Waseda University
Institute for Business and Finance

Working Paper Series

WBF-18-001：March 2018

変換ベータ分布を用いた地震デリバティブの評価理論

早稲田大学大学院経営管理研究科　池田 昌幸

早稲田大学 ビジネス・ファイナンス研究センター

変換ベータ分布を用いた地震デリバティブの評価理論*

2018 年 3 月

Waseda University Institute for Business and Finance: Working Paper Series

WBF-18-001

早稲田大学大学院経営管理研究科

池田　昌幸

要旨

本稿は，大地震がもたらす損害に対するリスクヘッジ商品として開発されている地震デリバティブの評価を，極値理論と代表的経済主体モデルを用いて分析する。特定地域，特定期間における大地震が発生する確率は非常に小さいが，それが起これば非常に大きな災害が発生する特徴があり，それは大雨，干ばつ，大風，高波のような自然災害に共通した特徴である。本稿は，これらの大災害をもたらす事象が一定期間内に生起する確率が３種類の極値分布のいずれかに従うと考え，そのリスク中立確率を Ikeda(2010)の変換ベータ分布の特殊ケースとして導出した。応用例として，大地震発生を条件として，地震の最大マグニチュードに応じてペイオフが定まる債券(CAT bond)とともに，そのマグニチュードに対するコールオプションの均衡価格を求めた。既存研究と異なる点は，代表的経済主体の存在を仮定して，一般均衡のもとで大地震が発生するリスク中立確率を表現し，さらに，先物価格が観測可能である場合に，リスク中立的評価関係を利用して，選好を表現する母数が登場しない評価式を導出したことである。

*本稿は，科学研究費（基盤研究(B) 課題番号 15H03402)の助成を受けたものである。

1. はじめに

我が国では，古来より大地震による被害が繰り返されてきたが，その被害に対するリスク管理は，これまで主に地震保険が担ってきた。地震保険に加入した場合であっても，いざ地震が発生し，家屋の損壊等，損害が発生しても，地震との因果関係の証明，実損額の査定など，保険金の受け取りまでは時間がかかることが多く，迅速なリスク管理が難しい問題がある。また，保険会社は引き受けたリスクを再保険市場へ移転することが行われるが，再保険市場自体が大震災の被害のような巨大リスクを負担するキャパシティがないため，保険料が高額にならざるをえない問題がおきる。

これに対して，地震デリバティブは，契約期間中に予め定められた観測地点で，一定満たせば，約定した金額が迅速に支払われる。企業は平常時には金融機関へ手数料を支払い，地震リスクが顕在化し，支払事由となる指標(トリガー)が満たされた時点で金銭を受け取るのである。2007 年 10 月に東日本旅客鉄道株式会社(JR 東日本)とミュンヘン再保険会社の間で締結された地震デリバティブを例にとると，締結時から 5 年間の間に，東京駅から半径 70ｋｍ以内を震源地とするマグニチュード 7.0 以上 7.7 未満の地震が起きた時，震源の位置やマグニチュード別に定めた金額が再保険会社から JR 東日本へ支払われ，マグニチュードが大きいほどその金額が大きくなるように設計されている。JR 東日本は，この契約が非負のキャッシュ・フローをもたらすので，その対価として締結時に「プレミアム」を支払うというものである。非常に小さなマグニチュードをもつ地震も含めれば，対象期間中には無数の地震が発生しているので，契約の価値を算出するうえで問題となるリスクは，一定期間において発生する地震の最大マグニチュードが，どの範囲にあるかという確率である。

最大値マグニチュードがどの程度になるのか，その不確実性については，極値分布の理論を利用することができる。極値分布とは，有限個の独立，同一の分布に従う確率変数の実現値の中から最大値（あるいは最小値）を取り出したとき，適切に基準化された確率変数の個数を無限大にした場合の最大値（あるいは最小値）が従う確率分布のことであるが，元の確率分布を特定する必要がない利点がある。本稿は，地震デリバティブの評価について，極値理論を適用する試みであるが，最大マグニチュードという変数自体が取り引き可能な資産ではないため，不完備市場におけるリスク中立確率をどう特定するかという難問が存在する。[1]

この不完備市場における証券評価において，有力な方法を提供するのが，Negishi(1960)が最初に提示したとされる，代表的経済主体モデルである。本稿は，代表

[1] ファイナンス理論においては，リスク管理理論において，株式市場の暴落のように，投資収益率の確率分布の裾で発生する事象に対して，バリューアトリスク(VaR)あるいは期待ショートフォール(expected shortfall:ES)というリスク管理の手法が浸透しており，ここででも極値理論が利用されている。極値理論のファイナンス理論，保険理論への適用例については，Embrechts, Klupperlberg, and Mikosch (1997)が詳しい。

的経済主体モデルを利用して対象となる指標(マグニチュード)の確率分布のリスク中立確率を特定するが，その際，Ikeda(2010)が示した，変換ベータ分布の特殊ケースとして，対象指標が 3 つの（すべての）タイプの極値分布に従うときに，それらの資産固有のプライシング・カーネル(asset specific pricing kernel)を導出し，対象指標の先渡価格の関数として，同指標に依存してペイオフが定まる債券であるカタストロフィー(CAT)債券，およびコールオプション価格を導出した。[2]本稿は，地震リスクに対する派生証券を分析するが，導出された評価式は，地震に限らず，極値分布によって記述が可能な特定期間内に発生する大災害，例えば台風，洪水，高波，干ばつなどの自然災害の発生に呼応してペイオフが定まる CAT 債や天候デリバティブについても利用可能である。

本稿の構成は次の通りである。次章では，本稿が採用する代表的経済主体モデルを提示する。総消費および派生証券の対象指標が 2 変量変換ベータ分布に従うもとで，リスク回避的な効用関数が想定される。第 3 章では，対象指標が，すべてのタイプの極値分布，すなわち，グンベル分布，フレシェ分布，ワイブル分布について，これらを変換ベータ分布の特殊ケースとして導出するとともに，それらの資産固有プライシング・カーネルを導出する。第 4 章では，対象指標固有のプライシング・カーネルを用いて，派生証券の例として，地震の最大マグニチュード等，極値分布に従うと考えられる指標に対して契約される大災害に対するヨーロッパ型コールオプションの評価式を導出する。第 5 章では結論が述べられる。

2. 総消費，対象指標の確率分布が変換ベータ分布に従う場合の代表的経済主体モデル

Rubinstein (1976) は，離散時間の 1 期間モデルを想定し，べき型効用関数をもつ代表的経済主体が存在し，総消費が対数正規分布に従うという完備とは限らない経済を仮定した。その経済において，将来収益が対数正規分布に従う資産に対するコールオプションの評価式をリスク中立確率を用いて導出すると，連続時間モデルにおける Black-Scholes 公式と同一の評価式が得られることを示した。べき型効用関数を想定したにも関わらず，導出した評価式にはリスク選好を表すパラメターも，対象資産収益の期待収益率も現れない特徴があるため，評価式はあたかもリスク中立的経済における対象資産の収益と派生証券の関係を記述しているかのようにみえる。そこで，この関係をリスク中立的評価関係(risk neutral valuational relation (RNVR))とよぶのであるが，RNVR は動学的に完備ではない市場において，派生証券を評価する有力な方法を提供するものである。Brennan (1979)は，Rubinstein (1976)の結果を拡張し，総消費と対象資産の収益の同時確率分布が二変量正規分布あるいは二変量対数正規分布に従うとき，

[2] Vitiello and Poon (2008) は対象資産の収益が変換ガンマ分布に従うときの派生証券を評価している。変換ガンマ分布の特殊ケースとして，グンベル分布，ワイブル分布を含むとの記述があるが，その場合の資産固有プライシング・カーネルと派生証券の評価式は導出していない。また，対象収益の確率分布がフレシェ分布の場合については検討されていない。

RNVR が存在するような代表的経済主体の効用関数のもとでのプライシング・カーネルおよび資産固有プライシング・カーネルを導出し，その応用例として，正規分布収益に対する派生証券評価式を提示している。Camara (2003) は，RNVR が成立する条件を，変換正規分布(transformed normal distribution)のクラスまで拡張し，Rubinstein および Brennan の結果を特殊ケースとして導いている。

これらの研究は，経済が本質的にもつ不確実性を正規分布によって記述しており，大地震に代表される巨大災害リスクのように，特定地域，特定期間内に発生する確率は低いものの，発生した場合の被害が甚大であるようなリスクを記述するには適していない。また，近年，取引が増加している，気温，降水量，風力といった変数に対する派生証券や，会計数値にもとづくインセンティブ給与など，対象となる変数や指標自体が取引が不可能で，正規分布では記述できない不確実性をもつ契約の評価にも利用できない問題がある。

Ikeda(2010)は変換ベータ分布に従う場合について，代表的経済主体モデルを用いて選好パラメターや期待収益率が現れない派生証券評価式を導出しているが，資産固有プライシング・カーネルが従う確率分布が対数正規分布以外の分布に従う数少ない研究成果である。同論文では，ファンダメンタルな不確実性の記述にベータ分布を採用しているが，この分布は，U-型， J-型の確率密度だけでなく，逆 J-型や線形の形状をした確率密度も記述できる。その結果，正あるいは負の歪度，正あるいは負の超過尖度も対応可能である。ベータ分布の変換分布は更に汎用性に富み，例えば McDonald and Xu(1995)による一般化ベータ分布は，その特殊ケースにガンマ分布や対数正規分布も含んでいる。

本稿では，一定時間内に巨大地震が発生する確率が３種の極値分布のいずれかに従うと仮定するが，そのリスク中立確率を Ikeda(2010)の結果を用いて，変換ベータ分布の特殊ケースとして導出する。具体例として地震リスクに対応した債券およびコールオプション契約を評価するが，先物価格を用いて導出された評価式は，不完備市場でありながら，代表的経済主体の選好パラメターを含まない特徴をもつ。

2.1 モデル

以下では，経済の消費配分がパレート最適であることを仮定する。このとき，代表的経済主体が存在することが知られている。１期間モデルを仮定し，期初を時点０，期末を時点 T とする。この 2 時点の間には資産の売買を許さない。[3]

---

[3] この仮定によって，以下の分析では Black and Scholes(1973)が想定する，連続的取引が可能な経済を否定しており，市場の動学的完備性は満たされない。したがって，市場の完備性を保証するためには，市場に十分に多くの互いに線形独立なペイオフをもつ資産が取引されているか，あるいは，投資家の効用関数が特定の HARA 型に属することが必要となる。詳細は，池田(2000)の第 7 章をみよ。

代表的経済主体の効用関数を$U'(W_T)$とする。ここで，$U(\bullet)$はリスク回避的

W_Tは期末富である。このとき，プライシング・カーネルは

$$\phi(W_T)=\frac{U'(W_T)}{E\left[U'(W_T)\right]} \tag{1}$$

で与えられるが，期待値は現実の確率によって計算されていることに注意する。プライシング・カーネルを用いれば，特定の資産の期末の収益・価格，あるいはそれ自体は売買不可能なインデックスの期末の水準S_Tに対して結ばれる先物契約における先物価格は

$$F=E\left[\phi(W_T)S_T\right] \tag{2}$$

と求めることができる。[4]市場性のある資産については，その現在価値は，連続複利表示の無リスク利子率をr_fとすれば，

$$S=e^{-r_f T}E\left[\phi(W_T)S_T\right] \tag{3}$$

である。これらの計算には，W_TおよびS_Tの２変量同時確率分布が必要となる。そこで，当該資産あるいは指標固有のプライシング・カーネルを条件付き期待値を用いて

$$\psi(S_T)=E\left[\phi(W_T)|S_T\right] \tag{4}$$

と定義する。[5]このとき，先物価格は

$$F=E\left[\psi(S_T)S_T\right]=\hat{E}\left[S_T\right] \tag{5}$$

として，単一の確率変数S_Tの密度関数がわかれば計算することができる。$E[\cdot]$はS_Tが従う確率密度$g(S_T)$を用いた期待値演算を，ハットを付した$\hat{E}[\cdot]$はS_Tのリスク中立確率密度$\hat{g}(S_T)\equiv\psi(S_T)g(S_T)$を用いた期待値演算を表す。市場性のある資産においては，

---

[4] ここでは，無リスク利子率が変動しない１期間モデルを仮定しているので，先物価格と先渡価格は同じになる

[5] この概念は，Brennan(1979, p.57)が条件付き限界効用関数(conditional marginal utility function)とよんだものである。本稿では，意味が明確になるようにPoon and Stapleton(2005)に倣って資産固有プライシング・カーネル(asset specific pricing kernel: ASPK)あるいは指標固有プライシング・カーネル(index specific pricing kernel)とよぶ。

この先物価格に対応する現在価値は,

$$S = e^{-r_f T} E\left[\psi\left(S_T\right) S_T\right] = e^{-r_f T} \hat{E}\left[S_T\right] \tag{6}$$

である。

2.2 変換ベータ分布

以下の分析の準備として，結合密度が次式で与えられるような，2 変量標準ベータ分布$\left(X,Y\right)$を導入する。[6]

$$g\left(x,y\right) = \frac{\Gamma\left(T\right)}{\Gamma\left(\theta_1\right)\Gamma\left(\theta_2\right)\Gamma\left(\theta_3\right)} x^{\theta_1-1} y^{\theta_2-1} \left(1-x-y\right)^{\theta_3-1} \tag{7}$$

但し，$\theta_i > 0,\quad i=1,2,3$，$T = \theta_1+\theta_2+\theta_3$

,

$x,y \geq 0,\quad x+y \leq 1$

$\Gamma\left(\bullet\right)$はガンマ関数で，$\Gamma\left(\theta\right) = \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-t} dt$，$\quad \theta > 0$

この周辺分布は$X \sim Beta\left(\theta_1, \theta_2+\theta_3\right)$，$Y \sim Beta\left(\theta_2, \theta_1+\theta_3\right)$に従い，密度関数はそれぞれ

$$g\left(x\right) = \frac{\Gamma\left(T\right)}{\Gamma\left(\theta_1\right)\Gamma\left(\theta_2+\theta_3\right)} x^{\theta_1-1} \left(1-x\right)^{\theta_2+\theta_3-1} \tag{8a}$$

,

$$g\left(y\right) = \frac{\Gamma\left(T\right)}{\Gamma\left(\theta_2\right)\Gamma\left(\theta_1+\theta_3\right)} y^{\theta_2-1} \left(1-y\right)^{\theta_1+\theta_3-1} \tag{8b}$$

で与えられ，両者の相関係数は

$$Corr[X,Y] = -\sqrt{\frac{\theta_1\theta_3}{\left(\theta_2+\theta_3\right)\left(\theta_1+\theta_3\right)}} \tag{8c}$$

である。次に，上の標準ベータ分布を変換し，総消費，対象指標を記述する確率分布を作り出す。変換は，厳密に単調かつ微分可能な関数$f\left(\bullet\right)$，$h\left(\bullet\right)$によって行い，総消費W_Tおよび対象指標S_Tが変換された結果,

$$f\left(W_T\right) \sim Beta\left(p_W = \theta_2, q_w = \theta_1+\theta_3\right),\quad h\left(S_T\right) \sim Beta\left(p = \theta_1, q = \theta_2+\theta_3\right)$$

になったとする。$f\left(\bullet\right)$については，さらに単調増加性を仮定しておく。このとき変換

---

[6] 2変量ベータ分布の詳細については， Kotz, Balakrishnan, and Johnson(2000)の第49章を見よ。

される前の確率変数W_TとS_Tの密度関数は,

$$g\left(W_T\right)=f'\left(W_T\right)\frac{\Gamma\left(p_W+q_W\right)}{\Gamma\left(p_W\right)\Gamma\left(q_W\right)}\left[f\left(W_T\right)\right]^{p_W-1}\left[1-f\left(W_T\right)\right]^{q_W-1} \tag{9a}$$

$$g\left(S_T\right)=\left|h'\left(S_T\right)\right|\frac{\Gamma\left(p+q\right)}{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}\left[h\left(S_T\right)\right]^{p-1}\left[1-h\left(S_T\right)\right]^{q-1} \tag{9b}$$

である。

次に，代表的経済主体の選好を特定する。彼の限界効用は，上で用いた$f'\left(W_T\right)>0$であるような単調増加関数によって

$$U'\left(W_T\right)=\left[f\left(W_T\right)\right]^{-\gamma}, \quad \gamma>0 \tag{10}$$

で与えられるものと仮定する。後に明らかになるが，γはリスク回避の程度を表す母数である。2 階微分を求めると,

$$U''\left(W_T\right)=\left(-\gamma\right)\left[f\left(W_T\right)\right]^{-\gamma-1}f'\left(W_T\right)$$

ゆえアロウ・プラットの絶対的および相対的リスク回避度が増加関数となるか減少関数となるかは$f\left(W_T\right)$の関数形に依存する。[7]

補助定理 1 期末の総消費W_Tが変換ベータ分布に従い，代表的経済主体の効用関数が(10)式の限界効用で特徴づけられるならば，プライシング・カーネルは,

$$\phi\left(W_T\right)=\left[g\left(W_T\right)\right]^{-\gamma}\frac{\Gamma\left(p_W+q_W-\gamma\right)\Gamma\left(p_W\right)}{\Gamma\left(p_W+q_W\right)\Gamma\left(p_W-\gamma\right)} \tag{11}$$

で与えられる。

証明　Ikeda(2010)の Appendix を見よ。■

上のプライシング・カーネルは，収益を生む資産が市場性をもたない場合，例えば気温，降水量，風力等の天候デリバティブの対象変数や地震のマグニチュードのような指標であっても成立する。

[7] 本稿では限界効用にべき型の関数形を仮定したが，$f(\cdot)$に指数関数を用いれば，Camara(2003)が仮定した指数型の関数形も特殊ケースとして位置付けることができる。

補助定理 2　期末の総消費 W_T と対象指標 S_T が 2 変量変換ベータ分布に従い，代表的経済主体の効用関数が(10)式の限界効用で特徴づけられるならば，指標固有プライシング・カーネルは，

$$\psi\left(S_T\right)=\left[1-h\left(S_T\right)\right]^{-\gamma}\frac{\Gamma\left(p+q-\gamma\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)\Gamma\left(q-\gamma\right)} \tag{12}$$

である。

証明　Ikeda(2010) の Appendix を見よ。■

Ikeda(2010)では，総消費および派生証券の対象資産・指標が 2 変量一般化ベータ分布(the bivariate generalized beta (GB) distribution)に従う場合を検討しているが，以下では，総消費が一般化ベータ分布，対象指標が極値分布に従うことを仮定する。このとき，総消費の変換関数は

$$f\left(W_T\right)=\frac{\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}}{1+c_W\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}} \tag{13}$$

但し，$a_W>0$，$0\le c_W\le 1$，$b_W>0$

であり，総消費の密度関数は

$$g\left(W_T\right)=\frac{a_W\left(W_T-d_W\right)^{a_W p_W-1}\left[1-\left(1-c_W\right)\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}\right]^{q_W-1}}{b_W^{\,a_W p_W}B\left(p_W,q_W\right)\left[1+c_W\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}\right]^{p_W+q_W}} \tag{14a}$$

となる。ここで，$B\left(p_W,q_W\right)$は次式で定義されるベータ関数である。

$$B\left(p,q\right)=\int_0^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)},\quad p>0,q>0\ . \tag{14b}$$

W_T の台(support) は，$W_T\in\left[d_W,b_W\left(1-c_W\right)^{-1/a_W}+d_W\right]$であり，この密度関数で $d_W=0$ のときが，McDonald and Xu (1995)の(2.9)式に一致する。

一般化ベータ分布は，6 つのパラメター(a_W, b_W, c_W, d_W, p_W, q_W)を持つが，McDonald and Xu(1985)が示す通り，これらのパラメターを適宜設定することにより，第 1 種一般化ベータ分布(generalized beta of the first kind (GB1))，第 1 種ベータ分布(beta of the first kind (B1))，第 1 種逆ベータ分布(inverse beta of the first kind (IB1))，パレート分布(Pareto)，第 2 種一般化ベータ分布(generalized beta of the second kind (GB2))，第 2 種ベ

ータ分布(beta of the second kind (B2))，Singh-Maddala 分布, Fisk 分布 (対数ロジスティック分布)， Burr 3 型および 12 型分布(Burr type 3 and 12), F 分布，Rayleigh 分布，半正規分布(half-normal)，半スチューデント t 分布(half-Student's t)，Lomax 分布，Dagum 分布，逆 Lomax 分布，一般化ガンマ分布(generalized gamma)，ガンマ分布(gamma), カイ二乗分布 (χ^2)，指数分布(exponential)，対数正規分布(lognormal)，変換一般化ガンマ分布(translated inverse generalized gamma)，ガンマ分布(gamma)，べき分布(power)，一様分布(uniform)などがふくまれている。総消費が，上に列挙した確率分布のどれかに従うならば，その変換関数に対応したリスク回避的効用関数を想定することによって，以下で示す解析解をもつ派生証券評価が可能になる。

さて，総消費が一般化ベータ分布に従うとき，リスク回避的な代表的投資家の限界効用が，(10)式の具体例として，

$$U'(W_T)=\left[\frac{\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}}{1+c_W\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}}\right]^{-\gamma} \tag{15}$$

で表現されるとしてみよう。このとき，絶対的危険回避度を求めると，

$$ARA=\frac{a_W\gamma}{\left(W_T-d_W\right)\left[1+c_W\left(\dfrac{W_T-d_W}{b_W}\right)^{a_W}\right]} \tag{16}$$

であり，$\dfrac{\partial}{\partial W_T}ARA<0$ ゆえ DARA 型となる。また，$d_W=0$ のときは効用関数として解析解が存在し，

$$U(W_T)=\frac{{b_W}^{a_W\gamma}}{1-a_W\gamma}{W_T}^{1-a_W\gamma}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{a_W}-\gamma,-\gamma;1+\frac{1}{a_W}-\gamma;-c_W\left(\frac{W_T}{b_W}\right)^{a_W}\right) \tag{17a}$$

と記述できる。但し，${}_2F_1(\bullet,\bullet;\bullet;\bullet)$ はガウスの超幾何関数(hypergeometric series)であり，

Pochhammer の記法 $(\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)$ を用いて

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\cdot\frac{z^k}{k!} \tag{17b}$$

と定義される。この効用関数で，さらに $c_W=0$ とすると，超幾何関数は 1 に収束し

$$U(W_T)=\frac{{b_W}^{a_W\gamma}}{1-a_W\gamma}{W_T}^{1-a_W\gamma} \tag{18}$$

いう，相対的リスク回避度が $a_W\gamma(>0)$ のべき型効用関数に帰着することを確認できる。

以上，総消費の確率分布として変換ベータ分布を，代表的経済主体の選好として DARA 型効用関数を仮定してプライシング・カーネルおよび指標固有プライシング・

カーネルを導いた。このように仮定された不完備な経済において，派生証券契約の対象指標が極値分布に従う場合の派生証券を評価するのが本稿の目的であるが，その準備作業として，次セクションでは３つの型の極値分布について，これらを変換ベータ分布の特殊ケースとして位置づけておく。

3．変換ベータ分布としての極値分布

3.1 極値分布

極値理論の本格的研究は Fisher and Tippett (1928)，Gnedenko (1943)に遡るが，彼らは，極値分布には 3 つのタイプしかないことを証明している。詳細は他書に譲り，主要な結果のみ挙げておこう。[8]

定理 1 (Fisher-Tippett，Gnedenko の定理) 独立同一の確率分布に従う n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ について，その最大値を M_n とする。これを n に依存する定数の点列として，$\{a_n : a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で基準化した確率変数を

$$S_n \equiv \frac{M_n - b_n}{a_n}$$

とする。$n \to \infty$ のとき，

$$\Pr\left[S_n \le s\right] = \Pr\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \le s\right] \to G(s)$$

を満たす退化していない確率分布が存在するならば，$G(s)$ は次のどれかひとつになる。

I. グンベル(Gumbel)分布

$$G(s) = \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{s-\mu}{\sigma}\right\}\right\}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{19a}$$

II. フレシェ (Fréchet)分布

$$G(s) = \begin{cases} 0, & s < \mu \\ \exp\left\{-\left(\dfrac{s-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\}, & s \ge \mu \end{cases} \tag{19b}$$

III. ワイブル (Weibull)分布

$$G(s) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(-\dfrac{s-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\}, & s \le \mu \\ 1, & s > \mu \end{cases} \tag{19c}$$

但し，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma > 0$，$\alpha > 0$ である。これら 3 つのタイプの分布を極値分布とよぶ。

---

[8] 邦文では，高橋・志村(2016)が最新の包括的な結果を知るのに有用である。

定理１において，$\mu = 0$，$\sigma = 1$とした場合が，標準グンベル分布，標準フレシェ分布，標準ワイブル分布である。μ，σはこれらの確率分布の基準化のための母数であるが，本稿では後述するリスク中立確率の解釈において，ドリフト，ボラティリティとよぶ。

元の確率変数$X_1, X_2, \cdots, X_n$と 3 種の極値分布との対応関係であるが，元の確率変数が指数的に減衰する裾をもつとき，漸近分布はグンベル分布になる。正規分布，対数正規分布，指数分布，ガンマ分布，カイ二乗分布などが含まれる。元の分布は，グンベル分布あるいは標準ワイブル分布でもよい。これらの漸近分布がグンベル分布となる分布の特徴は，すべての次数について期待値が存在することである。

元の確率変数がべき乗的に減衰する裾をもつとき，漸近分布はフレシェ分布になる。例えば，パレート分布，コーシー分布，t 分布，F 分布，逆ガンマ分布，対数ガンマ分布などである。これらの分布の特徴は，裾の減衰を記述するパラメター$\alpha \equiv 1/\xi$（裾指数）を超える次数では期待値が発散することである。

最後に，元の確率変数の分布関数が一様分布，ベータ分布などのように有限範囲の台で定義されるときには，漸近分布はワイブル分布になる。これらの分布は，すべての次数について期待値が存在する特徴がある。[9]

以上 3 種の確率分布について，分布関数の変数sを以下で利用する変数S_Tに置き換えたうえで密度関数を求めると次の通りである。(S_Tは期末 T における対象指標の水準を表す。)

I. グンベル分布 $$g(S_T) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right\}\exp\left\{-\exp\left\{-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right\}\right\},\quad S_T \in \mathbb{R} \tag{20a}$$

II. フレシェ分布 $$g(S_T) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\},\quad S_T \geq \mu \tag{20b}$$

III.ワイブル分布 $$g(S_T) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\},\quad S_T \leq \mu \tag{20c}$$

---

[9]これら 3 種の極値分布の分布関数は，von Mises (1936, 1954)によって，次式で統一的に表現できることが示されている。

$$G(S_T) = \exp\left\{-\left(1+\xi\left(\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right\},\quad -\infty < \xi < \infty$$

ただし，$\left\{S_T : 1+\xi\left(S_T-\mu\right)/\sigma > 0\right\}$とする。上式で定義された確率分布を，一般極値分布 (generalized extreme value distribution)とよぶ。3 つのタイプの極値分布との関係は，$\xi < 0$のときワイブル分布 ，$\xi = 0$のときグンベル分布 ，$\xi > 0$のときフレシェ分布であり，$\xi(=1/\alpha)$を形状母数とよぶ。

3.2 変換ベータ分布としての極値分布

Ikeda(2010)は，総消費と対象資産・対象指数が２変量の変換ベータ分布に従うときのプライシング・カーネルを導出しているが，極値分布も変換ベータ分布の特殊ケースと位置付けることができる。Ikeda(2010)の結果を利用するために，以下では３種の極値分布について，ベータ分布への変換ルールを特定する。

まず，(7b)式の結果を再掲しよう。S_Tを厳密に単調かつ微分可能な関数$h(\bullet)$によっ変換した確率変数が，ベータ分布$h(S_T) \sim Beta(p,q)$に従うとき，変換される前の確率S_Tが従う確率分布を変換ベータ分布とよび，その密度関数は，

$$g(S_T) = \left|h'(S_T)\right| \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left[h(S_T)\right]^{p-1} \left[1-h(S_T)\right]^{q-1} \quad [(7b)]$$

であった。いま，$p=1$の場合について上式を書きなおすと

$$g(S_T) = \left|h'(S_T)\right| q \left[1-h(S_T)\right]^{q-1} \quad (21)$$

となる。さらに(21)式において，変換関数$h(S_T)$を次のように設定すると，3 種類の極値分布密度(20a), (20b), (20c)に一致することを容易な計算で確かめることができる。

I. グンベル分布 $h(S_T) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{q}\exp\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)\right\}$, (22a)

II. フレシェ分布 $h(S_T) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{q}\exp\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\}$, (22b)

III.ワイブル分布 $h(S_T) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\}$ (22c)

3.3 極値分布の指標固有プライシング・カーネルとリスク中立確率

3 種類の極値分布について，変換関数$h(S_T)$が明らかにできたので，補助定理 2 を用いると，対象指標固有のプライシング・カーネルを導出できる。以下に補助定理 3 として結果をまとめておく。

補助定理 3　期末の総消費W_Tが変換ベータ分布，派生証券の対象資産あるいは対象指標S_Tが極値分布に従い，代表的経済主体の効用関数が(10)式を満たす限界効用で特徴づけられるならば，対象指標固有のプライシング・カーネルは，

I. グンベル分布　$\psi(S_T)=\exp\left\{\frac{\gamma}{q}e^{\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)}\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\right\}$ (23a)

II. フレシェ分布　$\psi(S_T)=\exp\left\{\frac{\gamma}{q}\left(\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\}\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)$ (23b)

III.ワイブル分布　$\psi(S_T)=\exp\left\{\frac{\gamma}{q}\left(-\frac{S_T-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\}\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)$ (23c)

で与えられる。

証明　補助定理 2 において $p=1$ とおき，各極値分布について，変換関数を(12)式へ代入する。■

定理 2 期末の総消費 W_T が変換ベータ分布，派生証券の対象資産あるいは対象指標 S_T が極値分布に従い，代表的経済主体の効用関数が(10)式の限界効用で特徴づけられるならば，対象指標のリスク中立確率 $\hat{g}(S_T)$ は

I. グンベル分布　$\hat{g}(S_T)=\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{S_T-\hat{\mu}}{\sigma}\right\}\exp\left\{-\exp\left\{-\frac{S_T-\hat{\mu}}{\sigma}\right\}\right\}$，$S_T\in\mathbb{R}$ (24a)

但し　$\hat{\mu}=\mu+\sigma\ln\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)$

II. フレシェ分布　$\hat{g}(S_T)=\frac{\alpha}{\hat{\sigma}}\left(\frac{S_T-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{S_T-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right\}$，$S_T\geq\mu$， (24b)

但し　$\hat{\sigma}=\sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

III.ワイブル分布　$\hat{g}(S_T)=\frac{\alpha}{\hat{\sigma}}\left(-\frac{S_T-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(-\frac{S_T-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right\}$，$S_T\leq\mu$， (24c)

但し　$\hat{\sigma}=\sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$

で与えられる。

証明　$\hat{g}(S_T)=\psi(S_T)g(S_T)$ を求める。■

定理 2 の 3 種の分布のリスク中立確率を，観測確率(20a)，(20b)，(20c)式と見比べる

とフレシェ分布とワイブル分布については，ボラティリティの母数σがリスク回避度に応じて修正されており，$0<1-\left(\gamma/q\right)<1$ゆえリスク回避の程度$\gamma$が大きいほどフレシェ分布ではボラティリティが拡大され，ワイブル分布ではボラティリティが縮小されている。また，グンベル分布ではボラティリティは変わらないが，ドリフトμが修正され，$\ln\left(1-\left(\lambda/q\right)\right)<0$ゆえ，ドリフトはリスク回避$\gamma$およびボラティリティ$\sigma$が大きいほど，下方へ調整されることになる。

よく知られているように，Black and Scholes (1973)が対象資産プロセスとして前提する幾何ブラウン運動ではその瞬間的な投資収益率は正規分布に従い，その平均パラメター（ドリフト）が無リスク利子率に等しくなるようにリスク中立確率上で修正が施される。この現象は，Rubinstein(1976)の一般均衡モデルが明らかにしたように，べき型効用で特徴付けられる代表的経済主体のリスク回避度に応じたリスクプレミアムの調整が対象資産価格上で行われ，リスク中立確率上では期待収益率からあたかもリスクプレミアムが消失したように見えるというものであった。本稿においても，べき型効用を特殊ケースとして含むリスク回避的な効用関数を代表的経済主体に仮定しているが，対象指標が極値分布に従うときには，リスク中立確率上では，グンベル分布以外ではドリフトではなく，ボラティリティの方が修正を受けるという際立った特徴があることが明らかになった。

4. 大地震発生リスク対する派生証券評価

4.1 大地震発生リスク対する先物契約

地震やその他の自然現象について契約されるデリバティブが対象とする変数や指標は，売買することは不可能である。しかし，これらの変数や指標に対する種々の先物，先渡契約が現実に取引されている。例えば，1992 年には，シカゴ商品取引所(CBOT)は，保険会社が地震，ハリケーン等の自然災害に対して支払った損害率を指標化したキャタストロフィー指数に対する先物（キャタストロフィー保険先物）を上場した。また，2002 年には米国のシカゴマーカンタイル取引所(CML)は，米国 15 都市の気温という売買不可能な変数について，低気温(CDD)と高気温(HDD)を指標化し，これらに対する先物契約を上場している。

現在，地震の最大マグニチュードあるいはそれを指数化したインデクスに対する先物市場は存在しないが，企業価値や個人のリスク管理に役立つならば，森平(2012)が予測するように，資本市場は今後も果敢に大災害リスクに新たな商品開発を通じて立ち向かっていくものと思われる。そこで以下では地震の最大マグニチュードあるいはそれを指数化したインデクスの先物価格が観測可能な状況を想定して分析を進めるこ

とにする。[10]

いま，無リスク利子率が変動しない 1 期間モデルを考え，その物理的時間を T 年とする。特定地域において，T 年間の期間で観測される最大マグニチュードあるいはこれを指標化したインデクスについて，限月が T 年後の先物の理論価格は，(5)式を用いて計算することができる。次の命題 1 は，地震の最大マグニチュードも含め，対象指標が極値分布に従う場合をまとめたものである。

命題 1　極値分布に従う対象指数について，限月が T 年後の先物価格は，

I. 対象指数がグンベル分布に従う場合

$$F = \mu + \sigma\left[\gamma^* + \ln\left(1 - \frac{\gamma}{q}\right)\right] \tag{25a}$$

但し，$\gamma^* \equiv -\Gamma'(1) \approx 0.57721566$ は Euler-Mascheroni 定数。

II. 対象指数がフレシェ分布に従う場合

$$F = \mu + \sigma\left(1 - \frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{25b}$$

III. 対象指数がワイブル分布に従う場合

$$F = \mu - \sigma\left(1 - \frac{\gamma}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{25c}$$

である。

証明　付録 A を見よ。■

先物市場において対象指標に関する先物契約が取り引きされ，先物価格 F が観測可能であるならば，命題 1 の結果を用いて代表的経済主体のリスク回避パラメーター γ を F の明示的な関数として表すことができる。そこで，定理 2 で導出したリスク中立確率から γ を消去すると，Black and Sholes (1973)の動学的完備市場モデルと同様に，リスク選好パラメーターを含まないリスク中立確率を求めることができる。

---

[10] 以下でとりあげる地震デリバティブは，定められた期間中における最大マグニチュードに対する派生証券である。他に，地震等の大規模自然災害により生じた損害を指標化したPCSなどのインデクスに対する派生証券も開発されている。Abdessalem and Onishi (2014)は，PCSインデクスに対するコールオプションを極値理論を利用して評価している。

定理 3 期末の総消費W_Tが変換ベータ分布，派生証券の対象資産あるいは対象指標S_Tが極値分布に従い，代表的経済主体の効用関数が(10)式の限界効用で特徴づけられるとする。対象指標について，限月がT年後に設定された先物価格が観測可能であり，Fであるとするならば，対象指標のリスク中立確率$\hat{g}\left(S_T\right)$は

I. グンベル分布

$$\hat{g}\left(S_T\right)=\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{S_T-F}{\sigma}-\gamma^*\right\}\exp\left\{-\exp\left\{-\frac{S_T-F}{\sigma}-\gamma^*\right\}\right\},\quad S_T\in\mathbb{R} \tag{26a}$$

但し　$\gamma^*\approx 0.57721566$

II. フレシェ分布

$$\hat{g}\left(S_T\right)=\frac{\alpha}{S_T-\mu}\left(\frac{F-\mu}{S_T-\mu}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\alpha}\exp\left\{-\left(\frac{F-\mu}{S_T-\mu}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\alpha}\right\},\quad S_T\geq\mu, \tag{26b}$$

III.ワイブル分布

$$\hat{g}\left(S_T\right)=\frac{\alpha}{\mu-S_T}\left(\frac{\mu-S_T}{\mu-F}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\alpha}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-S_T}{\mu-F}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\alpha}\right\},\quad S_T\leq\mu, \tag{26c}$$

で与えられる。

証明　命題 1 の結果をリスク選好パラメターγについて表し，定理 2 のリスク中立確率に代入，消去する。■

定理 3 を用いれば，対象指標自体が売買不可能な不完備な市場であっても，リスク選好パラメターに依存しない派生証券の均衡価格式を導出できる。以下では，具体的な応用例として地震の最大マグニチュードに依存してペイオフが定まる CAT 債とコールオプション評価式を導出する。

4.2 地震発生リスクに対する債券(CAT Bond)の評価

地震発生リスクに対して契約される大災害債券(catastrophe bond:CAT bond)には種々あるが，典型的には，大地震が発生した時には利子，額面の支払いが減額あるいは猶予されるタイプの債券が多い。例えば，Zimbidis, Frangos, and Pantelous (2007)が評価した満期 5 年の CAT 債券のペイオフは，同論文(2.3.4)式によれば次のような構造をもつ。まず，クーポン支払は，第t年度中に観測される最大マグニチュードをM_tとすると，

$$C_t=\begin{cases}K\cdot 3R, & \text{if}\quad M_t\in\left[0,5.4\right]\\ K\cdot 2R, & \text{if}\quad M_t\in(5.4,5.8]\\ K\cdot R, & \text{if}\quad M_t\in(5.8,6.2]\\ 0, & \text{if}\quad M_t\in(6.2,\infty]\end{cases},\quad t=1,2,3,4,5 \tag{27a}$$

であり，最大マグニチュードが大きいほどクーポンレートは減免されて，6.2 を超える

大地震発生のときにはクーポン支払は無しとなる。満期における額面の償還については,

$$K_5 = \begin{cases} K, & \text{if} \quad M_5 \in [0, 6.6] \\ (2/3)K, & \text{if} \quad M_5 \in (6.6, 7.0] \\ (1/3)K, & \text{if} \quad M_5 \in (7.0, 7.4] \\ 0, & \text{if} \quad M_5 \in (7.4, \infty] \end{cases}, \tag{27b}$$

であり，最終年度に大きな地震がおきるほど償還額が減免され，マグニチュードが 7.4 を超える大地震発生のときには全額償還額は減免される仕組みになっている。

Zimbidis, Frangos, and Pantelous (2007)は，ギリシアの実際の観測データを用いて，M の確率分布としてワイブル分布を用いて CAT 債券の価格を数値計算しているが，その際に用いている確率はリスク中立確率ではなく，観測確率をそのまま用いて期待値計算を行い，無リスク利子率にリスクプレミアムとして機械的に 5%を上乗せした期待収益率を用いて期待値を割り引いて現在価値を算定している。この 5%が地震リスクに対する市場のプレミアムであるが，なぜそのような水準を仮定できるのか，全く言及がないことは致命的な問題である。

以下では N 年の満期をもつ，額面が K，クーポンレートが R の CAT 債を評価するが，そのペイオフとして，彼らより簡易に次のように設定する。

$$C_t = \begin{cases} K \cdot R, & \text{if} \quad M_t \in (0, m_1] \\ 0 & \text{if} \quad M_t \in (m_1, \infty] \end{cases}, \quad t = 1, \cdots, N \tag{28a}$$

$$K_N = \begin{cases} K, & \text{if} \quad M_N \in (0, m_2] \\ 0 & \text{if} \quad M_N \in (m_2, \infty] \end{cases} \tag{28b}$$

償還までは，各年度に生じた地震の最大マグニチュードが m_1 以下なら利子は全額支払い，最大マグニチュードがそれ以上であれば利子は全額減免する。同様に満期には，第 N 年度における地震の最大マグニチュードが m_2 を超えるならば元本の返済は行わないとすることで，典型的な CAT 債の特徴を捉えている。

命題 2　極値分布に従う対象指数について，(28a)(28b)式のペイオフをもつ，額面 K 円，満期 N 年 ，クーポンレート R の CAT 債券の現在価値は以下の通りである。なお，無リスク利子率 r_f (連続複利表示)は一定と仮定する。

I. 対象指数がグンベル分布に従う場合

$$P = KR \cdot \exp\left\{-\exp\left\{\frac{F - m_1}{\sigma} - \gamma^*\right\}\right\} \cdot \frac{e^{-r_f}\left(1 - e^{-Nr_f}\right)}{1 - e^{-r_f}}$$
$$+ e^{-Nr_f} K \cdot \exp\left\{-\exp\left\{\frac{F - m_2}{\sigma} - \gamma^*\right\}\right\} \tag{28a}$$

但し　$\gamma^* \approx 0.57721566$

II. 対象指数がフレシェ分布に従う場合

$$P = KR \cdot \exp\left\{-\left(\frac{m_1-\mu}{F-\mu}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-\alpha}\right\} \cdot \frac{e^{-r_f}\left(1-e^{-Nr_f}\right)}{1-e^{-r_f}}$$

$$+e^{-Nr_f} K \cdot \exp\left\{-\left(\frac{m_2-\mu}{F-\mu}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-\alpha}\right\} \tag{28b}$$

但し $m_1, m_2 \geq \mu$　を仮定する。

III. 対象指数がワイブル分布に従う場合

$$P = KR \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu-m_1}{\mu-F}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\alpha}\right\} \cdot \frac{e^{-r_f}\left(1-e^{-Nr_f}\right)}{1-e^{-r_f}}$$

$$+e^{-Nr_f} K \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\mu-m_2}{\mu-F}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\alpha}\right\} \tag{28c}$$

但し $m_1, m_2 \leq \mu$　を仮定する。

証明　付録 B を見よ。■

4.3 地震発生リスクに対するコールオプションの評価

現在のところ，未だ最大マグニチュードを対象指数とするオプション契約は開発されていないようであるが，リスク中立確率が得られたので，以下のように容易にそのプレイミアムを算定することができる。

命題 3　無リスク利子率 r_f が一定で，対象指数が極値分布に従うとする。その先物価格 F が観測できるとき，権利行使価格(指標)が X, 満期が T 後のヨーロッパ型コールオプションのプレミアムは以下の通りである。[11]

I. 対象指数がグンベル分布に従う場合

$$C = e^{-r_f T} F + e^{-r_f T}\sigma\left[\Gamma\left(0, \exp\left\{\frac{F-X}{\sigma}-\gamma^*\right\}\right) + \left(\frac{F-X}{\sigma}-\gamma^*\right)\exp\left\{-\exp\left\{\frac{F-X}{\sigma}-\gamma^*\right\}\right\}\right]$$

---

[11] これらの評価式には $e^{-r_f T}F$ という先物価格を無リスク利子率で割り引いた項が現れる。対象とする指標が売買可能な資産あるいはそれに対応した指標の場合には，$e^{-r_f T}F = S$ が成立し，当該資産・指標の現在の価格・値に一致する。しかし，地震のマグニチュードのように，それ自体売買が不可能な指標の場合には、現在の指標の値 S はその将来の値 S_T の現在価値にはなっていないので，この関係は成立しない。

$$-e^{-r_f T} X\left[1-\exp\left\{-\exp\left\{\frac{F-X}{\sigma}-\gamma^*\right\}\right\}\right] \tag{29a}$$

但し，$\gamma^* \approx 0.57721566$

II. 対象指数がフレシェ分布に従う場合

$$C = e^{-r_f T}\left[\mu+\left(F-\mu\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha},\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\cdot\frac{F-\mu}{X-\mu}\right]^{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right]-X\exp\left\{-r_f T-\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\cdot\frac{F-\mu}{X-\mu}\right]^{\alpha}\right\} \tag{29b}$$

III. 対象指数がワイブル分布に従う場合

$$C = e^{-r_f T}F + e^{-r_f T}\left(\mu-F\right)\left[1-\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha},\left[\frac{\mu-X}{\mu-F}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right]$$

$$-e^{-r_f T} X\left[1-\exp\left\{-\left[\frac{\mu-X}{\mu-F}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{\alpha}\right\}\right] \tag{29c}$$

但し，$\Gamma\left(a,x\right)\equiv\int_x^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$ は第 2 種不完全ガンマ関数である。

証明　付録 C を見よ。■

対象指数がグンベル分布に従う場合のコールオプション評価式を見ると，代表的経済主体のリスク回避パラメターγが消失しているだけでなく，ドリフトを表すμも現れない特徴があるが，これらのパラメターは先物価格Fに反映され，見かけ上は消失して見える Heston(1993)が言うところの"missing parameters"になっている。対象指数がフレシェ分布およびワイブル分布に従うときには，評価式にはリスク回避パラメターγは現れないものの，ドリフトパラメターは消失しない。かわりにボラティリティーを表すσが消失しているが，フレシェ分布およびワイブル分布においてリスク中立確率上でリスク調整の役割を担うのがμではなくσであったことを思い起こせば，評価式の解釈は容易であろう。

5．結論

本稿は，Ikeda(2010)において提示された，総消費および派生証券の対象収益・対象指標が２変量変換ベータ分布に従う場合の代表的経済主体モデルを用いて，対象収益・対象指標が従う確率分布が，すべてのタイプの極値分布，すなわち，グンベル分布，フレシェ分布，ワイブル分布について，対象指標固有プライシング・カーネル，リスク中立確率を導出した。さらに，当該指標に対する先物価格が観測可能な場合に，代表的経済主体のリスク回避度を含まないリスク中立確率を導出し，Black-Schole の評価式同様に，リスク選好パラメターおよびリスク調整されたドリフトあるいはボラティリティを含まない CAT 債券，およびヨーロッパ型コールオプションの評価式を導出した。

提示された評価式は，特定地域の特定期間における地震の最大マグニチュードを対象指標とする大地震デリバティブを想定したものであるが，対象指標が極値分布で記述できるような天候デリバティブ，例えば最大降雨量，最大積雪量，最高気温，最高湿度，最大風速などに対するデリバティブについても成立する評価式である。また最小値に対する契約についてはとりあげなかったが，最大値にマイナス符号をつけ，適宜変数を読みかえることによって，本稿で示した分析方法をそのまま適用することができる。

付録 A　命題 1 の証明

I. 対象指標がグンベル分布に従う場合

高橋・志村(2016, p.23)によれば，標準グンベル分布を $\tilde{x}$ とすると，これは標準指数分布 $\tilde{\varepsilon}$ を用いて $\tilde{x}=-\ln\tilde{\varepsilon}$ と表すことができる。いま，リスク中立確率のもとで対象指標は

$$S_T=\hat{\mu}+\sigma\tilde{x}=\hat{\mu}+\sigma\left(-\ln\tilde{\varepsilon}\right) \tag{A1}$$

と表せる。S_T の積率母関数を，標準指数分布の確率密度が $g(\varepsilon)=e^{-\varepsilon}$ であることを用いて求めると

$$\begin{aligned}
M(t)&=\hat{E}\left[e^{t\left[\hat{\mu}+\sigma\left(-\ln\tilde{\varepsilon}\right)\right]}\right]=e^{t\hat{\mu}}\hat{E}\left[\tilde{\varepsilon}^{-\sigma t}\right]\\
&=e^{t\hat{\mu}}\int_0^\infty\varepsilon^{-\sigma t}e^{-\varepsilon}d\varepsilon=e^{t\hat{\mu}}\int_0^\infty\varepsilon^{(-\sigma t+1)-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon\\
&=e^{t\hat{\mu}}\Gamma\left(1-\sigma t\right)
\end{aligned} \tag{A2}$$

となる。$\Gamma(\bullet)$ はガンマ関数である。先物価格は $F=\hat{E}\left[S_T\right]$ ゆえ 1 次積率を求めると

$$\begin{aligned}
\hat{E}\left[S_T\right]&=\frac{d}{dt}M(t)\Big|_{t=0}=\hat{\mu}e^{t\hat{\mu}}\Gamma\left(1-\sigma t\right)-\sigma e^{t\hat{\mu}}\Gamma'\left(1-\sigma t\right)\Big|_{t=0}=\hat{\mu}\cdot\Gamma(1)-\sigma\cdot\Gamma'(1)\\
&=\hat{\mu}+\gamma^*\sigma,\quad \gamma^*\equiv-\Gamma'(1)\\
&=\mu+\sigma\left[\gamma^*+\ln\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\right]\quad\left[\because\hat{\mu}=\mu+\ln\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\right]
\end{aligned} \tag{A3}$$

を得る。上式にはガンマ関数を微分した値 $\Gamma'(1)$ が現れるが，その値は収束することが知られており，$-\Gamma'(1)\approx 0.57721566$ を Euler-Mascheroni 定数とよぶ。上式では同定数を，リスク回避度と区別するため，アステリスクを付して $\gamma^*\equiv-\Gamma'(1)$ と表している。

II. 対象指標がフレシェ分布に従う場合

標準フレシェ分布を $\tilde{x}$ とすると，これは標準指数分布 $\tilde{\varepsilon}$ を用いて $\tilde{x}=\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{\alpha}}$ と表すことができる。したがって，リスク中立確率のもとで対象指標は

$$S_T=\mu+\hat{\sigma}\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{A4}$$

と表すことができる。先物価格はこの期待値ゆえ

$$\hat{E}[S_T] = \mu + \hat{\sigma}\hat{E}\left[\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{\alpha}}\right] = \mu + \hat{\sigma}\int_0^\infty \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\varepsilon} d\varepsilon = \mu + \hat{\sigma}\int_0^\infty \varepsilon^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)-1} e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

$$= \mu + \hat{\sigma}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \mu + \sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \quad \left[\because \hat{\sigma} = \sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \tag{A5}$$

となる。

III.　対象指標がワイブル分布に従う場合

標準ワイブル分布$\tilde{x}$は，標準指数分布$\tilde{\varepsilon}$を用いて$\tilde{x} = -\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}}$と表すことができるので，

$$S_T = \mu + \hat{\sigma}\tilde{x} = \mu + \hat{\sigma}\left(-\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}}\right) \tag{A6}$$

について、リスク中立確率によって期待値を求めると

$$\hat{E}[S_T] = \mu + \hat{\sigma}\hat{E}\left[-\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \mu - \hat{\sigma}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\varepsilon} d\varepsilon = \mu - \hat{\sigma}\int_0^\infty \varepsilon^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-1} e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

$$= \mu - \hat{\sigma}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \mu - \sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \quad \left[\because \hat{\sigma} = \sigma\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right] \tag{A7}$$

を得る。■

付録 B　命題 2 の証明

クーポン債の評価ゆえ，定理 3 で導いたリスク中立確率を利用して，N 個のクーポンと満期に償還される額面の現在価値の合計として

$$P = \sum_{t=1}^{N} e^{-r_f t}\hat{E}[C_t] + e^{-r_f N}\hat{E}[K_N] \tag{A8}$$

を求める。ここで第 t 年度のクーポンの期待値は$\hat{E}[C_t] = KR\cdot\hat{\Pr}(M_t < m_1)$，償還額面の期待値は$\hat{E}[K_N] = K\cdot\hat{\Pr}(M_N < m_2)$であるから，

$$P = \sum_{t=1}^{N} e^{-r_f t} KR\cdot\hat{\Pr}(M_t < m_1) + e^{-r_f N} K\cdot\hat{\Pr}(M_N < m_2)$$

$$= KR \cdot \hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right)\frac{e^{-r_f}\left(1-e^{-Nr_f}\right)}{1-e^{-r_f}} + e^{-r_f N} K \cdot \hat{\Pr}\left(M_N < m_2\right) \tag{A9}$$

となる。上式においてリスク中立確率 $\hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right)$ および $\hat{\Pr}\left(M_N < m_2\right)$ は，定理 1 で示した 3 種の極値分布の分布関数によって評価できるので，

I. 対象指標がグンベル分布に従う場合

$$\hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right) = \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{m_1 - \hat{\mu}}{\sigma}\right\}\right\}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{A10a}$$

II. 対象指標がフレシェ分布に従う場合

$$\hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right) = \exp\left\{-\left(\frac{m_1 - \mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right\}, \qquad m_1 \geq \mu \tag{A10b}$$

III. 対象指標がワイブル分布に従う場合

$$\hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right) = \exp\left\{-\left(-\frac{m_1 - \mu}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right\}, \qquad m_1 \leq \mu \tag{A10c}$$

となる。なお，ここで $\{M_1, M_2, \cdots, M_t\}$ は独立同一の分布に従い，簡単化のため 1 期間を T=1 年と仮定している。$\hat{\Pr}\left(M_N < m_2\right)$ については，$\hat{\Pr}\left(M_t < m_1\right)$ の m_1 を m_2 に読みかえ，これらの結果を(A9)式へ代入する。■

付録 C　命題 3 の証明

コールオプションのプレミアムは，リスク中立確率密度を用いて，

$$C = e^{-r_f T}\hat{E}\left[S_T \middle| S_T \geq X\right]\hat{\Pr}\left[S_T \geq X\right] - e^{-r_f T} X \cdot \hat{\Pr}\left[S_T \geq X\right] \tag{A11}$$

によって導出できる。

I. 対象指数がグンベル分布に従う場合

命題 1 の証明と同様に標準指数分布 $\tilde{\varepsilon}$ を用いると，対象指数は(A1)式，即ち

$$S_T = \hat{\mu} + \sigma\left(-\ln\tilde{\varepsilon}\right)$$

と表すことができるので，(A11)式右辺第 1 項の条件付き期待値部分は

$$\hat{E}\left[S_T \middle| S_T \geq X\right]\hat{\Pr}\left[S_T > X\right] = \hat{\mu} - \sigma\hat{E}\left[\ln\tilde{\varepsilon} \middle| \tilde{\varepsilon} \leq \exp\left\{\frac{\hat{\mu} - X}{\sigma}\right\}\right]\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon} \leq \exp\left\{\frac{\hat{\mu} - X}{\sigma}\right\}\right]$$

を求めればよい。ここで，標準指数分布は任意の k(>0)について

$$E\left[\ln\tilde{\varepsilon}\middle|\tilde{\varepsilon}\le k\right]\Pr\left[\tilde{\varepsilon}\le k\right]=\int_0^k\left(\ln\varepsilon\right)e^{-\varepsilon}d\varepsilon$$

$$=\int_0^\infty\left(\ln\varepsilon\right)e^{-\varepsilon}d\varepsilon-\int_k^\infty\left(\ln\varepsilon\right)e^{-\varepsilon}d\varepsilon$$

$$=-\gamma^*-\left[\left(\ln k\right)e^{-k}+\int_k^\infty\varepsilon^{-1}e^{-\varepsilon}d\varepsilon\right]$$

$$=-\gamma^*-\Gamma\left(0,k\right)-\left(\ln k\right)e^{-k} \tag{A12}$$

となる性質がある。ここでγ^*は Euler-Mascheroni 定数，$\Gamma\left(\bullet,\bullet\right)$は第 2 種不完全ガンマ関数であり$\Gamma\left(a,x\right)\equiv\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$と定義される。したがって，(A11)式の条件付き期待値部分は

$$\hat{E}\left[S_T\middle|S_T\ge X\right]\hat{\Pr}\left[S_T>X\right]=\hat{\mu}+\sigma\left[\gamma^*+\Gamma\left(0,k\right)+\left(\ln k\right)e^{-k}\right],\quad k\equiv e^{\frac{\hat{\mu}-X}{\sigma}} \tag{A13}$$

となる。

次に(A11)式右辺の第 2 項の確率は

$$\hat{\Pr}\left[S_T\ge X\right]=\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}\le k\equiv e^{\frac{\hat{\mu}-X}{\sigma}}\right]=\int_0^k e^{-\varepsilon}d\varepsilon=1-e^{-k}$$

$$=1-\exp\left\{-\exp\left\{\frac{\hat{\mu}-X}{\sigma}\right\}\right\} \tag{A14}$$

となるので，(A13)，(A14)式を(A11)式へ代入し，$\hat{\mu}=F-\sigma\gamma^*$を代入してリスク選好パラメターを消去すると証明すべき本文(29a)式を得る。

II. 対象指数がフレシェ分布に従う場合

対象指数は，(A4)式が示す通り標準指数分布$\tilde{\varepsilon}$を用いて

$$S_T=\mu+\hat{\sigma}\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

と表すことができる。これを用いて(A11)式を求める。

(A11)式の条件付き期待値部分は

$$\hat{E}\left[S_T\middle|S_T\ge X\right]\hat{\Pr}\left[S_T\ge X\right]=\mu+\hat{\sigma}\hat{E}\left[\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{\alpha}}\mid\tilde{\varepsilon}\ge\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right]\cdot\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}\ge\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right]$$

$$=\mu+\hat{\sigma}\int_{\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)}^\infty\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}e^{-\varepsilon}d\varepsilon$$

$$=\mu+\hat{\sigma}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha},\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right) \tag{A15}$$

となる。

(A11)式右辺の第 2 項の確率は

$$\hat{\Pr}\left[S_T\geq X\right]=\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}\geq k\equiv\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right]=1-\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}<k\right]=e^{-k}$$

$$=\exp\left\{-\left(\frac{X-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^{-\alpha}\right\} \tag{A16}$$

となるので，(A15)，(A16)式を(A11)式へ代入し，さらに$\hat{\sigma}=\dfrac{F-\mu}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$を代入すると本文(29b)式を得る。

III. 対象指数がワイブル分布に従う場合

対象指数は，(A6)式が示す通り標準指数分布$\tilde{\varepsilon}$を用いて

$$S_T=\mu+\hat{\sigma}\left(-\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

と表すことができる。これを用いて(A11)式を求める。

(A11)式の条件付き期待値部分は

$$\hat{E}\left[S_T\middle|S_T\geq X\right]\hat{\Pr}\left[S_T\geq X\right]=\mu-\hat{\sigma}\hat{E}\left[\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{\alpha}}\mid\tilde{\varepsilon}\leq\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right]\cdot\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}\leq\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right]$$

$$=\mu-\hat{\sigma}\left[\int_0^{\infty}\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\varepsilon}d\varepsilon-\int_{\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}}^{\infty}\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\varepsilon}d\varepsilon\right]$$

$$=\mu-\hat{\sigma}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha},\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right)\right] \tag{A17}$$

となる。

(A11)式右辺の第 2 項の確率は

$$\hat{\Pr}\left[S_T\geq X\right]=\hat{\Pr}\left[\tilde{\varepsilon}\leq k\equiv\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right]=1-e^{-k}$$

$$=1-\exp\left\{-\left(\frac{\mu-X}{\hat{\sigma}}\right)^{\alpha}\right\} \tag{A18}$$

となる。(A17)，(A18)式を(A11)式へ代入し，さらに$\hat{\sigma} = \dfrac{F-\mu}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$を代入すると本文(29c)式を得る。■

[引用文献]

池田昌幸，2000，『金融経済学の基礎』，朝倉書店.

高橋倫也・志村隆彰, 2016, 『極値統計学』，近代科学社。

森平爽一郎, 2012,「大災害のリスクファイナンス」SAS ユーザー総会講演配布資料。

Abdessalem, M.B. and M. Ohnishi, 2014, "Catastrophe Risk Derivatives: A New Approach," *Journal of Mathematical Finance*, 4, 21-34.

Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Brennan, M., 1979, "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models," *Journal of Finance*, 34, 53-68.

Camara, A., 2003, "A Generalization of the Brennan-Rubinstein Approach for the Pricing of Derivatives," *Journal of Finance*, 58, 805-821.

Embrechts,P., C.Klupperlberg, and T.Mikosch, 1997, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.

Fisher,R.A. and L.H.C.Tippett, 1928,"Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample," *Mathematical Prioceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180-190.

Gnedenko, B.V., 1943, " Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire," *Annals of Mathematics*, Second Series, 44, 423-453.

Heston, S.L.,1993,"Invisible Parameters in Option Prices," *Journal of Finance*, 58, 933-947.

Ikeda, M., 2010, "Equilibrium Preference Free Pricing of Derivatives under the Generalized Beta Distributions," *Review of Derivatives Research* , 13, 297–332.

Kotz, S. , N. Balakrishnan, and N.L Johnson, 2000, *Continuous Multivariate Distributions, Vol.1: Models and Applications*, Second Edition, John Wiley &Sons, N.Y.

Markose, S. and A.Alentorn, 2011," The Generalized Extreme Value Distribution, Implied Tail Index, and Option Pricing," *Journal of Derivatives*, 18, 35-60.

McDonald, J.B. and Y. J. Xu, 1995, "A Generalization of the Beta Distribution with Applications," *Journal of Econometrics*, 66, 133-152.

Negishi, T., 1960, "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica*, 12, 92-97.

Poon,S and R.Stapleton, 2005, *Asset Pricing Theory: a Discrete Time, Complete Markets Approach*, oxford University Press.

Rubinstein, M., 1976, "The Valuation of uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 7, 407-425.

Vitiello, L. and S.H.Poon, 2008, "General Equilibrium and Preference Free Model for Pricing Options under Transformed Gamma Distribution," *Journal of Futures Markets*, 30, 409-431.

Zimbidis,A.A., N.E. Frangos, and A.A.Pantelous, 2007, "Modeling Earthquake Risk Vis Extreme Value Theory and Pricing the Respective Catastrophe Bonds," *Astin Bulletin*, 37, 163-183.