

Waseda University
Institute of Finance

A photograph of a brick building with a clock tower, likely a part of Waseda University, positioned in the background behind the text.

Working Paper Series

WIF-15-001 : March 2015

マーケットデータを用いた

Unobservable な価格の推定について

Reiko Tobe

早稲田大学ファイナンス総合研究所

<http://www.waseda.jp/wnfs/labo/labo3.html>

マーケットデータを用いた Unobservable な価格の推定について

戸辺 玲子^{*†}

2015年3月27日

概要

本稿では、取引時間外等の理由で観測できない原資産価格をマーケットで得られるオプション価格から推定する方法を提案する。Black-Scholes 方程式は原資産価格が対数正規分布にしたがうという仮定のもとでオプション理論価格を導出する方程式であるが、本稿では Black-Scholes 方程式を逆向きに用いることでマーケットで観測されたオプション価格から原資産価格の推定を行う。推定は、原資産価格と Implied Volatility を用いてグリッドを作成した上で二分法を繰り返し行うという手順で行う。さらに、日経 225 オプションの 5 分足データを用いて実証分析を行う。実証分析の結果、本稿で提案する Inverse Black-Scholes 推定法は、原資産価格の取引されている日中でも取引時間外の夜間においてもプットコールパリティ式と同程度に原資産価格が推定できることがわかった。また、複数の行使価格のオプションが同時に観測された場合には、アットザマネーの近くの行使価格のオプションを用いて推定の方がより現物に近い推定値が得られることが示された。

1 はじめに

日経 225 先物や日経 225 オプションは、日本経済新聞社が発表する日経平均株価 (日経 225) を原資産とする金融商品である。日経平均株価は、日中は、東京証券取引所で取引される株式 225 銘柄の株価をもとに 15 秒毎に算出され日本経済新聞社が公表しているが、夜間は値が動かず、日経平均株価も公表されることはない。なぜなら、東京証券取引所では平日の 9:00 ~ 11:30(前場) と 12:30 ~ 15:00(後場) のみ株式が売買されており、それ以外の時間帯は値がつかないためである。他方、日経 225 先物や日経 225 オプションは、大阪証券取引所で 9:00 ~ 15:15(日中取引) と 16:30 ~ 翌日 3:00(ナイトセッション) に売買されており、シカゴ商業取引所 (CME) でも日本時間の 8:00 ~ 翌日 6:15(サマータイム時は 7:00 ~ 翌日 5:15) に取引されている^{*1}。大証と CME を合わせると、一日の大部分の時間帯で日経 225 先物・オプションが取引されることになる。

本稿では、日経 225 オプションとその原資産である日経平均株価を中心に考えていくことにする。先ほど言及した通り、先物やオプションは夜間も価格が刻々と変化しているのに対し、日経平均株価は東証が取引時間外であるため夜間は値が動かない。市場に効率性が仮定されているとき、同一の原資産をもつ先物やオプシ

* 早稲田大学 ファイナンス研究センター

† 本稿は、鳥取環境大学の高橋一教授との共同研究の成果の一部であり、研究の過程で高橋一教授に有益なご指摘を多数賜った。ここに厚く感謝申し上げます。

^{*1} 日経 225 先物や日経 225 オプションはシンガポール証券取引所でも取引されているが、大証のナイトセッション導入などにより、近年は売買がそれほど活発ではない。

ンの間では裁定機会が存在しないはずである。しかしながら、夜間は原資産が取引されず値が動かないため、先物やオプションがある種の整合性をもって取引されているかどうか判断することが難しい。もし、市場で観測されない原資産価格過程を推定することができれば、先物やオプションの適正な価格を求める一助となるだろう。

さて、実際のところ、夜間オプションを取引する際、日経平均株価がどのように勘案されているかという点、日本経済新聞社が公表したその日の後場の終値をそのまま用いる方法と、オプション同様、夜間も取引されている先物を割引き日経平均株価を計算する方法が一般的である。期近の先物は夜間でも活発に取引されているものの、指数 10 円刻みの取引であり、よって先物価格のみから計算される日経平均株価の推定値も当然粗くなる。さらに、先物に大量の注文が出た場合など先物価格にショックが生じる可能性がある。このため、先物のみの価格データから原資産価格(日経平均株価)を求めると正確さに欠ける可能性がある。

オプションの市場価格から原資産価格を推定する方法としては、プットコールパリティ式を用いる方法が一般的である。プットコールパリティは、完全市場で裁定機会が存在しないと仮定したとき、コールオプションとプットオプションの裁定関係から導かれる式であり、同一の行使価格 K をもつコールオプションとプットオプションが同時に取引されていれば、現時点 t における原資産価格 S_t はプットコールパリティ式から計算することができる。日本においても、プットコールパリティ式から原資産価格を推定することは、浅野(1993)、村瀬(1998)等で行われており、村瀬(1997)では、アットザマネーの日経 225 オプションのデータからプットコールパリティを用いて原資産価格を推定し、その推定された原資産価格を用いて Implied Volatility を推定すると、システムティックエラーが消滅することを示した。ただし、同じ限月で同一の行使価格をもつコールオプションとプットオプションが同時刻に取引されているとは限らない。5 分ごとのデータをもちいて日経 225 オプションについて調べてみると、特に、0:00~3:00 については半数以上の時間帯で同一の行使価格のコールオプションとプットオプションが取引されておらず、したがって、これらの時間帯ではプットコールパリティ式から原資産価格を推定することができない。

マーケットで観測されたオプション価格から将来の原資産価格についての市場参加者の予測の情報を得る試みは、以前より研究されてきたが、パラメトリックに推定する方法とノンパラメトリックに推定する方法に大別できる。パラメトリックな推定法としては、Black-Scholes 方程式をそのまま用いたものや、Black-Scholes モデル同様、株価が対数正規分布にしたがうと仮定するものの、将来の原資産価格の分布型としていくつかの対数正規分布を重ね合わせる方法等が行われている。また、将来の原資産価格をノンパラメトリックに推定する方法では、Breedon and Litzenberger(1978)等が明らかにした状態価格密度とヨーロピアン・オプション価格評価関数の関係を用いることが多い。中でも、小田、吉羽(1998)は、オプションの市場価格を利用し、将来の原資産価格の確率分布を推定しており、Ait-Sahalia and Lo(1998)は、オプション価格評価関数をオプションの市場価格からノンパラメトリックに推定する方法を提案している。オプション価格から Implied Volatility を推定する方法についても、研究が進められており、Jiang and Tian(2005,2007)では、Black-Scholes 式を用いることなくオプション価格から Implied Volatility を推定する Model Free Implied Volatility が改良され、杉原(2010)等で用いられている。

さて、天候デリバティブの原資産は市場で取引されておらず、その価格付けは保険的手法や期待効用仮説に基づいた手法を用いるのが一般的であるが、高橋(2006)は、天候デリバティブ市場が効率的であれば、複数のオプション価格は整合的に価格付けされているという考えのもと、天候デリバティブの原資産(一定期間の気温を用いた指数)が Black-Scholes モデルに従うと仮定し、オプション価格から原資産価格と Implied Volatility を求めることを試みた。

本稿では、高橋(2006)と同様、最も古典的な Black-Scholes 方程式を逆向きに用いることで、オプション

価格から現時点での unobservable な原資産価格 S_t と Implied Volatility σ_t を推定することを考える。既に述べたが、推定された原資産価格は先物やオプションの適正な価格を求めるための有用な指標となる。推定にあたっては、未知パラメータが2つであるため、2種類のオプションデータを用いる必要がある。すなわち、本推定法を用いるには2種類のオプションデータが同時刻に取引されている必要があるが、プットコールパリティ式を用いる場合と異なり、同一の行使価格のコールオプションとプットオプションである必要はない。つまり、同時刻に一つ以上の行使価格のコールオプションとプットオプションがそれぞれ取引されていれば原資産価格を推定できることになる。本推定法は、Black-Scholes 方程式を用いるため、原資産価格が対数正規分布にしたがうという仮定をおく必要があるものの、取引量の少なくなる夜間のオプション市場データを用いる際には、異なる行使価格のオプションを用いることができるという点は重要であり、本推定法の特徴となっている。

本稿の構成は以下の通りである。以下第2節では、Black-Scholes 方程式を逆に用いて市場で観測されたオプション価格から原資産価格を推定する方法について説明する。推定にあたっては、原資産価格と Implied Volatility に基づきグリッドを作成した上で、オプション価格から原資産価格を推定する方法を用いる。グリッド幅を効率的に狭めるため、二分法を用いる。本稿で提案する推定法は、コールオプション価格から推定した原資産価格系列とプットオプション価格から推定した原資産価格系列の交点を求める方法であるということもできる。第3節では、実証分析で用いたデータについて簡単に述べた後、実証分析の方法と結果について説明する。実証分析では、本稿で提案する推定法から求めた推定値を日経平均株価やプットコールパリティ式から計算した原資産価格と比較する。最終節では、本稿の簡単なまとめと今後の研究への課題を述べる。本稿で提案する Inverse Black-Scholes 推定法を用いた原資産価格推定値は、日経 225 推定値としておおよそ機能しており、夜間の特に取引が少ない時間帯においても原資産価格を推定することができることが実証分析から示された。プットコールパリティ式を用いた推定法の過小データの問題は、本推定法を用いることで改善できる。また、複数の行使価格のオプションが同時刻に観測された場合には、アットザマネーの近くの行使価格のオプションを用いて推定する方がより現物に近い推定値が得られることがわかった。

2 推定モデル

本節は、本稿で提案する Inverse Black-Scholes 推定法について概説を行う。Inverse Black-Scholes 推定法は、一言でいうと Black-Scholes 方程式を逆向きに利用し原資産価格を求める方法である。このため、まず、次小節で Black and Scholes(1973) や Merton(1973) で示された Black-Scholes 方程式について結果だけを簡単に記し、その後、我々の提案する推定方法について説明していく。

2.1 Black-Scholes 方程式

Black-Scholes 方程式は、原資産価格 S_t が対数正規過程 (伊藤過程)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

に従い、債券価格 B_t が

$$dB_t = \exp(rt)$$

にしたがうというモデルのもとで、さらに無裁定性の仮定をおき、オプションの複製ポートフォリオを考えることで得られる。ここで、 W_t は標準ウィーナー過程、 r は無リスク金利である。

C_t : 時点 t におけるコールオプション価格
 P_t : 時点 t におけるプットオプション価格
 K : オプションの行使価格
 T : 満期時点

とおいたとき、Black-Scholes 式の解は、

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (1)$$

$$P_t = -S_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) \quad (2)$$

となる。但し、

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

は標準正規分布の累積密度関数を表す。また、

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

とおいた。Black-Scholes 方程式を用いると、原資産価格 S_t とオプション価格 C_t (または P_t) から Implied Volatility σ を推定することが可能である。

2.2 Black-Scholes 式を用いた原資産価格推定方法

2.2.1 グリッド作成

本小節より、Black-Scholes 方程式を逆向きに利用することで、オプション価格に imply された原資産価格を推定する方法を考えていく。

ある時点 t において、原資産価格はマーケットで観測されていないが、オプション価格は観測されている状況を考える。時点 t における原資産価格 S_t と Implied Volatility σ_t の組み合わせを考え、グリッドを作成する。原資産価格について有限な区間 $[S^{max}, S^{min}]$ を考え、 N_S 等分し、

$$S^i = S^{min} + i\Delta S, \quad i = 0, \dots, N_S, \quad \Delta S = \frac{S^{max} - S^{min}}{N_S}$$

Implied Volatility についても同様に区間 $[\sigma^{max}, \sigma^{min}]$ を考え、 N_σ 等分し、

$$\sigma^j = \sigma^{min} + j\Delta\sigma, \quad j = 0, \dots, N_\sigma, \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma^{max} - \sigma^{min}}{N_\sigma}$$

とする。これは、 $(N_S + 1) \times (N_\sigma + 1)$ 個のグリッドとなっている。グリッド (S^i, σ^j) におけるコールオプションの理論価格を Black-Scholes 式 (1) から求め、そのコールオプション理論価格を $C(i, j)$ とおく。プットオプションについても同様にして、理論価格を Black-Scholes 式 (2) から求め、グリッド (S^i, σ^j) でのプットオプション理論価格を $P(i, j)$ とおく。

2.2.2 二分法

さて、時点 t において、マーケットでコールオプション価格 C_t^m が観測されているとする。このとき、ある σ^j , ($j = 0, \dots, N_\sigma$) について、マーケットオプション価格 C_t^m が $C(k, j) < C_t^m < C(k+1, j)$ を満たすならば、原資産価格 S_t は、グリッド (S^k, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の間に含まれると考えられる。この考えをもとに、二分法を用い、 σ^j についてグリッド (S^k, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の幅を縮めていく。

グリッド (S^k, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の真ん中に、新たなグリッド (S^{k^*}, σ^j) を作成する。新たなグリッド (S^{k^*}, σ^j) は、 $S^{k^*} = \frac{S^k + S^{k+1}}{2}$ を満たすものであり、このグリッド (S^{k^*}, σ^j) におけるコールオプション理論価格を $C(k^*, j)$ とおくことにする。マーケットコールオプション価格 C_t^m が $C(k, j) < C_t^m < C(k^*, j)$ を満たすならば、原資産価格 S_t は、グリッド (S^k, σ^j) と (S^{k^*}, σ^j) の間に含まれると考えられ、マーケットコールオプション価格 C_t^m が $C(k^*, j) < C_t^m < C(k+1, j)$ を満たすならば、原資産価格 S_t は、グリッド (S^{k^*}, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の間に含まれると考えられる。よって、マーケットオプション価格 C_t^m が $C(k, j) < C_t^m < C(k^*, j)$ を満たすならば、グリッド (S^k, σ^j) と (S^{k^*}, σ^j) の間に新たなグリッドを作成し、マーケットオプション価格 C_t^m が $C(k^*, j) < C_t^m < C(k+1, j)$ を満たすならば、グリッド (S^{k^*}, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の間に新たなグリッドを作成する。以上の作業を繰り返すことで、グリッド幅を徐々に狭くしていくことができる。このように二分法を繰り返し、 σ^j における原資産価格推定値 $\hat{S}_t^C(j)$ を求める。さらに、 $j = 0, \dots, N_\sigma$ について同じ作業を行うことで、各 σ^j , ($j = 0, \dots, N_\sigma$) における原資産推定値 $\hat{S}_t^C(j)$, ($j = 0, \dots, N_\sigma$) を求めることができる。

プットオプションについても同様の作業を行うことで、マーケットで観測されたプットオプション価格 P_t^m から各 σ^j , ($j = 0, \dots, N_\sigma$) における原資産推定値 $\hat{S}_t^P(j)$, ($j = 0, \dots, N_\sigma$) を求められる。

以上のステップをまとめると、

- Step1 グリッド (S^i, σ^j) ($i = 0, \dots, N_S, j = 0, \dots, N_\sigma$) を定める。
- Step2 Black-Scholes 式を用い、グリッド (S^i, σ^j) におけるデリバティブ価格 $C(i, j)$ (または $P(i, j)$) を求める。
- Step3 実際の市場データをもちいると、デリバティブの市場における価格が、グリッド (S^k, σ^j) から求めたオプション理論価格と (S^{k+1}, σ^j) から求めたオプション理論価格の間にあることがわかる。
- Step4 グリッド (S^k, σ^j) と (S^{k+1}, σ^j) の間で二分法を用い、新たなグリッドを作成する。
- Step5 Step2 から Step4 を繰り返し行い、推定値 $(\hat{S}_t^C(j), \sigma^j)$ (または $(\hat{S}_t^P(j), \sigma^j)$) を求める。
- Step6 各 σ^j , ($j = 0, \dots, N_\sigma$) について Step1 から Step5 を行い、原資産価格推定値 $\hat{S}_t^C(1), \hat{S}_t^C(2), \dots, \hat{S}_t^C(N_\sigma)$ (または $\hat{S}_t^P(1), \hat{S}_t^P(2), \dots, \hat{S}_t^P(N_\sigma)$) を求める。

となる。

2.2.3 Inverse Black-Scholes 推定法

マーケットで観測されたコールオプション価格 C_t^m から原資産価格推定値 $\hat{S}_t^C(1), \hat{S}_t^C(2), \dots, \hat{S}_t^C(N_\sigma)$, マーケットで観測されたプットオプション価格 P_t^m から原資産価格推定値 $\hat{S}_t^P(1), \hat{S}_t^P(2), \dots, \hat{S}_t^P(N_\sigma)$ がそれぞれ求められているとする。このとき、コールオプション価格から求めた原資産価格推定値 $\hat{S}_t^C(1), \hat{S}_t^C(2), \dots, \hat{S}_t^C(N_\sigma)$ を結んだ曲線とプットオプション価格から求めた原資産価格推定値 $\hat{S}_t^P(1), \hat{S}_t^P(2), \dots, \hat{S}_t^P(N_\sigma)$ を結んだ曲線の交点が Black-Scholes 式を逆向きに利用したオプション implied 原資産価格と考えることができる。2本の曲線の交点を求めるには、曲線を何らかの式で近似することも考え

られるが、本稿では、交点が含まれる 2×2 のグリッド間において曲線を線型近似することで、オプション implied 原資産価格を求めた。この推定値を、Inverse Black-Scholes 推定法による原資産価格推定値 \hat{S}_t^{IBS} とよぶことにする。

この Inverse Black-Scholes 推定値は、時点 t において同限月のコールオプションとプットオプションがそれぞれ 1 つ以上の行使価格で取引されていれば、計算することができる。また、Inverse Black-Scholes 推定法により \hat{S}_t^{IBS} と同時に求められる Implied Volatility 推定値を \hat{IV}_t^{IBS} とよぶことにする。

2.3 プットコールパリティと先物価格

第 1 節でも述べたが、プットコールパリティは、完全市場で裁定機会が存在しないと仮定したとき、コールオプションとプットオプションの裁定関係から導かれる式であり、Black-Scholes モデルのように原資産価格に対する制約は必要ない。プットコールパリティは、

S_t : 時点 t における原資産価格
 C_t : 時点 t におけるコールオプション価格
 P_t : 時点 t におけるプットオプション価格
 K : オプションの行使価格
 r : 無リスク金利
 T : 満期時点

とおいたとき、

$$P_t = C_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t \quad (3)$$

と表わされる。第 1 節でも述べたが、同一の行使価格 K をもつコールオプションとプットオプションが同時に取引されていれば、現時点 t における原資産価格 S_t は (3) 式から計算することができる。

3 実証分析

3.1 データ

日経 225 先物は、3 月、6 月、9 月、12 月のうち 13 の限月が取引されるが、本稿の分析では、取引量の多い最も期近な限月のデータのみを用いた。日経 225 オプションは、残存期間が 3 ヶ月をきった銘柄については、アットザマネー (ATM) を中心に 125 円刻みで上下 16 本ずつの行使価格のオプションが存在するように設定されている。本稿ではオプション価格データとして、最も期近のコールオプションとプットオプションのうち ATM を中心に上下 3 本ずつ、計 7 本の行使価格のオプションを用いて分析を行った。先物とオプションについては、シカゴ商業取引所 (CME) でも取引が行われているが、本稿の分析には用いず、大阪証券取引所の日中取引とナイトセッションの 5 分足終値データをそれぞれ用いた。現物価格には、日本経済新聞社が発表する日経平均株価終値の 5 分毎データを用い、先物やオプションの割引金利には、3 か月 LIBOR の日次データを用いた。

データの期間は、2014 年 12 月 18 日の 9:00 から 2014 年 12 月 22 日 12:00 までを用いた。大阪証券取引所において先物やオプションの取引されていない 3:00~8:00、プレオープニング時間、プレクローズ時間*2は

*2 プレオープニング時間 (日中取引では 8:00 から 9:00 まで。ナイトセッションでは 16:15 から 16:30 まで。) とプレクローズ時間

データが存在しないため、9:00 から 15:10 までの日中取引と 16:30 から翌 2:55 までのナイトセッションの時間帯についてのデータ、計 440 個が分析対象である。

3.2 グリッドと二分法の設定

前節で述べた Inverse Black-Scholes 推定法を用いた推定にあたり、以下の通り設定を行い分析した。

グリッドの作成について、原資産価格の区間は $[S^{max}, S^{min}] = [16000, 17000]$, $N_S = 1$ とし^{*3}, Implied Volatility の区間は $[\sigma^{max}, \sigma^{min}] = [0.05, 0.4]$, $N_\sigma = 70$ とした。すなわち、Implied Volatility の刻み幅 $\Delta\sigma_t$ を 0.005 としていることになる。

Inverse Black-Scholes 推定法で用いる二分法については、上記の通りに原資産価格の区間を設定すると、二分法を最低 15 回繰り返せば、Black-Scholes 式を用いて計算されるオプション理論価格と市場で観測されたオプションプレミアムの差の絶対値が 0.1 以下となることがわかった。以下の実証分析では、二分法は 20 回を行い、原資産価格の推定を行った。

3.3 実証結果

3.3.1 観測数による推定方法の比較

第 1 章で述べた通り、日経 225 先物や日経 225 オプションの原資産である日経平均株価は、東京証券取引所で現物株が取引されている平日の 9:00 ~ 11:30(前場) と 12:30 ~ 15:00(後場) の時間帯のみ公表される。本稿で用いた 440 の時間帯のうちで現物価格が得られたのは 155 のデータのみであった。それらは、440 の時間帯のうちの 35.2% でしかなく、特に、後場の終了する 15 時から翌日の 9 時までの 18 時間もの間、現物データは存在しない。

先物価格については日中・夜間とも取引時間内ではすべての 440 の時間帯で終値が観測できた。

次にオプションについてであるが、プットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算するには、同時帯に、同じ行使価格をもつコールオプションとプットオプションが共に取引されている必要がある。このことから、プットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算できたのは、440 のうち 273(62.0%) であった。全取引時間帯の 6 割以上は計算できるわけだが、ナイトセッション、特に、0:00 から 2:55 までの時間帯はオプションの取引自体が少ない影響でプットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算できる時間帯はかなり少なく、本稿で用いたデータでは 27% のみであった。なお、1 時間以上にわたって原資産価格が計算できないような時間帯も存在した。

他方、本稿で提案する Inverse Black-Scholes 推定法では、コールオプションとプットオプションが同時帯に取引されている必要はあるが、同じ行使価格である必要はないため、パリティ式を用いる場合より原資産価格を推定できる時間帯は増加し、440 の時間帯のうち 363(82.5%) で推定できた。

3.3.2 アットザマネーの行使価格を用いた推定結果

2014 年 12 月 18 日の日中のデータを用いた結果が図 1、夜間 (16:30 から 24:00 まで) のデータを用いた結果が図 2 である。プットコールパリティ式と Inverse Black-Scholes 推定法を用いた結果については、同時間

(日中取引では 15:10 から 15:15 まで。ナイトセッションでは 2:55 から 3:00 まで。) は、取引予約時間帯であるため、価格データは得られない。

*3 $N_S = 1$ としたのは、二分法により S_t の幅はどんどん小さく出来るため、始めから小さく分割する必要がないためである。

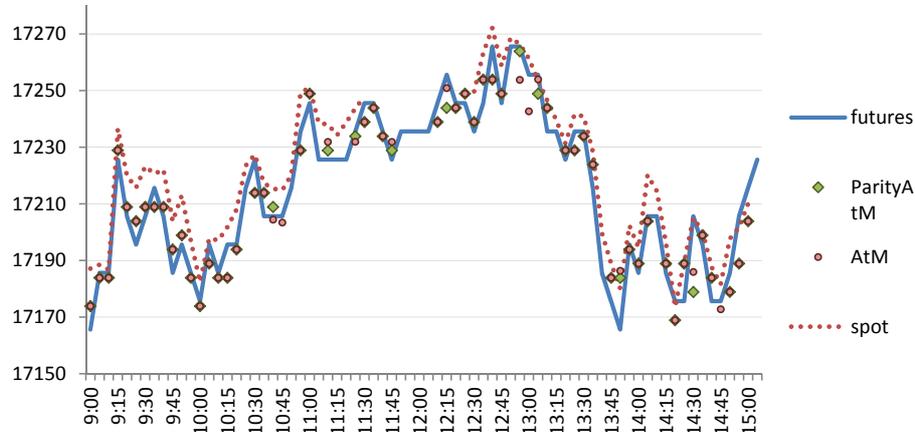


図1 2014年12月18日中の日経平均株価推定結果

：破線は、日本経済新聞社が発表する日経平均株価（現物）の5分毎データ。11:30から12:30は東証の取引時間外であるためデータはない。実線は5分足日経225先物価格を割引くことで求めた日経平均株価推定値。緑の角マーカはプットコールパリティ式を用いて計算した原資産価格。ピンクの丸マーカはInverse Black-Scholes推定法を用いた原資産価格推定値。プットコールパリティ式とInverse Black-Scholes推定法を用いた結果については、もし同時間帯に複数の結果が得られた場合は、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションを用いて推定した結果を表示している。

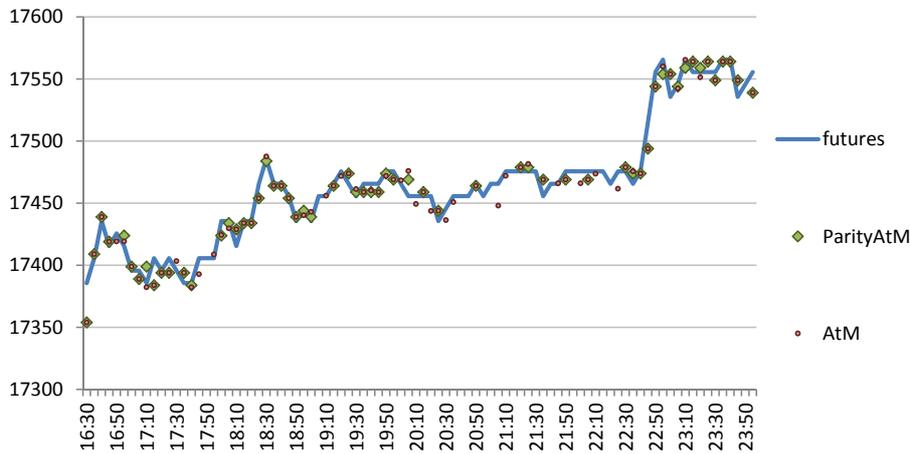


図2 2014年12月18日16:30から24:00までの日経平均株価推定結果

：実線は5分足日経225先物価格を割引くことで求めた日経平均株価推定値。緑の角マーカはプットコールパリティ式を用いて計算した原資産価格。ピンクの丸マーカはInverse Black-Scholes推定法を用いた原資産価格推定値。プットコールパリティ式とInverse Black-Scholes推定法を用いた結果については、もし同時間帯に複数の結果が得られた場合は、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションを用いて推定した結果を表示している。本時間帯は東京証券取引所が取引時間外であるため、日経平均株価は表示されない。

帯に複数のオプションが取引されていて、複数の結果が得られた場合は、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションを用いて推定した結果を表示している。

図1より、日経平均株価が公表されている時間帯では、現物の日経平均株価(破線)と先物を割引くことで求めた日経平均株価(実線)は同じような動き方をしていることがわかる。先物の取引単位が10円刻みであることから、それらが完全に一致した価格となることはほぼないが、5分足データを用いても現物価格と先物から求めた原資産価格が連動していることがみとれる。

日中は、オプションの取引も活発であるため、同時帯に同行使価格のコールオプションとプットオプションが取引されていることが多い。12月18日では、約8割の時間帯でプットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算することが可能であった。プットコールパリティ式を用いて計算された原資産価格もまた現物の日経平均株価の動きに連動していることが図1より見て取れる。すなわち、オプション価格も日経平均株価との裁定関係に基づき決定されていることがわかる。ただ、プットコールパリティ式を用いて計算された原資産価格は、現物の日経平均株価に近い値である場合もあるが、先物を割引くことで求めた原資産価格に近い値であることも多い。これは、日経225オプションは先物に連動しているためとも、オプション価格も先物同様10円刻みの取引単位であるためとも考えられる。

次に、Inverse Black-Scholes 推定法を用いて推定した原資産価格に着目すると、プットコールパリティ式を用いて計算された原資産価格と同一の値が推定されている時間帯が多い。プットコールパリティ式、Inverse Black-Scholes 推定法どちらの場合も、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションを用いて推定したためこのような結果となっている。

図2は、2014年12月18日16:30から24:00までの結果である。この時間帯は、東証は取引時間外であるため日経平均株価現物の値は動かないが、先物やオプションは比較的取引の多い時間帯である。よって、多くの期間でプットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算できた。日中同様、プットコールパリティ式を用いて計算された原資産価格は、先物を割引くことで求めた原資産価格に近い値をとっており、また、Inverse Black-Scholes 推定法を用いて推定した原資産価格については、先物価格を割引いた原資産価格やプットコールパリティ式を用いて計算した原資産価格に近い値が推定されている時間が多い。これらのことから、アットザマネー付近の行使価格をもつオプションを用いた場合、Inverse Black-Scholes 推定法を用いた原資産価格推定値は先物価格を割引いた原資産価格やプットコールパリティ式を用いて計算した原資産価格と同様、日経225推定値としておおそ機能していることがわかる。このことは、逆にみれば、市場で観測されたオプション価格は、原資産価格が取引されていない時間でもBlack-Scholesモデルからもとめた理論価格から離れた値はとっていないということがいえるだろう。

図3は、2014年12月19日0:00から2:55までの日経平均株価の推定結果である。この時間帯は、日経平均株価現物の値はもちろん動かず、さらにオプションの取引がかなり減少する時間帯であるため、プットコールパリティ式を用いて原資産価格を計算できる割合は格段に少なくなる。12月19日については、35%の時間帯のみで計算可能だった。しかも、1:25から2:30までは、1時間以上にわたってプットコールパリティ式を用いて原資産価格を推定できない状態が続いており、パリティ式を用いた推定方法の弱い部分が表れている。他方、Inverse Black-Scholes 推定法については、この取引量が少ない時間帯においても7割近い時間で原資産価格を推定することができた。この場合も、Inverse Black-Scholes 推定法を用いた原資産価格推定値は、先物価格を割引いた原資産価格やプットコールパリティ式を用いて計算した原資産価格に近い値が推定されている時間が多く、日経225推定値としておおそ機能しているといえるだろう。すなわち、市場で観測されたオプション価格は、取引が少なくなる時間帯でも、Black-Scholesモデルからもとめた理論価格からそう離れた値はとっていないということがいえる。

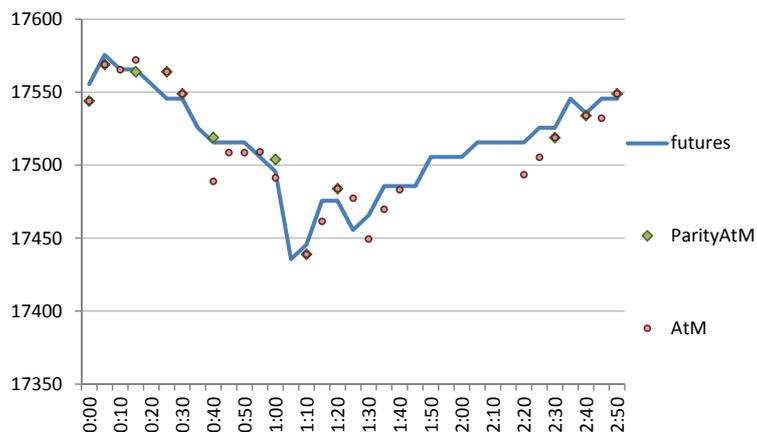


図3 2014年12月19日00:0から2:55までの日経平均株価推定結果
：グラフについての属性は、図2と同様である。

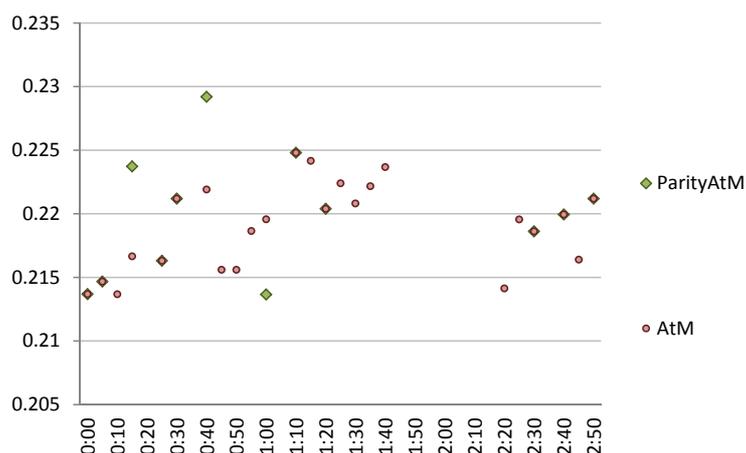


図4 2014年12月19日00:0から2:55までの Implied Volatility 推定結果
：緑の角マーカーはプットコールパリティ式を用いて計算した Implied Volatility. ピンクの丸マーカーは Inverse Black-Scholes 推定法を用いた Implied Volatility. どちらも、もし同時帯に複数の結果が得られた場合は、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションを用いて推定した結果を表示している。

日経平均株価の値が動かない夜間は、先物を割引き原資産価格を推定する方法が最も簡単な方法であるが、先物のデータのみを用いると、Implied Volatility は推定されることはない。プットコールパリティ式や Inverse Black-Scholes 推定法を用いると、原資産価格と同時に Implied Volatility も求めることができる。

図4は、2014年12月19日0:00から2:55までの Implied Volatility の推定結果ある。この時間帯、Implied Volatility は0.213から0.23までの値をとり比較的穏やかに推移しているが、Inverse Black-Scholes 推定法を用いた方がプットコールパリティ式を用いて計算するよりも変動が小さい傾向がある。

3.3.3 複数のオプションが同時に取引されている場合

本稿で提案する Inverse Black-Scholes 推定法は、同時時間帯にコールオプションとプットオプションがそれぞれ1つ以上の行使価格で取引されていれば、原資産価格を推定することができる。3.3.2節では、複数のオプションが同時時間帯に取引されていた場合には、アットザマネーに最も近い行使価格のオプションのみを用いて推定を行った。本小節では、複数のオプションが同時時間帯に取引されていた場合、すべてのオプションの組み合わせについて Inverse Black-Scholes 推定法を用いて原資産価格を推定しその平均を同時時間帯の原資産価格推定値とする方法を用い、アットザマネーに近いオプションを用いた3.3.2節の方法とを比較していく。

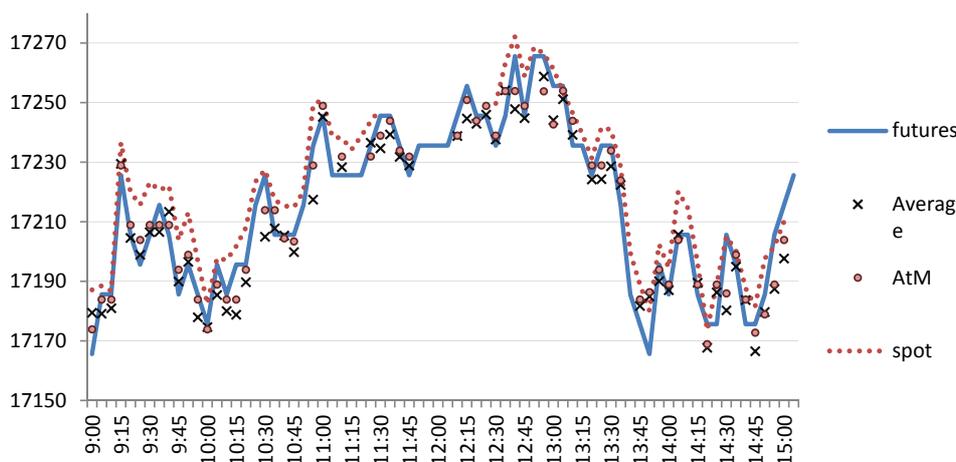


図5 2014年12月18日日中の日経平均株価推定結果(平均値)

: 破線は、日本経済新聞社が発表する日経平均株価(現物)の5分毎データ。実線は5分足日経225先物価格を割引くことで求めた日経平均株価推定値。ピンクの丸マーカーはアットザマネーのコールオプションについて Inverse Black-Scholes 推定法を用いた原資産価格推定値。黒い×マーカーは複数のオプションが同時時間帯に取引されていた場合、すべてのオプションの組み合わせについて Inverse Black-Scholes 推定法を用いて原資産価格を推定し、その平均をとったもの。

2014年12月18日の日中のデータを用いた日経平均株価推定結果が図5である。図5より、複数のオプションを用いて推定した原資産価格を平均する方法を用いると、アットザマネーの近くのオプションのみを用いて推定した原資産価格よりも、現物の日経平均株価とのかい離が大きいことが多いことがみてとれる。日経平均株価(現物)が取引されている時間のみを抽出し、推定値と現物の差について統計量を比較してみると、アットザマネーの近くのオプションのみを用いて推定した原資産価格の方が複数のオプションを用いて平均する方法よりも差の平均が小さく、先物を割引いた推定値やパリティ式から求めた原資産価格に近い値をとっていることがわかる(表1)。

3.3.4 異なる行使価格を用いた分析

同一時間帯においてコールオプションとプットオプションが複数の行使価格で取引されている場合、それらの組み合わせによって、複数の Inverse Black-Scholes 推定値が求められる。3.3.3節ではそれらを平均して原資産価格推定値とする方法についてみてきたが、本小節ではそれら1つ1つの推定値にどのような傾向がみられるかについて分析を行う。

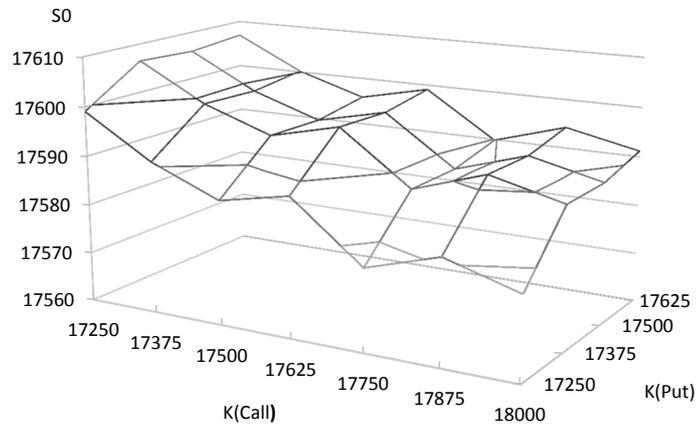


図6 異なる行使価格のオプションを用いた \hat{S}_t^{IBS} 推定結果

: 同一時間帯 (2014 年 12 月 22 日 10:00) の複数のオプションを用いてそれぞれ \hat{S}_t^{IBS} を推定した結果. 底面横軸は分析に用いたコールオプションの行使価格, 底面縦軸はプットオプションの行使価格である. 同時刻の日経平均株価現物は 17603.5, 先物価格を割引き求めた原資産価格は 17585.7, プットコールパリティ式から求めた原資産価格は 17599.1.

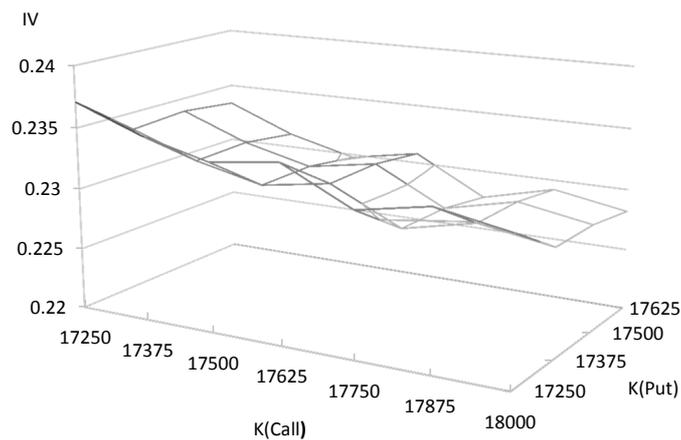


図7 異なる行使価格のオプションを用いた Implied Volatility 推定結果

: 同一時間帯 (2014 年 12 月 22 日 10:00) の複数のオプションを用いてそれぞれ \hat{IV}_t^{IBS} を推定した結果. 底面横軸は分析に用いたコールオプションの行使価格, 底面縦軸はプットオプションの行使価格である.

| 推定方法 | 平均 | 標準偏差 |
|---------------|-------|------|
| 先物 | 7.395 | 5.67 |
| パリティ式 | 7.790 | 5.53 |
| IBS 推定法 (ATM) | 8.269 | 5.38 |
| IBS 推定法 (平均) | 11.62 | 5.87 |

表 1 日経平均株価 (現物) との差の統計量

: 日経平均株価 (現物) と各推定法で求めた原資産価格推定値の差の平均と標準偏差. 先物は, 先物価格を割引き求めた原資産価格, パリティ式はプットコールパリティ式を用いて求めた原資産価格, IBS 推定法 (ATM) は, アットザマネーの近くのオプションを用いて Inverse Black-Scholes 推定法で推定した原資産価格, IBS 推定法 (平均) は, 複数のオプションを用いて Inverse Black-Scholes 推定法で推定した原資産価格を平均したもの.

図 6 は, 2014 年 12 月 22 日の 10:00 に取引されていたオプションの価格データを用いて求めた Inverse Black-Scholes 推定法による原資産価格推定値 \hat{S}_t^{IBS} , 図 7 は, 同じデータを用いて求めた Inverse Black-Scholes 推定法による Implied Volatility 推定値 \hat{IV}_t^{IBS} である. 同時刻 (2014 年 12 月 22 日 10:00) の日経平均株価現物は 17603.5, 先物価格を割引き求めた原資産価格は 17585.7, プットコールパリティ式から求めた原資産価格は 17599.1 であった.

図 6 からわかる通り, 行使価格の大きいコールオプションと行使価格の小さいプットオプションを用いて推定した場合, すなわちコールオプションもプットオプションもアウトオブザマネーとなっている場合には, Inverse Black-Scholes 推定値 \hat{S}_t^{IBS} は, 現物やプットコールパリティ式から求めた原資産価格よりもかなり小さい. 逆に行使価格の小さいコールオプションと行使価格の大きいプットオプション (どちらもインザマネー) を用いて推定した場合には, \hat{S}_t^{IBS} は少しではあるが現物やプットコールパリティ式から求めた原資産価格よりも大きくなっている.

また, Implied Volatility 推定値 \hat{IV}_t^{IBS} については, コールオプションもプットオプションも行使価格の小さいオプションを用いて推定する方が, \hat{IV}_t^{IBS} が大きく, コールオプションもプットオプションも行使価格の大きいオプションを用いて推定する方が, \hat{IV}_t^{IBS} が小さくなるという傾向が見てとれる (図 7).

4 まとめと今後の展望

本稿では, 取引時間外等の理由で観測できない原資産価格について, Black-Scholes 方程式を逆向きに用いることでオプション価格から推定する Inverse Black-Scholes 推定法を提案した. さらに, 日経 225 オプション 5 分足データを用いて実証分析を行った. 実証分析の結果, Inverse Black-Scholes 推定法は, 原資産価格の取引されている日中でも取引時間外の夜間においても, プットコールパリティ式を用いた場合と同等程度に原資産価格を推定できていることがわかった. 夜間でも特に取引が少ない時間帯においては, プットコールパリティ式を用いて原資産価格が計算できる割合が少ないため, Inverse Black-Scholes 推定法を用いることで原資産価格を推定する意味が発生する. それは, 先物価格を割引きだけでは求められない Implied Volatility も同時に推定できるという利点も持ち合わせている. Inverse Black-Scholes 推定法を用いて推定する際, 複数の行使価格のオプションが同時刻に観測された場合, どの行使価格のオプションを用いて推定するとよいかという問題が考えられるが, 平均するよりもアットザマネーの近くの行使価格のオプションを用いて推定する方がより現物に近い推定値が得られることが示された. 本稿では, Black-Scholes 方程式をそのまま逆に用い

て原資産価格を推定したが、今後、Black-Scholes モデルを拡張し、Black-Scholes 方程式ではなくシミュレーションにより原資産価格を求める方法について研究を行いたいと考えている。また、本稿では、求めた推定値が統計学的に有意であるかどうかについては触れていないが、その点を掘り下げて分析を進めることも今後の課題である。

参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y. and A. W. Lo (1998), Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices, *Journal of Finance* 53, pp.499-547.
- [2] Black, F. and M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, No.3, pp.637-654.
- [3] Breeden, D. and R. H. Litzenberger (1978), Prices of State Contingent Claims Implicit in Option Prices, *Journal of Business* 51, pp.621-651.
- [4] Jiang, G. J. and Y. S. Tian, (2005), Model Free Implied Volatility and Its Information Content, *Review of Financial Studies* 18, pp.1305-1342.
- [5] Jiang, G. J. and Y. S. Tian, (2007), Extracting Model-Free Volatility from Option Prices : An Examination of the VIX index, *Journal of Derivatives, Spring*, pp.35-60.
- [6] Merton, R. C. (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, pp.141-183.
- [7] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery (1992), Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing Second Edition, *Cambridge University Press*
- [8] 浅野幸弘 (1993), オプションの機能と価格形成—日経オプションによる実証分析, 『インベストメント』, 第 46 巻 第 4 号 pp.71-93.
- [9] 宇野洋輔 (2013), わが国株式市場における先物価格と現物価格の関係: いわゆる「先物主導」の検証, 『日銀レビュー』
- [10] 小田信之, 吉羽要直 (1998), デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法, 『金融研究』, 29(2) pp.73-120
- [11] 神山直樹, 青木岳人 (2004), オプション市場からみた原資産価格の予測可能性, 『先物・オプションレポート』 2004 年 1 月号, 大阪証券取引所.
- [12] 杉原慶彦 (2009), 我が国株式市場のモデル・フリー・インプライド・ボラティリティ, 『金融研究』, 29(2) pp.73-120
- [13] 高橋一 (2006), 非完備市場に於けるプライシング, 第 25 回夏季 JAFEE 大会 会長講演 スライド資料
- [14] 村瀬安紀子 (1997), 日経 225 オプション・ボラティリティのシステムティック・エラーと原資産価格トレンド, 『現代ファイナンス』, 第 1 巻 pp.19-32.