag{66}$$

$$\dot{W} = -r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) + R, \tag{67}$$

$$\dot{E} = -r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) - \theta E, \tag{68}$$

$$L_Q = 1 - [L_f + R + \frac{q(r)}{Q}(C + \delta K)] \tag{69}$$

$$r \in (0,1], \ E \in [E_{min}, 0),$$

$$K_0, Q_0, W_0 > 0, \quad E_0 \in [E_{min}, 0) \text{ given.}$$

[9]均斉成長では Y/K は一定なので、もし $g_R < 0$ ならば $g_{L_f} = -(1-\nu)\beta^{-1}g_R > 0$ でなければならない。リサイクル率に関わらず他の部門への労働投入量は一定なので、最終財生産への労働需要は人口制約を有限期間のうちに超えてしまう。つまり、この生産関数の下で、均斉成長は $g_R = g_{L_f} = 0$ のときに限り可能である。

$\lambda, \upsilon, \xi, \zeta$ を、各状態変数に対する共役変数として、経常価値ハミルトニアンを次のように表す。

$$
\begin{aligned}
H = & \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] \\
& + \lambda[Y - r(C+\delta K)] + \upsilon\eta_Q\left[(1-R-L_f)Q - q(r)(C+\delta K)\right] \\
& - \xi\left[r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) - R\right] - \zeta\left[r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) + \theta E\right]
\end{aligned}
$$

内点最適かつ正の均斉成長経路が存在するならば、その経路上で次が成立しなければならない。

1. Maximum conditions

$$\frac{\partial H}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda r - \upsilon\eta_Q q(r) - (\xi+\zeta)r\frac{R}{Y} = 0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_f} = \lambda\beta\frac{Y}{L_f} - \upsilon\eta_Q Q + \beta(\xi+\zeta)r\frac{RC}{YL_f} = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda(1-\nu)\frac{Y}{R} - \upsilon\eta_Q Q + \xi - (\xi+\zeta)\nu r\frac{C}{Y} = 0, \tag{72}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\lambda(C+\delta K) - \upsilon\eta_Q q'(r)(C+\delta K) - (\xi+\zeta)\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) = 0. \tag{73}$$

2. Adjoint equations

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \left\{\lambda\left(\frac{Y}{K} - r\delta\right) - \upsilon\eta_Q q(r)\delta + (\xi+\zeta)\frac{rRC}{YK}\right\}, \tag{74}$$

$$\dot{\upsilon} = \upsilon[\rho - \eta_Q(1-L_f-R)], \tag{75}$$

$$\dot{\xi} = \rho\xi + (\xi+\zeta)r\delta = (\rho + r\delta)\xi + r\delta\zeta, \tag{76}$$

$$\dot{\zeta} = (\rho+\theta)\zeta - \gamma(-E)^{\omega}. \tag{77}$$

これらより次の結果が得られる。

Proposition 9 内点最適かつ正の均斉経路が存在するのは、異時点間の消費代替弾力性σ^{-1} が 1 のときに限られる。また、$\rho < \eta_Q$ でなければならない。その最適経路では横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}[\lambda(t)K(t) + \upsilon(t)Q(t) + \xi(t)W(t) + \zeta(t)E(t)] = 0$$

が満たされる。

Proof. (77) より、$\zeta = 0$ ならば、$E = 0$ である。これは矛盾なので$\zeta \neq 0$。次に $\xi + \zeta = 0$ と仮定しよう。このとき$\xi \neq 0$ であり、(76) より $g_\zeta = -g_\xi = -\rho$ を得る。しかしこれは (77) と矛盾する。以上より、

$$\xi \neq 0,\ \zeta \neq 0,\ \xi + \zeta \neq 0.$$

次に (71) と (73) より、$\xi + \zeta$ を消去する。もし $v = 0$ ならば

$$\lambda \frac{Y}{R}\left(\frac{Y}{rC} - \frac{r(C+\delta K)}{Y}\right) = 0$$

である。正の均斉成長では、$Y/(rC) > 1, r(C+\delta K)/Y < 1$ なので、$\lambda = 0$ でなければならない。しかしこれは (71) から $\xi + \zeta = 0$ を意味するので矛盾である。つまり

$$v \neq 0,\ \lambda \neq 0$$

である。このとき (71) と (73) から

$$\frac{\lambda}{v} = \left[L_f + \frac{r}{R}\frac{q'(r)\beta R r C}{Q}\frac{C+\delta K}{Y}\right] \Big/ \left\{\frac{\beta r C}{\eta_Q Q}\left[\frac{Y}{rC} - \frac{r(C+\delta K)}{Y}\right]\right\}$$

が得られる。正の均斉成長では、右辺は一定なので

$$g_\lambda = g_v$$

である。一方、(70) と (71) より、$\xi + \zeta$ を消去すると

$$C^{-\sigma} = \lambda\left[r\left(1 - \frac{Y}{rC}\right) - \frac{\lambda}{v}\eta_Q\left(q(r) + \frac{L_f Q}{\beta C}\right)\right]$$

が得られる。$C \neq 0$ なので、$[\cdot] \neq 0$ であり、

$$-\sigma g_C = g_\lambda = g_v < 0 \tag{78}$$

を得る。再び (71) より

$$g_{\xi+\zeta} = g_K + g_\lambda = (1-\sigma) g_K$$

を得る。この結果を (72) に代入して（$\xi \neq 0$ に注意すること）

$$g_\xi = (1-\sigma) g_K$$

が得られる。$g_{\xi+\zeta} = g_\xi$ なので

$$g_\zeta = (1-\sigma) g_K$$

もまた得られる。このとき (77) は

$$g_\zeta = (\rho + \theta) - \frac{\gamma(-E)^\omega}{\zeta} = (1-\sigma) g_K \text{ (constant)}$$

と書ける。等式が成立するのは、

$$1-\sigma=0$$

のときに限られる。したがって $g_\xi=g_\zeta=0$ である。 また (75) と (78) より

$$g_v=\rho-\eta_Q(1-L_f-R)<0$$

である。したがって、必要条件として

$$\rho<\eta_Q$$

を得る。

均斉 Pontryagin 経路上で $g_K=g_Q=-g_\lambda=-g_v,\ g_W=g_E=g_\xi=g_\zeta=0$ なので

$$\lambda(t)K(t)+v(t)Q(t)+\xi(t)W(t)+\zeta(t)E(t)$$

は時間を通じて一定である。よって横断性条件が成立する。 ■

残念ながら、ここでのモデルは定性的分析を行うには複雑過ぎる。明示的に得られるのは、上記の異時点間の代替弾力性に関するもののみである。すなわち、モデルを複雑化しても、少なくともσ に関しては同じ結果が得られる。

4.2 天然資源投入量が減少するケース

ここでは前節の対応する問題で用いた最終財生産関数とその技術進歩に関する微分方程式を採用する：

$$Y=AK^\alpha(BL_f)^\beta R^{1-\alpha-\beta},\quad \alpha,\beta>0\ (\text{constant})\ ,\ \alpha+\beta<1.$$
$$\dot{B}=\eta_B(1-L)B,\quad \eta_B>0\ (\text{constant})\ .$$

ただし、その技術進歩係数はリサイクル活動に関するそれと区別するために添字が付されη_B と表されている。同様にその研究開発への労働投入は L_B と表す。

問題は次のように表される。

$$\max \int_0^\infty \left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] e^{-\rho t}dt$$

$$\text{subject to } Y = AK^\alpha (BL)^\beta R^{1-\alpha-\beta}, \tag{79}$$

$$\dot{K} = Y - r(C+K), \tag{80}$$

$$\dot{B} = \eta_B L_B B, \tag{81}$$

$$\dot{Q} = \eta_Q Q\left[1 - L_B - L_f - q(r)\frac{C+\delta K}{Q}\right], \tag{82}$$

$$\dot{W} = -r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) + R, \tag{83}$$

$$\dot{E} = -r\left(\frac{RC}{Y} + \delta W\right) - \theta E, \tag{84}$$

$$r \in (0,1],\ E \in [E_{min}, 0),$$

$$K_0, B_0, Q_0 > 0,\ E_0 \in [E_{min}, 0) \text{ given.}$$

ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H = &\left[\frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \gamma\frac{(-E)^{1+\omega}}{1+\omega}\right] + \lambda[Y - r(C+\delta K)] + \\ &+ \mu\eta_B L_B B + \upsilon\eta_Q\left[(1 - L_B - L_f)Q - q(r)(C+\delta K)\right] \\ &- \xi\left[r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) - R\right] - \zeta\left[r\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) + \theta E\right] \end{aligned}$$

で定義される。

内点最適かつ正の均斉成長経路が存在するならば、その経路上で次が成立しなければならない。

1. Maximum conditions

$$\frac{\partial H}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda r - \upsilon\eta_Q q(r) - (\xi+\zeta)r\frac{R}{Y} = 0, \tag{85}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_f} = \lambda\beta\frac{Y}{L_f} - \upsilon\eta_Q Q + \beta(\xi+\zeta)r\frac{RC}{YL_f} = 0, \tag{86}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_B} = \mu\eta_B B - \upsilon\eta_Q Q = 0, \tag{87}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda(1-\alpha-\beta)\frac{Y}{R} + \xi - (\xi+\zeta)(\alpha+\beta)r\frac{C}{Y} = 0, \tag{88}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\lambda(C+\delta K) - \upsilon\eta_Q q'(r)(C+\delta K) - (\xi+\zeta)\left(\frac{R}{Y}C + \delta W\right) = 0. \tag{89}$$

2. Adjoint equations

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \left\{\lambda\left(\alpha\frac{Y}{K} - r\delta\right) - \upsilon\eta_Q q(r)\delta + (\xi+\zeta)\alpha\frac{rRC}{YK}\right\}, \tag{90}$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \left\{\lambda\beta\frac{Y}{B} + \mu\eta_B L_B + (\xi+\zeta)\beta\frac{rRC}{YK}\right\}, \tag{91}$$

$$\dot{\upsilon} = \upsilon[\rho - \eta_Q(1 - L_f - L_B)], \tag{92}$$

$$\dot{\xi} = \rho\xi + (\xi+\zeta)r\delta = (\rho + r\delta)\xi + r\delta\zeta, \tag{93}$$

$$\dot{\zeta} = (\rho+\theta)\zeta - \gamma(-E)^{\omega}. \tag{94}$$

Proposition 10 $g_R < 0$ をともなう正の均斉最適経路が存在するのは、異時点間の消費代替弾力性σ^{-1} が 1 より小さい（$\sigma > 1$）のときに限られる。また、リサイクル技術に関する研究開発は、$\rho < \eta_Q$ を満たすという意味で生産的でなければならない。さらにその均斉成長率 g_K に対して、

$$\theta > -\frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K$$

なる不等式を、自然の自浄能力θ は満たしていなければならない。その最適経路では横断性条件は満たされる。

Proof. 一つ前の命題の証明と全く同じ議論によって

$$\xi \neq 0,\ \zeta \neq 0,\ \xi + \zeta \neq 0.$$

を得る。

(86), (89) を組み合わせて $\xi + \zeta$ を消去した

$$\lambda\beta\left[\frac{Y}{L_f}\left(\frac{C}{Y} + \delta\frac{W}{R}\right) - \frac{r(C+\delta K)C}{YL_f}\right] - \upsilon\eta_Q Q\left[\left(\frac{C}{Y} + \delta\frac{W}{R}\right) + q'(r)\frac{\beta r(C+\delta K)}{L_f Q}\frac{C}{Y}\right] = 0$$

を得る。ここで λ の係数は

$$\beta\frac{C}{L_f}\left[\left(1 - \frac{r(C+\delta K)}{Y}\right) + \delta\frac{YW}{CR}\right] > 0$$

（不等号は $g_K > 0$ による）なので、もし$\upsilon = 0$ ならば $\lambda = 0$ である。しかし、それは (86) から $\xi + \zeta = 0$ を意味し、矛盾が生じる。したがって、$\upsilon \neq 0$ でなければならない。均斉成長で $g_C = g_Q$ であることと、(92) によって

$$g_\lambda = g_\upsilon \text{ (constant)} \tag{95}$$

を得る。この結果を (86) に代入して

$$\xi+\zeta=-\left(\lambda_0\beta\frac{Y_0}{L_f}-v_0\eta_Q Q_0\right)\left(\frac{Y_0L_f}{\beta rR_0C_0}\right)e^{(g_\lambda-g_R+g_K)t}.$$

つまり、

$$g_{\xi+\zeta}=g_\lambda-g_R+g_K.\ \text{(constant)} \tag{96}$$

さらにこの結果を (88) に代入すれば

$$\xi=\left[(\xi_0+\zeta_0)(\alpha+\beta)r\frac{C}{Y}-\lambda_0(1-\alpha-\beta)\frac{Y_0}{R_0}\right]e^{(g_\lambda-g_R+g_K)t}$$

なので、

$$g_\xi=g_\zeta=g_{\xi+\zeta}.\ \text{(constant)} \tag{97}$$

以上の結果を (85) に適用すれば

$$(C_0)^{-\sigma}e^{-\sigma g_K t}=\left[r\lambda_0+v_0\eta_Q q(r)-(\xi_0+\zeta_0)r\frac{R_0}{Y_0}\right]e^{g_\lambda t}$$

であることから

$$-\sigma g_K=g_\lambda<0 \tag{98}$$

が得られる。一方で (94)

$$g_\zeta=(\rho+\theta)-\gamma\frac{(-E)^\omega}{\zeta}$$

と変形できるので

$$g_\zeta=\omega g_R<0 \tag{99}$$

である。(96), (97), (98), (99) を組み合わせて

$$(1+\omega)g_R=(1-\sigma)g_K$$

あるいは

$$g_R=\frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K \tag{100}$$

が得られる。したがって、$g_K>0$ かつ $g_R<0$ なる最適経路が存在するのは、$1-\sigma<0$ のときに限られる。

一方 (87) からは

$$g_\mu=g_\lambda-g_B<0.\ \text{(constant)} \tag{101}$$

が得られる。ここで g_B は

$$g_B = \frac{1}{\beta}[(1-\alpha)g_K - (1-\alpha-\beta)g_R] > 0 \text{ (constant)} \tag{102}$$

で与えられる（前節の対応するモデルに関する議論を参照）。以上ですべての成長率が g_K に関係付けられた。

(84) より、

$$\frac{r}{(-E)}\left(\frac{RC}{Y} + \delta W\right) = g_E + \theta > 0$$

であり、

$$\theta > -g_E = \frac{1-\sigma}{1+\omega}g_K$$

なる環境制約が得られる。

また、(95) と (98) によって、$g_v = g_\lambda = -\sigma g_K < 0$ である。(92) によってこの不等式が成立するには、少なくとも

$$\eta_Q > \rho$$

でなければならない。

最後に横断性条件の成立をみる，成長率に関する結果より、

$$\begin{aligned}&\lambda(t)K(t) + \mu(t)B(t) + v(t)Q(t) + \xi(t)W(t) + \zeta(t)E(t)\\ &= (\lambda_0 K_0 + v_0 Q_0 + \xi_0 W_0 + \zeta_0 E_0)e^{(1-\sigma)g_K t} + \mu_0 B_0 e^{(-\sigma g_K)t}\end{aligned}$$

であり、$1-\sigma < 0$ なので、その成立が確認できる。■

前節での結果とは異なり、ここでは均斉最適成長率を明示的に導出することはできない。しかし、モデルは複雑になったにもかかわらず、環境制約に関する条件は見かけ上、同じである。これは、自然環境の law of motion が共通であることと、Pontryagin 経路で均斉成長率と汚染の原因（ここでは R）の成長率の間に共通の関係が導出されているためである。生産のプロセスや汚染のプロセスに違いにもかかわらず、felicity が同一であることから、二つの変数の成長率の関係に共通の結果が得られることは、理論上興味深い。

持続的発展に関する政策上の含意は、ここでもやはり自然の自浄能力が重要であることである。資本の減耗による汚染とリサイクル活動をモデルに含めたことが、均斉成長率にどのような影響を及ぼすかは曖昧である。予想としては、資本減耗を考慮することによって均斉成長率は低下するであろう。これは資本蓄積が負の外部性をもつからである。したがって、自然の自浄能力による環境制約は緩められる。一方で、リサイクル活動は直接的には資本蓄積を促進する。しかし、リサイクルが行われることで消費水準（成長率ではなく）が増加するならば、全体の効果は曖昧である。これらは今後の課題としたい。

5 おわりに

本論文では、環境問題が持続的成長に限界をもたらすかについて考察した。すでにこのような考察は、Stokey(1998) と Aghion and Howitt(1998) によって行われているので、それらでは取り扱われていないケース、すなわち、消費が環境に負荷を及ぼすケースを取り上げた。成長に限界があるか否かは、本質的に技術的にそれが可能かどうかに依存する。われわれが廃棄される資本を含めて消費するものがゴミとして 100 %環境に負荷を及ぼすと考えるならば、持続的成長は最適経路を考える以前に、そもそも技術的に不可能である。一方で、われわれが消費するものには、実体のあるものとないものがあり、すべてではなく実体部分のみがゴミとして環境に負荷を及ぼすならば（このように想定することが妥当かどうかは重要な問題だが）、そして経済が成長する一方で、実体のあるものの消費が増加しないならば、持続的成長は技術的に可能である。その場合には、この環境的に持続可能な経済成長が社会的最適経路となるための必要条件は、すでに生産の外部性に関して得られている結果と本質的に同じものとなる。すなわち、消費に関する異時点間の代替弾力性が 1 以下であること、最適な経済成長率に対応して、十分大きな自然の自浄能力を環境が有していることである。

この研究およびこれまでの研究結果から、持続的発展の問題に関する含意として、強調されてよいのは、自然の自浄能力の重要性であろう。今日、環境問題として現れている重要な問題のうちのいくつかは、自然界では容易に分解しない物質に関係している。難分解性、したがって反応性に乏しいという性質は、人間にとっては安全で扱いやすい性質である（オゾン破壊物質や PCB が広く使われたのはこのためである）。しかし、そうした物質を生産し、環境に放出しつづけることは、形式上、自然の自浄能力の低下を意味する。たとえば、メタン 1g を放出する代わりに二酸化炭素 1g を放出すること、さらにオゾン破壊物質やその代替物質を 1g 放出することを考えよ。同じ重量に対して単位時間あたり自然が吸収・分解できる率は、後の物質ほど低くなる。もし先の物質から後の物質へと代替が進むならば、自然の自浄能力は以前よりも低下していると、この研究で用いたモデルでは表現される。そのことは、持続可能な発展の実現可能性を低下させる。使用上の利便性や安全性は高いが、廃棄後の分解が困難な物質が多く使われ、自然界に放出されるならば、そしてその結果、見かけ上の自然の自浄能力が十分に低くなってしまうならば、そのような状況からの社会の最適経路は、やがてはクリティカルな環境水準に到達して、そこで経済成長も終わり、以降経済成長ゼロと最悪ぎりぎりの環境水準を持続することになるかもしれない。

References

[1] Aghion, P. and P. Howitt (1998) *Endogenous Growth Theory*, MIT Press.

[2] Stokey, N. L. (1998) "Are there limits to growth?", *International Economic Review* 39, 1-31.