離散凸解析と
ゲーム理論のレビュー

田村明久（慶應義塾大学　理工学部）

目次

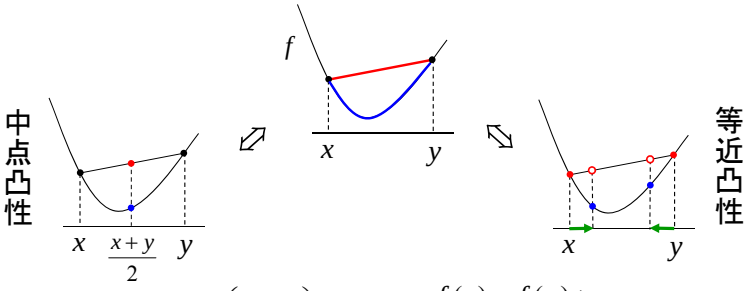
- 離散凸解析
  - 離散凸解析とは
  - $M^\natural$凹関数の定義と性質
- $M^\natural$凹関数を用いたマッチングモデル
  - 割当モデル
  - 結婚モデル
  - 上下限制約付き割当モデル

離散凸解析とは

- 離散最適化で凸性を扱うパラダイム
  マトロイド理論　＋　凸解析
- 2種類の離散凸性
  劣モジュラ関数 ←等価→ 基底　(マトロイド)
  ↓　↓
  L凸関数 ←共役→ M凸関数
- 双対性（最大最小定理，離散分離定理）
- 効率的な最適化アルゴリズム
- 応用（行列，経済モデル，資源配分問題等）

離散凸解析とは

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

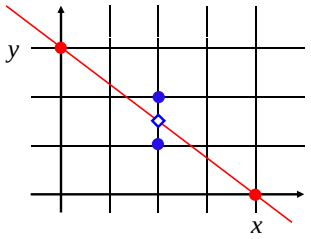


$$\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f(x)+f(y) \geq f(x+d)+f(y-d)$$

離散凸解析とは

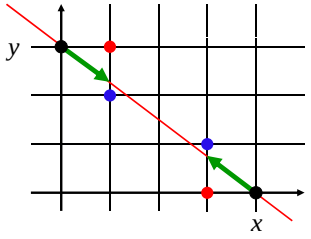
離散中点凸性



$f(x)+f(y) \geq$

L♮凸性 $f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right)+f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right)$

離散等近凸性



$f(x)+f(y) \geq$

M♮凸性 $\min\begin{Bmatrix} f(\bullet)+f(\bullet) \\ f(\bullet)+f(\bullet) \end{Bmatrix}$

目次

- 離散凸解析
  - 離散凸解析とは
  - M♮凹関数の定義と性質
- M♮凹関数を用いたマッチングモデル
  - 割当モデル
  - 結婚モデル
  - 上下限制約付き割当モデル

準備

E: 不可分財の集合

$x \in \mathbf{Z}^E$: 財ベクトル

$f: \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 主体の評価関数（貨幣価値換算）

$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^E \mid f(x) \in \mathbf{R}\}$ 実効定義域

$p \in \mathbf{R}^E$: 価格ベクトル

$f[-p](x) = f(x) - \Sigma_{e \in E}\, p(e)\, x(e)$ 主体の利得

M♮凹関数

$f: \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \quad \mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^E \mid f(x) \neq -\infty\}$

$\chi_u \in \{0,1\}^E: \quad \chi_u(u) = 1, \quad \chi_u(e) = 0 \quad (e \neq u)$

$\chi_0 = (0,\ldots,0)$

f: M♮凹関数 [Murota 1996, Murota-Shioura 1999]

⇕ def

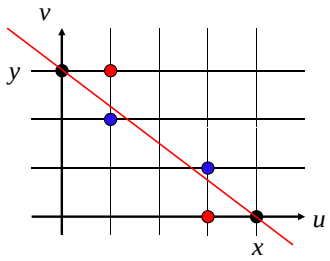
$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f, \quad \forall u \in \{e \in E \mid x(e) > y(e)\},$

$\exists v \in \{0\} \cup \{e \in E \mid x(e) < y(e)\}:$

$$f(x)+f(y) \leq f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v)$$

M♮凹関数

$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f, \quad \forall u \in \{e \in E \mid x(e) > y(e)\},$
$\exists v \in \{0\} \cup \{e \in E \mid x(e) < y(e)\}:$
$f(x) + f(y) \le f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$



点が1歩ないし2歩だけ近づいたとき，関数値の和が増加する

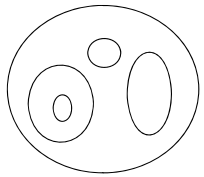
通常の凹関数:
2点を結ぶ直線上を互いに等距離近づくと，関数値の和は増加する
⇓
整数性を保存するために調整が必要

M凹関数

dom f が $\{x : \Sigma\, x(e)=\text{const.}\}$ という超平面上にのるM♮凹関数 f をM凹関数という

f : M凹関数 [Murota 1996]
⇕ def
$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f, \quad \forall u \in \{e \in E \mid x(e) > y(e)\},$
$\exists v \in \{0\} \cup \{e \in E \mid x(e) < y(e)\}:$
$f(x) + f(y) \le f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v)$

M♮凹関数の例



- 層型凹関数

$\mathrm{T} \subseteq 2^E$: 層族

$X, Y \in \mathrm{T} \Rightarrow X \cap Y = \phi \text{ or } X \subseteq Y \text{ or } Y \subseteq X$

$f_Y : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ Tの各元 Y に対する凹関数

$$f(x) = \sum_{Y \in \mathrm{T}} f_Y(x(Y)) \qquad (x \in \mathbf{Z}^E)$$

$$x(Y) = \sum_{i \in Y} x(i)$$

M♮凹関数の最適性

[Murota 1996]

定理 M♮凹関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して

$x \in \arg\max f$ （f の最大解集合）
⇕
$f(x) \ge f(x + \chi_u - \chi_v) \quad (^\forall u, v \in E \cup \{0\})$

$n = |E|, \quad L = \|\mathrm{dom}\, f\|_\infty$ としたとき n と $\log L$ に関する多項式時間で最大解が求まる

M♮凹関数の和の最適性

M♮凹関数＋M♮凹関数 ≠ M♮凹関数

M♮凹交叉定理 [Murota 1996]

$f_1, f_2 : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$　　M♮凹関数

$x \in \arg\max (f_1 + f_2)$

$\Updownarrow$

$\exists p \in \mathbf{R}^E : x \in \arg\max f_1[+p] \cap \arg\max f_2[-p]$

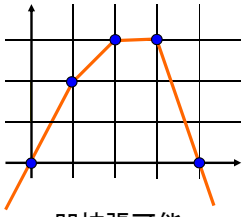
M♮凹関数の性質

- 凹拡張可能性 [Murota 1996]
- 劣モジュラ性 [Murota-Shioura 2001]
- 単改良性 [Fujishige-Yang 2003]
- 粗代替性 [Fujishige-Yang 2003] [Danilov-Koshevoy-Lang 2003], [Murota-T. 2003]
- 代替性 [Fujishige-T. 2003] [Farooq-T. 2004], [Farooq-Shioura 2005]

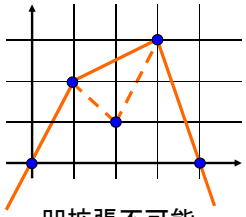
M♮凹関数の性質：凹拡張可能性

- 凹拡張可能性 [Murota 1996]

$\exists \overline{f}$：（連続）凹関数，　$\overline{f}(x) = f(x)$　　$(\forall x \in \mathbf{Z}^E)$



凹拡張可能

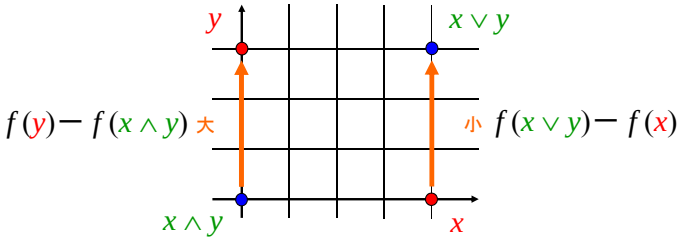


凹拡張不可能

M♮凹関数の性質：劣モジュラ性

- 劣モジュラ性（限界効用逓減性） [Murota-Shioura 2001]

$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$　　$(\forall x, y \in \mathbf{Z}^E)$



M♮凹関数の性質：粗代替性

E：不可分財の集合
$x \in \mathbf{Z}^E$：財ベクトル
$p \in \mathbf{R}^E$：価格ベクトル
$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R}$　消費者の評価関数（貨幣価値に換算）
$f[-p](x) = f(x) - \Sigma_{e \in E}\, p(e)\, x(e)$　　消費者の利得

• 粗代替性　　[Kelso-Crawford 1988]

$$(\mathrm{GS}_{\mathrm{W}})\ {}^{\forall}p, q \in \mathbf{R}^E (p \le q),\quad {}^{\forall}x \in \arg\max f[-p],$$
$${}^{\exists}y \in \arg\max f[-q] : p(e) = q(e) \Rightarrow y(e) \ge x(e)$$

M♮凹関数の性質：粗代替性

[Fujishige-Yang 2003]

定理　$f : \{0,1\}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して
f：M♮凹関数　⇔　f：$(\mathrm{GS}_{\mathrm{W}})$

$$(\mathrm{GS}_{\mathrm{W}})\ {}^{\forall}p, q \in \mathbf{R}^E (p \le q),\quad {}^{\forall}x \in \arg\max f[-p],$$
$${}^{\exists}y \in \arg\max f[-q] : p(e) = q(e) \Rightarrow y(e) \ge x(e)$$

M♮凹関数の性質：粗代替性

[Danilov-Koshevoy-Lang 2003]

$$(\mathrm{SWGS})\ {}^{\forall}p \in \mathbf{R}^E,\ {}^{\forall}x \in \arg\max f[-p],\ {}^{\forall}e \in E,$$
$$\text{(i)}\ {}^{\forall}\alpha > 0 : x \in \arg\max f[-p - \alpha\chi_e] \quad \text{or}$$
$$\text{(ii)}\ {}^{\exists}\alpha > 0,\ {}^{\exists}y \in \arg\max f[-p - \alpha\chi_e] :$$
$$y(e) = x(e) - 1,\quad y(e') \ge x(e')\ (e' \ne e)$$

定理　$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して
(1)　f：M♮凹関数　⇒　f：(SWGS)
(2)　f：凹拡張可能なとき
　　f：(SWGS)　⇒　f：M♮凹関数

M♮凹関数の性質：粗代替性

[Murota-T. 2003]

$$(\mathrm{GS})\ {}^{\forall}(p, p_0) \le {}^{\forall}(q, q_0) \in \mathbf{R}^{E \cup \{0\}},\ {}^{\forall}x \in \arg\max f[-p + p_0\mathbf{1}],$$
$${}^{\exists}y \in \arg\max f[-q + q_0\mathbf{1}] :$$
$$[p(e) = q(e) \Rightarrow y(e) \ge x(e)] \text{ and } [p_0 = q_0 \Rightarrow y(E) \le x(E)]$$

定理　$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して
(1)　f：M♮凹関数　⇒　f：(GS)
(2)　f：凹拡張可能，dom f：有界なとき
　　f：(GS)　⇒　f：M♮凹関数

M♮凹関数の性質：単改良性

[Gul-Stacchetti 1999]

$(\mathrm{SI}_{\mathrm{W}})$ $^{\forall}p \in \mathbf{R}^{E}$, $^{\forall}x \in \mathrm{dom}\ f - \arg\max f[-p]$,

$^{\exists}i, {}^{\exists}j \in E \cup \{0\} : f[-p](x) < f[-p](x - \chi_i + \chi_j)$

[Murota-T. 2003]

(SI) $^{\forall}p \in \mathbf{R}^{E}$, $^{\forall}x, {}^{\forall}y \in \mathbf{Z}^{E}$ with $-\infty < f[-p](x) < f[-p](y)$,

$^{\exists}i \in \mathrm{supp}^{+}(x-y) \cup \{0\}$, $^{\exists}j \in \mathrm{supp}^{-}(x-y) \cup \{0\}$:

$f[-p](x) < f[-p](x - \chi_i + \chi_j)$

$\mathrm{supp}^{+}(x-y) = \{e \in E \mid x(e) > y(e)\}$

$\mathrm{supp}^{-}(x-y) = \{e \in E \mid x(e) < y(e)\}$

M♮凹関数の性質：単改良性

[Murota-T. 2003]

定理　$f : \mathbf{Z}^{E} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して

(1) f : M♮凹関数　⇒　f : $(\mathrm{SI}_{\mathrm{W}})$, (SI)

(2) f : 凹拡張可能なとき

f : (SI)　⇒　f : M♮凹関数

M♮凹関数の性質

定理　$f : \{0,1\}^{E} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して

M♮凹性 ⇔ $(\mathrm{GS}_{\mathrm{W}})$ ⇔ (GS) ⇔ (SWGS)

⇔ $(\mathrm{SI}_{\mathrm{W}})$ ⇔ (SI)

代替性

- X : 有限集合
- $C : 2^{X} \to 2^{X}$　s.t.　$C(Y) \subseteq Y$　for any $Y \subseteq X$
- C が代替性を満たすとは

$$^{\forall}X' \subseteq {}^{\forall}Y' \subseteq X : X' \cap C(Y') \subseteq C(X')$$

$$\Updownarrow$$

$$^{\forall}X' \subseteq {}^{\forall}Y' \subseteq X : X' - C(X') \subseteq Y' - C(Y')$$

M♮凹性と代替性

[Fujishige–T. 2003]

補題 f : M♮凹関数, $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}^E$ $(z_1 \geq z_2)$

(SC_1) $\forall x_1 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_1\}$,

$\exists x_2 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_2\}$: $z_2 \wedge x_1 \leq x_2$

(SC_2) $\forall x_2 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_2\}$,

$\exists x_1 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_1\}$: $z_2 \wedge x_1 \leq x_2$

$(x \wedge y)(e) = \min\{x(e), y(e)\}$

(SC_1) 定員が減少したとき

$z_2(e) \leq x_1(e) \Rightarrow x_2(e) = z_2(e)$

$x_1(e) < z_2(e) \Rightarrow x_1(e) \leq x_2(e)$

M♮凹性と代替性

[Fujishige–T. 2003]

補題 f : M♮凹関数, $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}^E$ $(z_1 \geq z_2)$

(SC_1) $\forall x_1 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_1\}$,

$\exists x_2 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_2\}$: $z_2 \wedge x_1 \leq x_2$

(SC_2) $\forall x_2 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_2\}$,

$\exists x_1 \in \arg\max\{f(y) \mid y \leq z_1\}$: $z_2 \wedge x_1 \leq x_2$

$(x \wedge y)(e) = \min\{x(e), y(e)\}$

(SC_2) 定員が増加したとき

$x_2(e) = z_2(e) \Rightarrow x_1(e)$: 制限なし

$x_2(e) < z_2(e) \Rightarrow x_1(e) \leq x_2(e)$

M♮凹性と代替性

[Farooq–T. 2004]

定理 $f : \{0,1\}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し以下は同値

(1) f はM♮凹関数

(2) 任意の $p \in \mathbf{R}^E$ に対し $f[-p]$ が (SC_1) を満たす

(3) 任意の $p \in \mathbf{R}^E$ に対し $f[-p]$ が (SC_2) を満たす

- dom f が有界な場合へ拡張 [Farooq–Shioura 2005]

M♮凹性と代替性

- 代替的な選好順序 $\{3\} \succ \{1,2\} \succ \{2\} \succ \{1\}$ を表現するM♮凹関数は存在しない
- 代替性はM♮凹性より広い概念

離散凸解析を用いたモデル

不可分財を扱うモデル

- Arrow-Debreu型モデル [Danilov-Koshevoy-Murota 2001]
- 代替財と補完財が混在するモデル
  [Danilov-Koshevoy-Lang 2003]
- 組合せオークション [Lehmann-Lehmann-Nisan 2006]
- 結婚モデルの拡張
  [Eguchi-Fujishige 2002; Eguchi-Fujishige-T. 2003]
- 結婚モデルと割当モデルの統一モデル
  [Fujishige-T. 2006, 2007]

目次

- 離散凸解析
  - 離散凸解析とは
  - M♮凹関数の定義と性質
- M♮凹関数を用いたマッチングモデル
  - 割当モデル
  - 結婚モデル
  - 上下限制約付き割当モデル

線形＆離散凸マッチングモデル

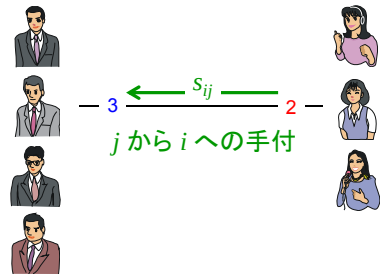
評価関数 / 手付	線形	M♮凹関数
自由	割当モデル [Shapley-Shubik 1972]	M♮凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale-Shapley 1962]	[Eguchi-Fujishige '02] [Eguchi-Fujishige-T. '03]
上下限付き		[Fujishige-T. '07]

割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given

(i,j) における i の利益　　j の利益



割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given

a_{ij} : (i,j) における i の利益　　b_{ij} : j の利益

(X, q, r) : (pairwise) 安定解　$(X \subseteq E, q \in \mathbf{R}^M, r \in \mathbf{R}^W)$

q : 利得ベクトル　　⇕ def

(a1) X : matching

(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$　　$(^\forall (i,j) \in X)$

(a3) $q, r \geq \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(a4) $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$　　$(^\forall (i,j) \in E)$

割当問題(LP定式化)

Max. $\sum_{(i,j)\in E} (a_{ij} + b_{ij}) x_{ij}$

s.t. $\sum_{j \in W} x_{ij} \leq 1$　$(i \in M)$

$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1$　$(j \in W)$

$x_{ij} \geq 0$　$((i,j) \in E)$

双対問題

Min. $\sum_{i \in M} q_i + \sum_{j \in W} r_j$

s.t. $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$　$((i,j) \in E)$

$q_i \geq 0$　$(i \in M)$

$r_j \geq 0$　$(j \in W)$

(a1) X : matching　主実行可能性

(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$　$(^\forall (i,j) \in X)$　相補性

(a3) $q, r \geq \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(a4) $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$　$(^\forall (i,j) \in E)$　双対実行可能性

安定マッチングの存在証明

- 線形計画問題の双対定理 ＋ 整数性
  - 割当問題は整数最適解 X をもつ
  - 双対問題も最適解 (q,r) をもつ
  - (X, q, r) が安定解
- 最適化問題へと変換可能
  - M$^\natural$凹関数を用いた拡張でも成立

評価関数を用いた解釈

$$f_i(x) = \begin{cases} \sum_{j \in W} a_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E(i)},\ \sum_{j \in W} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (i \in M)$$

$$f_j(x) = \begin{cases} \sum_{i \in M} b_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E(j)},\ \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (j \in W)$$

x : 安定マッチング ⇔ $x \in \arg\max (f_M + f_W)$

$f_M = \sum_{i \in M} f_i$,　$f_W = \sum_{j \in W} f_j$

これらの関数は層型凹関数, すなわちM$^\natural$凹関数

線形＆離散凸マッチングモデル

手付＼評価関数	線形	M♮凹関数
自由	割当モデル [Shapley-Shubik 1972]	M♮凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale-Shapley 1962]	[Eguchi-Fujishige '02] [Eguchi-Fujishige-T. '03]
上下限付き		[Fujishige-T. '07]

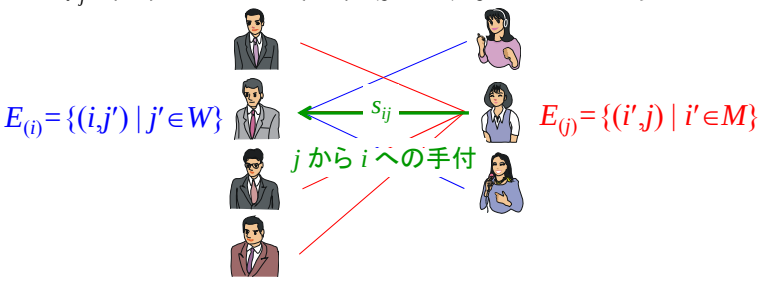
評価関数を用いた割当モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given



評価関数を用いた割当モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given

(A) $\mathrm{dom}\, f_k$ $(k \in M \cup W)$ は有界, 遺伝的,
最小点として **0** を含む

遺伝的: $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_k \Rightarrow x_1 \in \mathrm{dom}\, f_k$

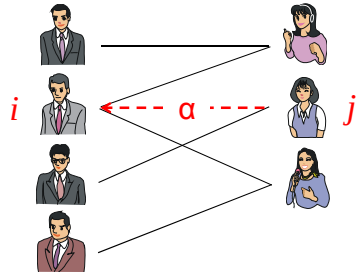
評価関数を用いた割当モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given



"安定"な
x : 割当(多対多)
$s \in \mathbf{R}^E$: 手付
を求めたい

評価関数を用いた割当モデルの拡張

(x,s) : (pairwise) 安定解　　$(x \in \{0,1\}^E, s \in \mathbf{R}^E)$

⇕ def

(A1) $x_{(k)} \in \mathrm{dom}\ f_k \quad (\forall k \in M \cup W)$　実行可能割当

(A2) $f_i[+s_{(i)}](x_{(i)}) = \max\{f_i[+s_{(i)}](y) \mid y \le x_{(i)}\} \quad (\forall i \in M)$

and $f_j[-s_{(j)}](x_{(j)}) = \max\{f_j[-s_{(j)}](y) \mid y \le x_{(j)}\} \quad (\forall j \in W)$

(A3) for $\forall (i,j) \in E$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)}) \ge \max\{f_i[+(s_{(i)}^{-j},\alpha)](y) \mid y(i,j') \le x(i,j'), \forall j' \ne j\}$

or $f_j[-s_{(j)}](x_{(j)}) \ge \max\{f_j[-(s_{(j)}^{-i},\alpha)](y) \mid y(i',j) \le x(i',j), \forall i' \ne i\}$

$x_{(k)}$: xの$E_{(k)}$への制限,　　$(s_{(i)}^{-j},\alpha)$: $s_{(i)}$のj成分をαに置換え

M♮凹関数を用いた割当モデルの拡張

補題 f_k $(k \in M \cup W)$: 仮定(A)を満たすM♮凹関数

x : 実行可能割当に対し

$\exists\ s \in \mathbf{R}^E$ s.t. (x,s) : 安定解

⇕

$\exists\ p \in \mathbf{R}^E$: $x_{(i)} \in \arg\max f_i[+p_{(i)}] \quad (\forall i \in M)$

$x_{(j)} \in \arg\max f_j[-p_{(j)}] \quad (\forall j \in W)$

⇕

$\exists\ p \in \mathbf{R}^E$: $x \in \arg\max f_M[+p] \cap \arg\max f_W[-p]$

$f_M = \sum_{i \in M} f_i$,　$f_W = \sum_{j \in W} f_j$（ともにM♮凹関数）

安定割当の存在証明

M♮凹交叉定理 [Murota 1996]

$f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$　M♮凹関数

$x \in \arg\max (f_M + f_W)$

⇕

$\exists p \in \mathbf{R}^E : x \in \arg\max f_M[+p] \cap \arg\max f_W[-p]$

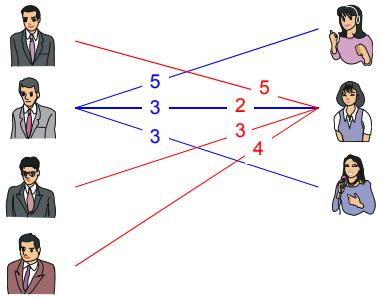
$\mathrm{dom}\ f_M \cap \mathrm{dom}\ f_W$:有界非空 $\Rightarrow$ ∃安定割当

線形＆離散凸マッチングモデル

評価関数 / 手付	線形	M♮凹関数
自由	割当モデル [Shapley-Shubik 1972]	M♮凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale-Shapley 1962]	[Eguchi-Fujishige '02] [Eguchi-Fujishige-T. '03]
上下限付き		[Fujishige-T. '07]

結婚モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given



結婚モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given

$a_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \in M$ は j を受理可能
$a_{ij} = -\infty \Leftrightarrow i \in M$ は j を受理不可能
$a_{ij} > a_{ik} \Leftrightarrow i \in M$ は j を k より好む
$a_{ij} = a_{ik} \Leftrightarrow i$ にとり j と k は無差別

結婚モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given

マッチング X : (pairwise) 安定

$\Updownarrow$ def

$^{\exists} q \in \mathbf{R}^M, {}^{\exists} r \in \mathbf{R}^W$ 利得ベクトル

(m1) $q_i = a_{ij}$ and $r_j = b_{ij}$ $(^{\forall}(i,j) \in X)$ 手付なし

(m2) $q, r \geq \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(m3) $q_i \geq a_{ij}$ or $r_j \geq b_{ij}$ $(^{\forall}(i,j) \in E)$

評価関数を用いた解釈

$$f_i(x) = \begin{cases} \sum_{j \in W} a_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E_{(i)}}, \ \sum_{j \in W} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (i \in M)$$

$$f_j(x) = \begin{cases} \sum_{i \in M} b_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E_{(j)}}, \ \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (j \in W)$$

x : 安定マッチング $\Leftrightarrow$

$\exists z_M, z_W \in \{0,1\}^E$: $z_M \vee z_W = \mathbf{1}$,

$x \in \arg\max \{ f_M(y) \mid y \leq z_M \} \cap \arg\max \{ f_W(y) \mid y \leq z_W \}$

$(x \vee y)(e) = \max \{ x(e), y(e) \}$

線形＆離散凸マッチングモデル

手付＼評価関数	線形	M♮凹関数
自由	割当モデル [Shapley-Shubik 1972]	M♮凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale-Shapley 1962]	[Eguchi-Fujishige '02] [Eguchi-Fujishige-T. '03]
上下限付き		[Fujishige-T. '07]

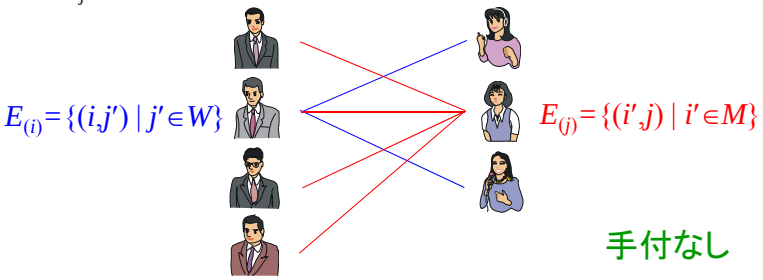
評価関数を用いた結婚モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given



手付なし

評価関数を用いた結婚モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given

(A) $\mathrm{dom}\, f_k$ $(k \in M \cup W)$ は有界, 遺伝的,
最小点として **0** を含む

遺伝的: $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_k \Rightarrow x_1 \in \mathrm{dom}\, f_k$

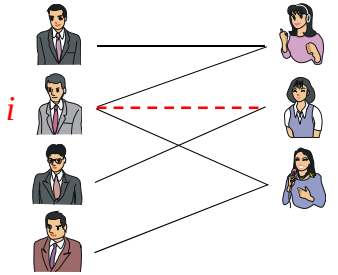
評価関数を用いた結婚モデルの拡張

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$f_i : \{0,1\}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in M)$ i の評価関数

$f_j : \{0,1\}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in W)$ j の評価関数

} given



"安定"な
x : 割当(多対多)
を求めたい

評価関数を用いた結婚モデルの拡張

$x \in \{0,1\}^E$:(pairwise) 安定割当

$\Updownarrow$ def

(M1) $x_{(k)} \in \mathrm{dom}\ f_k \quad (^\forall k \in M \cup W)$ 実行可能割当

(M2) $f_i(x_{(i)}) = \max\{f_i(y) \mid y \le x_{(i)}\} \quad (^\forall i \in M)$

and $f_j(x_{(j)}) = \max\{f_j(y) \mid y \le x_{(j)}\} \quad (^\forall j \in W)$

(M3) for $\forall (i, j) \in E$,

$f_i(x_{(i)}) \ge \max\{f_i(y) \mid y(i, j') \le x(i, j'), ^\forall j' \ne j\}$

or $f_j(x_{(j)}) \ge \max\{f_j(y) \mid y(i', j) \le x(i', j), ^\forall i' \ne i\}$

$x_{(k)}$: xの$E_{(k)}$への制限

M♮凹関数を用いた結婚モデルの拡張

補題 f_k ($k \in M \cup W$): 仮定(A)を満たすM♮凹関数.

x : 実行可能割当に対し

x : 安定割当

$\Updownarrow$

$\exists z_M, z_W \in \{0,1\}^E$: $z_M \vee z_W = \mathbf{1}$,

$x \in \arg\max\{f_M(y) \mid y \le z_M\} \cap \arg\max\{f_W(y) \mid y \le z_W\}$

$f_M = \sum_{i \in M} f_i$, $f_W = \sum_{j \in W} f_j$ （ともにM♮凹関数）

$(x \vee y)(e) = \max\{x(e), y(e)\}$

Gale–Shapleyアルゴリズムの一般化

$z_M := \mathbf{1}$, $z_W := \mathbf{0}$, $x_W := \mathbf{0}$;

repeat {

select $x_M \in \arg\max\{f_M(y) \mid x_W \le y \le z_M\}$;

select $x_W \in \arg\max\{f_W(y) \mid y \le x_M\}$;

for each $e \in E$ with $x_M(e) > x_W(e)$ {

$z_M(e) := 0$, $z_W(e) := 1$;

};

} **until** $x_M = x_W$;

return $(x_M, z_M, z_W \vee x_M)$.

f_Mとf_Wが仮定(A)を満たしM♮凹関数ならば，安定割当を求める

線形＆離散凸マッチングモデル

評価関数 / 手付	線形	M♮凹関数
自由	割当モデル [Shapley–Shubik 1972]	M♮凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale–Shapley 1962]	[Eguchi–Fujishige ‘02] [Eguchi–Fujishige–T. ‘03]
上下限付き		[Fujishige–T. ‘07]

上下限制約付き割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$

$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E, \overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ with $\underline{\pi} \le \overline{\pi}$ } given

W側からM側への手付の下限

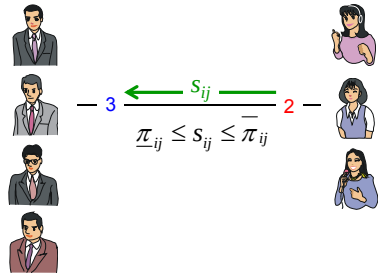
W側からM側への手付の上限

上下限制約付き割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$

$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E, \overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ with $\underline{\pi} \le \overline{\pi}$ } given



上下限制約付き割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$

$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E, \overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ with $\underline{\pi} \le \overline{\pi}$ } given

(X, q, r) (pairwise) 安定解 $(X \subseteq E, q \in \mathbf{R}^M, r \in \mathbf{R}^W)$

⇕ def

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij} + s_{ij}$, $r_j = b_{ij} - s_{ij}$, $\underline{\pi}_{ij} \le s_{ij} \le \overline{\pi}_{ij}$ $(^\forall (i,j) \in X)$

(b3) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(b4) $q_i \ge a_{ij} + \alpha$ or $r_j \ge b_{ij} - \alpha$ $(^\forall (i,j) \in E, {}^\forall \alpha \in [\underline{\pi}_{ij}, \overline{\pi}_{ij}])$

割当モデルとの関係

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij} + s_{ij}$, $r_j = b_{ij} - s_{ij}$, $\underline{\pi}_{ij} \le s_{ij} \le \overline{\pi}_{ij}$ $(^\forall (i,j) \in X)$

(b3) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(b4) $q_i \ge a_{ij} + \alpha$ or $r_j \ge b_{ij} - \alpha$ $(^\forall (i,j) \in E, {}^\forall \alpha \in [\underline{\pi}_{ij}, \overline{\pi}_{ij}])$

⇕ $\underline{\pi} = (-\infty, \cdots, -\infty)$, $\overline{\pi} = (+\infty, \cdots, +\infty)$

(a1) X : matching

(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$ $(^\forall (i,j) \in X)$

(a3) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(a4) $q_i + r_j \ge a_{ij} + b_{ij}$ $(^\forall (i,j) \in E)$

結婚モデルとの関係

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij} + s_{ij},\ r_j = b_{ij} - s_{ij},\ \underline{\pi}_{ij} \le s_{ij} \le \overline{\pi}_{ij}\ \ (^{\forall}(i,j) \in X)$

(b3) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0\,(r_j = 0)$ if $i\,(j)$ is unmatched in X

(b4) $q_i \ge a_{ij} + \alpha$ or $r_j \ge b_{ij} - \alpha\ \ (^{\forall}(i,j) \in E,\ ^{\forall}\alpha \in [\underline{\pi}_{ij}, \overline{\pi}_{ij}])$

$\Updownarrow \quad \underline{\pi} = (0,\cdots,0),\ \ \overline{\pi} = (0,\cdots,0)$

$^{\exists}q \in \mathbf{R}^M, {}^{\exists}r \in \mathbf{R}^W \quad (X$: matching)

(m1) $q_i = a_{ij}$ and $r_j = b_{ij} \quad (^{\forall}(i,j) \in X)$

(m2) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0\,(r_j = 0)$ if $i\,(j)$ is unmatched in X

(m3) $q_i \ge a_{ij}$ or $r_j \ge b_{ij} \quad (^{\forall}(i,j) \in E)$

安定解の存在

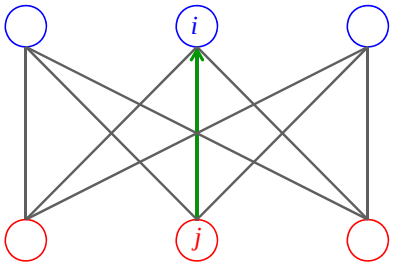
- 次のモデルにおける安定解の存在より導かれる

線形＆離散凸マッチングモデル

評価関数 / 手付	線形	M$^\natural$凹関数
自由	割当モデル [Shapley-Shubik 1972]	M$^\natural$凹交差定理 [Murota 1996]
なし	結婚モデル [Gale-Shapley 1962]	[Eguchi-Fujishige '02] [Eguchi-Fujishige-T. '03]
上下限付き		[Fujishige-T. '07]

FTモデル

$f_i : \mathbf{Z}^{E(i)} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 評価関数, $E_{(i)} = \{(i,j') \mid j' \in Q\}$



P : 労働者の集合

$\underline{\pi}(i,j) \le s(i,j) \le \overline{\pi}(i,j)$
j から i への給与

Q : 企業の集合

$f_j : \mathbf{Z}^{E(j)} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 評価関数, $E_{(j)} = \{(i',j) \mid i' \in P\}$

"安定"な割当(多対多，複数労働時間)と給与は存在するか

FTモデル

P,Q : 主体の集合, $E = P \times Q$

$f_i : \mathbf{Z}^{E_{(i)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(i \in P)$ i の評価関数

$f_j : \mathbf{Z}^{E_{(j)}} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ $(j \in Q)$ j の評価関数

$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E$, $\overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ $(\underline{\pi} \le \overline{\pi})$

} given

(A) dom f_k $(k \in P \cup Q)$ は有界, 遺伝的,
最小点として **0** を含む

遺伝的: $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_k \Rightarrow x_1 \in \mathrm{dom}\, f_k$

実行可能割当, 実行可能給与ベクトル

- 実行可能割当 $x \in \mathbf{Z}^E$
  $x_{(k)} \in \mathrm{dom}\, f_k$ $(k \in P \cup Q)$
  $x_{(k)}$: x の $E_{(k)}$ への制限
- 実行可能給与ベクトル $s \in \mathbf{R}^E$
  $\underline{\pi} \le s \le \overline{\pi}$
- 解 (x,s) 実行可能割当＆実行可能給与ベクトル

動機制約

- (x,s) : 動機制約(incentive constraints)

$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)}) = \max\{f_i[+s_{(i)}](y) \mid y \le x_{(i)}\} \quad (\forall i \in P)$$

$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)}) = \max\{f_j[-s_{(j)}](y) \mid y \le x_{(j)}\} \quad (\forall j \in Q)$$

$$f[+s](x) = f(x) + \sum_e s(e)x(e)$$

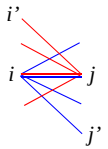
各主体は現在の給与に対して, 労働時間を減らす動機をもたない

不安定解

- (pairwise) 不安定解 (x,s):

動機制約を満たさない あるいは

$\exists (i,j) \in E$, $\alpha \in [\underline{\pi}(i,j), \overline{\pi}(i,j)]$, $y' \in \mathbf{Z}^{E_{(i)}}$, $y'' \in \mathbf{Z}^{E_{(j)}}$:



$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)}) < f_i[+(s_{(i)}^{-j}, \alpha)](y')$$

$$y'(i,j') \le x(i,j') \quad (\forall j' \in Q - \{j\})$$

$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)}) < f_j[-(s_{(j)}^{-i}, \alpha)](y'')$$

$$y''(i',j) \le x(i',j) \quad (\forall i' \in P - \{i\})$$

$$y'(i,j) = y''(i,j)$$

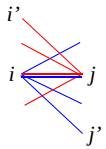
$(s_{(i)}^{-j}, \alpha)$: replaced j-comp. of $s_{(i)}$ by α

準不安定解

- (pairwise) 準不安定解 (x,s):

動機制約を満たさない あるいは

$\exists (i,j)\in E,\ \alpha\in[\underline{\pi}(i,j),\overline{\pi}(i,j)],\ y'\in \mathbf{Z}^{E_{(i)}},\ y''\in \mathbf{Z}^{E_{(j)}}$:



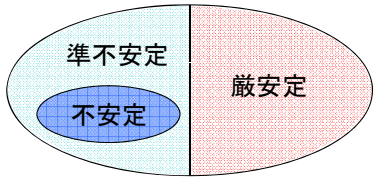
$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)}) < f_i[+(s^{-j}_{(i)},\alpha)](y')$$
$$y'(i,j') \le x(i,j') \quad (\forall j'\in Q-\{j\})$$
$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)}) < f_j[-(s^{-i}_{(j)},\alpha)](y'')$$
$$y''(i',j) \le x(i',j) \quad (\forall i'\in P-\{i\})$$

不安定解 ⇒ 準不安定解 $(s^{-j}_{(i)},\alpha)$: replaced j-comp. of $s_{(i)}$ by α

安定解，厳安定解

- (pairwise) 安定解 (x,s): 不安定でない解
- (pairwise) 厳安定解 (x,s): 準不安定でない解

厳安定解 ⇒ 安定解



安定性 対 厳安定性 (1)

補題

f_k $(k\in P\cup Q)$: 仮定(A) を満たすM$^\natural$凹関数

(i) $\underline{\pi}=\overline{\pi}$

or

(ii) dom $f_k \subseteq \{0,1\}^{E_{(k)}}$ $(^\forall k\in P\cup Q)$

⇓

すべての安定解は厳安定

安定性 対 厳安定性 (2)

定理

f_k $(k\in P\cup Q)$: 仮定(A) を満たすM$^\natural$凹関数

任意の安定解 (x,s) に対して，

ある実行可能給与ベクトル s' が存在し

(x,s') が厳安定解となる

主定理(安定解の存在)

定理

f_k $(k \in P \cup Q)$: (A)を満たすM$^\natural$凹関数

常に厳安定解が存在する

(A) dom f_k $(k \in P \cup Q)$ は有界, 遺伝的,
最小点として **0** を含む

遺伝的: $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_k \Rightarrow x_1 \in \mathrm{dom}\, f_k$

厳安定性の特徴付け

f_k $(k \in P \cup Q)$: (A)を満たすM$^\natural$凹関数, x:実行可能割当

$\exists\, s \in \mathbf{R}^E$ s.t. (x, s): 厳安定 $\Leftrightarrow$

$$\exists\, p \in \mathbf{R}^E,\ z_P = (z_{(i)} \mid i \in P),\ z_Q = (z_{(j)} \mid j \in Q) \in (\mathbf{Z} \cup \{+\infty\})^E :$$

$$x_{(i)} \in \arg\max\{f_i[+p_{(i)}](y) \mid y \le z_{(i)}\} \quad (\forall i \in P)$$

$$x_{(j)} \in \arg\max\{f_j[-p_{(j)}](y) \mid y \le z_{(j)}\} \quad (\forall j \in Q)$$

$$\underline{\pi} \le p \le \overline{\pi}$$

$$z_P(e) < +\infty \Rightarrow p(e) = \underline{\pi}(e),\ z_Q(e) = +\infty$$

$$z_Q(e) < +\infty \Rightarrow p(e) = \overline{\pi}(e),\ z_P(e) = +\infty$$

関連文献＆図書

- J. W. Hatfield and P. R. Milgrom: Matching with contracts, American Economic Review, 95 (2005), 913-935.
- S. Fujishige and A. Tamura: A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis, Mathematics of Operations Research, 32 (2007), 136-154.
- K. Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol. 10, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- S. Fujishige: Submodular Functions and Optimization, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics, 58, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- 室田一雄: 離散凸解析の考えかた —最適化における離散と連続の数理—, 共立出版, 2007.