

業績の平均回帰性と最適契約期間

鈴木 孝則

概 要

本稿は、業績指標が平均回帰性（パラメータ a ）を持つ動学的なプリンシパル・エイジェント関係において、時間割引率（ $r > 0$ ）を考慮した場合の最適契約期間（ T^* ）を理論的に分析する。連続時間モデルとオルンシュタイン・ウーレンベック過程を用い、プリンシパルが期間と線形契約のインセンティブ率を同時に最適化する問題を解いた。その結果、有限な最適期間 T^* が存在し、 T^* は平均回帰性が弱い（ a が小さい）ほど長くなり、割引率 r が低いほど長くなることが比較静学により示された。また、最適インセンティブ率も期間に対し一峰性を示した。本研究は、KPIの持続性や組織の時間選好が、客観的な業績評価期間の設計に与える影響を解明し、管理会計実務への理論的根拠を提供する。

Keywords: 最適契約期間, 動学エイジェンシー理論, 平均回帰, 連続時間モデル, 時間割引

Performance Mean Reversion and Optimal Contract Duration

Takanori Suzuki

Abstract

This paper theoretically analyzes the optimal contract duration (T^*) in a dynamic principal-agent relationship considering a time discount rate ($r > 0$), where the performance measure follows a mean-reverting process (parameter a). Using a continuous-time model with an Ornstein-Uhlenbeck process, we solve the principal's problem of simultaneously optimizing the duration and the incentive rate of a linear contract. The results show that a finite optimal duration T^* exists, and comparative statics indicate that T^* becomes longer as mean reversion weakens (a is smaller) and as the discount rate r decreases. The optimal incentive rate also exhibits unimodality with respect to duration. This study elucidates the impact of KPI persistence and organizational time preference on objective performance evaluation period design, providing theoretical grounding for management accounting practices.

Keywords: optimal contract duration, dynamic agency theory, mean reversion, continuous-time model, time discounting

1. はじめに

企業経営におけるインセンティブ契約の設計は、組織のパフォーマンスと持続的成長を左右する重要な経営課題である。特に、契約の対象となる期間、すなわち業績評価期間 (contract duration / horizon) をどの程度の長さに設定するかは、経営者や従業員の意思決定の時間軸 (短期志向か長期志向か) に直接影響を与え、短期的な収益確保と長期的な企業価値創

造との間のデリケートなバランスに関わる。実務においては、年次ボーナス、四半期評価、複数年にわたる長期インセンティブプラン (LTIP) など多様な期間設定が用いられているが、「どの程度の期間が最適か」という問いに対する理論的な指針は、これまで必ずしも十分ではなかった。

この問題の核心には、時間の経過とともに変化する情報価値やリスク、そして経済主体が将来をどれだけ重視するか (時間選好) といった動的な要因が存在する。特に、評価対象となる業績指標 (KPI) が固有の時間的特性を持つことは重要である。多くの経済・経営指標は、過去のランダムなショックやエイジェントの行動の効果が永続せず、時間とともに減衰していく平均回帰性 (mean reversion) を示すと考えられる。この平均回帰の強弱 (指標の持続性) は、契約期間を通じてどれだけ情報が蓄積され、またどれだけ陳腐化するかを決定するため、最適な評価期間の長さに影響を与えるはずである。しかし、従来の契約理論や管理会計研究では、モデルの単純化のため、あるいは分析の焦点の違いから、評価期間を所与としたり、指標の動的な特性を陽に考慮しなかったりするケースが多く、業績指標の持続性 (平均回帰係数 a)、経済主体の時間選好 (割引率 r)、そして最適な契約期間 T^* の三者の関係性を体系的に分析した研究は限られていた。

本稿は、この研究上のギャップを埋めることを目的とする。具体的には、連続時間プリンシパル・エイジェント (PA) モデルの枠組みを用い、業績プロセスが平均回帰性 (パラメータ a) を持つオルンシュタイン・ウーレンバック (OU) 過程に従い、かつ、プリンシパルとエイジェントが将来の利得やコストを時間割引率 $r > 0$ で評価する状況を想定する。この設定の下で、プリンシパルが、線形報酬契約 (α, β) のパラメータと契約期間 T を同時に選択し、自身の (割引後) 期待利得を最大化する問題を分析する。特に、業績指標の持続性 (a の大小) や時間選好 (r の大小) が、内生的

に決定される最適契約期間 T^* にどのような影響を与えるかを、理論的および数値的な比較静学分析を通じて明らかにすることを目指す。

本稿の分析から得られる主要な発見は以下の通りである。第一に、割引率 $r > 0$ を考慮することにより、プリンシパルの期待利得は期間 T に対して一峰性（山型）を示し、有限な最適契約期間 T^* が存在することが理論的に保証される。第二に、本研究の核心的な結果として、最適契約期間 T^* は平均回帰係数 a に対して単調減少の関係にある ($a \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$) ことが確認された。これは、業績の持続性が高い（平均回帰が弱い）ほど、より長期の契約が最適となることを意味する。第三に、経済的な直観と整合的な結果として、最適契約期間 T^* は割引率 r に対しても単調減少の関係にある ($r \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$) ことが確認された。これはモデルの妥当性を補強するものである。さらに、最適インセンティブ率 β^* も期間 T に対して一峰性を示すことがわかった。

本研究の貢献は、第一に、連続時間 PA 理論において、これまで十分に分析されてこなかった契約期間の最適化問題に対し、指標の動的特性（平均回帰性 a ）と時間選好（割引率 r ）の影響を統合的に分析する理論的枠組みを提供した点にある。第二に、管理会計の実務に対して、業績評価期間やインセンティブ報酬制度（短期・長期のミックスなど）を設計する際に、単なる慣習や固定的なルールではなく、評価対象となる KPI の持続性や組織の時間割引といった経済的要因を考慮に入れることの重要性和、その具体的な方向性（ a が小さければ長期、 r が大きければ短期など）を示す理論的根拠を提供した点にある。これにより、より合理的で効果的なパフォーマンス・マネジメントシステムの構築に寄与することが期待される。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、連続時間 PA 理論と管理会計における評価期間研究に関する先行研究をレビューし、本稿の位置づけと貢献を明確化する。第 3 節では、割引率を含むモデル設定と仮定を提

示する。第4節では、割引モデルにおける均衡（最適努力、最適契約パラメータ）を導出する。第5節では、比較静学分析により、最適契約期間 T^* が平均回帰係数 a および割引率 r によってどのように決定されるかを詳細に分析し、そのメカニズムとインプリケーションを考察する。最後に第6節で、本研究全体の結論をまとめ、研究の限界と今後の課題について述べる。

2. 先行研究

本稿の研究テーマは、連続時間プリンシパル・エイジェント（PA）理論と、管理会計における評価期間の設計問題を架橋し、時間割引（ $r > 0$ ）を考慮した上で、平均回帰性（ $a > 0$ ）を伴う業績プロセスにおいて最適な契約期間（ T^* ）がどのように決定されるか、特に、 a の影響を解明することである。本節では、まず連続時間 PA 理論の展開を概観し、動学性、割引、期間設定に関する扱いを確認する。次に管理会計分野で論じられてきた評価期間や業績指標の持続性に関する研究を整理する。最後に両領域のギャップを明示し、本稿の位置づけと貢献を明確化する。

2.1 連続時間プリンシパル・エイジェント理論の展開

プリンシパル・エイジェント問題は、情報の非対称性に起因するモラルハザードや逆選択の問題を分析する契約理論の中核として、Jensen and Meckling (1976), Mirrlees (1976), Holmstrom (1979), および Grossman and Hart (1983) らの古典的研究以来、広範に研究されてきた。初期の研究の多くは静的なモデルや離散時間モデルに焦点を当てていたが、エイジェントの努力や意思決定が時間を通じて連続的に行われる現実の多くの状況（例：投資判断、生産活動、研究開発）をより精密に捉えるため、連続時間モデルへの関心が高まった。この流れにおける画期的な貢献が Holmstrom

and Milgrom (1987) である。彼らは、離散時間モデルの極限として連続時間モデルを考え、エイジェントがリスク回避的 (CARA 効用) で二乗の努力コストを負い、業績が (ドリフト制御可能な) ブラウン運動に従う場合、線形の報酬契約が最適となることを示した。この結果は、分析の扱いやすさと応用可能性の広さから、後続の多くの連続時間 PA 研究の基礎となった。

Holmstrom and Milgrom (1987) 以降、連続時間 PA モデルは様々な方向に拡張・精緻化されてきた。Schattler and Sung (1993) は、エイジェントのインセンティブ整合性制約を一階の条件で置き換える一階条件アプローチが連続時間モデルにおいても妥当となる条件を明らかにし、モデルの解析を容易にした。また、Sung (1995) は、業績プロセスとして平均回帰性を持つ拡散過程 (オルンシュタイン・ウーレンベック (OU) 過程を含む) を考察し、プロセスの動的特性が契約形態に影響を与え得ることを示唆した。さらに、Ou-Yang (2003) は、OU 過程を用いて、委託ポートフォリオ管理における最適な契約を分析している。これらの研究は、単純なブラウン運動仮定を超えて、より現実的な業績変動をモデル化する上で OU 過程の有用性を示しているが、分析の主眼は情報伝達のメカニズムや契約形態にあり、契約期間 T そのものの最適化、特にそれが平均回帰係数 a によってどう影響されるかの分析は限定的であった。

経済学的な動学モデルにおいては、将来の価値を割り引く時間割引率 ($r > 0$) を導入することが標準的である。Sannikov (2008) によって強力な分析ツール (マルチンゲール法と動的プログラミング) が提供されて以降、割引を考慮した長期的なインセンティブ契約や動的な関係性を分析する研究が大きく進展した (Demarzo and Sannikov 2006)。これらの研究は、契約の動的な構造や持続的なモラルハザードのメカニズムを深く解明している。しかし、その多くは無限期間モデルや定常状態における契約の

特性に焦点を当てており、プリンシパルが有限の契約期間 T を能動的に選択し、その最適値 T^* がどのように決まるか、特にプロセスのパラメータ（例えば平均回帰係数 a ）にどう依存するか、という問題設定は必ずしも中心的ではなかった。割引率 $r > 0$ が有限の T^* を導きやすいことは示唆されるものの、その T^* と a の関係性の詳細な分析は、依然として研究の余地が大きい領域であった。

2.2 管理会計における評価期間研究

管理会計の実務においては、年度評価、四半期評価、中期経営計画に基づく複数年評価など、特定の有限な評価期間を設定することが不可欠である。期間の長さは、短期的な目標達成と長期的な戦略実行のバランス、リスク許容度、経営者のインセンティブに直接影響を与えるため、その設定は重要な経営判断となる (Banker and Datar 1989; Ittner and Larcker 1998)。しかし、このような実務の重要性にもかかわらず、管理会計の理論研究において、評価期間を内生的に決定する枠組みは十分に発展してこなかった。多くの理論モデルは静学的であるか、期間を所与とした離散多期間モデルに留まっている (Murphy 1999; Lambert 2001)。業績指標の時系列的な特性、例えば Sloan (1993) が分析した会計利益の平均回帰性などが、評価期間や報酬設計に影響を与える可能性は認識されてきたが、それを指標の持続性 (パラメータ a) と時間選好 (パラメータ r)、そして最適期間 T^* と結びつけて体系的に分析する理論モデルは不足していた。Kaplan and Norton (2004) のBSCなども多角的視点を提供するが、期間決定の規範理論を提供するものではない。

2.3 研究ギャップと本稿の位置づけ

上記のレビューから、以下の研究ギャップが特定される。(1) 連続時間PA理論：割引 ($r > 0$) や平均回帰 ($a > 0$) を扱うモデルは存在するが、

有限な契約期間 T を内生的に最適化し、その最適値 T^* がプロセスのパラメータ a や割引率 r によってどのように決定されるかを比較静学的に分析する研究は少ない。(2) 管理会計理論：実務的に重要な有限の評価期間の設定問題に対し、指標の動的な持続性 (a) と時間選好 (r) を考慮した規範的な理論モデルが欠けている。本稿は、このギャップを埋めることを目指す。具体的には、割引率 $r > 0$ を導入した連続時間 OU 過程 ($a > 0$) に基づく PA モデルを構築し、プリンシパルが期間 T を内生的に最適化する問題を解く。そして、その結果として得られる有限な最適期間 T^* が、平均回帰係数 a および割引率 r によってどのように決定されるか（特に、 $a \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ および $r \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ の関係）を理論的・数值的に明らかにする。これにより、動学的な契約理論の知見を、管理会計における評価期間設定という実務的な課題に応用するための理論的基盤を提供することを目指す。

3. モデル

本節では、第 2 節で概説した研究課題、すなわち平均回帰性と時間割引を考慮した上での最適契約期間の決定問題を分析するための、連続時間プリンシパル・エイジェント (PA) モデルを定式化する。本モデルは、業績プロセスとしてオルンシュタイン・ウーレンベック (OU) 過程を採用し、プリンシパルとエイジェント双方の時間選好を割引率 $r > 0$ で表現する。契約は期間末に一括支払われる線形報酬とし、プリンシパルは報酬係数 (α, β) と契約期間 T を同時に選択する。

3.1 確率環境とタイムライン

経済は完備な確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義され、情報構造は標準的なフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (標準ブラウン運動 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ によって生成される右連続かつ完備化されたもの) によって与えられる。時間は連続的に

$t \in [0, T]$ で進行する。時刻 $t = 0$ で契約が締結され、エージェントは期間 $[0, T]$ にわたって努力 $\{u_t\}_{t \in [0, T]}$ を選択する¹。時刻 $T > 0$ （プリンシパルが選択）に最終業績 X_T が観測され、報酬 w_T が支払われて終了する。

3.2 業績プロセス：オルンシュタイン・ウーレンバック（OU）過程

業績プロセス $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ は、以下の OU 型確率微分方程式に従う。

$$dX_t = (-aX_t + bu_t) dt + cdW_t \quad (1)$$

初期値 X_0 は $\mathcal{N} \sim (\mu_0, \sigma_0^2)$ に従うとする。パラメータ $a \geq 0$ は平均回帰係数（本稿では主に $a > 0$ を分析）、 $b > 0$ は努力の生産性、 $c > 0$ はノイズの大きさを示す。

3.3 報酬契約

時刻 T の最終業績 X_T に基づく線形報酬契約 $w_T = \alpha + \beta X_T$ を仮定する。 α は固定給、 β はインセンティブ率である。報酬は時刻 T に一括で支払われる。

3.4 エージェント

エージェントは、期間 $[0, T]$ における自身の割引後ネット利得の期待効用を最大化するように努力プロセス $\{u_t\}_{t \in [0, T]}$ を選択する。彼の瞬時努力コストは $C(u_t) = (k/2)u_t^2$ ($k > 0$) とする。エージェントはリスク回避的（CARA 効用、絶対的リスク回避度 $\rho > 0$ ）であり、時間割引率 $r > 0$ で将来のコストや報酬を割り引く。彼が最大化する目的関数は、時刻 T における報酬 w_T の割引価値から、時刻 0 から T までの努力コストの割引価値の積分を差し引いたものの期待効用

$$EU_A = \mathbb{E} \left[-\exp \left(-\rho \left(e^{-rT} w_T - \int_0^T e^{-rt} C(u_t) dt \right) \right) \right]$$

とする。これは、割引後のネットペイオフに対する期待効用を考えていることに相当する。エージェントは、契約から得られる（最大化された）期待効用 EU_A^* が、外部での機会から得られる留保効用レベル \underline{U} を下回らない場合にのみ契約に参加する。 \underline{U} に対応する割引後の確実性等価所得を \underline{U}_{CE} と記す。

3.5 プリンシパル

プリンシパルはリスク中立であるが、同様に時間割引率 $r > 0$ を持つと仮定する。彼女は、エージェントへの報酬支払い後の最終業績の割引後期待値（時刻 0 での現在価値）

$$E[\pi_P] = E[e^{-rT}(X_T - w_t)] = E[e^{-rT}(X_T - (\alpha + \beta X_T))]$$

を最大化することを目指す。具体的には、エージェントの誘因両立条件 (IC) と参加条件 (PC) を考慮した上で、割引後期待利得 $E[\pi_P]$ を最大にするように、契約パラメータ (α, β) および契約期間 T を選択する。

3.6 情報構造とプリンシパルの最適化問題

従来通り、努力 $\{u_t\}$ はプリンシパルから観測不能で、最終業績 X_T のみが観測可能かつ検証可能とする。割引を考慮したプリンシパルの最適化問題は以下となる。

$$\max_{\alpha, \beta, T} E[e^{-rT}(X_T - (\alpha + \beta X_T))]$$

subject to:

1. IC: $\{u_t^*\}_{t \in [0, T]}$ maximizes

$$EU_A(\{u_t\}) = E\left[-\exp\left(-\rho\left(e^{-rT}(\alpha + \beta X_T) - \int_0^T e^{-rt} \frac{k}{2} u_t^2 dt\right)\right)\right]$$

2. PC: $EU_A^* = EU_A(\{u_t^*\}) \geq \underline{U}$

4. 均衡

本節では、第3節で定式化された割引率 $r > 0$ を含む連続時間プリンシパル・エージェントモデルにおける均衡を導出する。前節と同様に、均衡はエージェントの最適努力反応と、それを織り込んだプリンシパルの最適契約選択によって特徴づけられる。CARA 効用、二乗努力コスト、線形契約、OU 過程、そして時間割引という設定の下で、解析的な均衡解を求める。

4.1 エージェントの最適努力

任意の線形契約 (α, β) と期間 T が与えられた下で、エージェントは自身の割引後ネット利得の期待効用 EU_A を最大化する努力プロセス $\{u_t\}_{t \in [0, T]}$ を選択する。確実性等価アプローチを用いると、エージェントが最大化するのは、割引後確実性等価

$$CE(\{u_t\}) = e^{-rT}\alpha + \beta e^{-rT} \mathbb{E}[X_T | \{u_t\}] - \int_0^T e^{-rs} \frac{k}{2} u_s^2 ds - \frac{\rho}{2} \beta^2 e^{-2rT} \text{var}[X_T | \{u_t\}] \quad (2)$$

である。これは、汎関数 CE を最大にする関数 u_t を求める変分法の問題となっている。ここで、確率微分方程式 (1) の $t = T$ における解が

$$X_T = e^{-aT} X_0 + \int_0^T e^{-a(T-s)} b u_s ds + \int_0^T e^{-a(T-s)} c dW_s$$

となることから、その条件付き期待値は

$$\mathbb{E}[X_T | \{u_t\}] = e^{-aT} \mu_0 + b \int_0^T e^{-a(T-s)} u_s ds$$

となり、条件付き分散は

$$\text{var}[X_T | \{u_t\}] = \text{var}[X_T] = V_T = e^{-2aT} \sigma_0^2 + \frac{c^2 (1 - e^{-2aT})}{2a}$$

となる²。したがって、汎関数 (2) に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial}{\partial u_s} \left(\beta e^{-rT} b e^{-a(T-s)} u_s - e^{-rs} \frac{k}{2} u_s^2 \right) = \beta e^{-rT} b e^{-a(T-s)} - e^{-rs} k u_s = 0$$

となるから、これを解いて、

$$u_s = u_s^* = \frac{\beta b}{k} e^{-(r+a)(T-s)}$$

を得る。

4.2 参加条件と固定給

プリンシパルは、エージェントが留保効用 \underline{U} を確保できるように、固定給 α を調整する。参加条件 $CE^* = CE(\{u_s^*\}) \geq \underline{U}_{CE}$ を等号で満たす固定給は、(2) より

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha(\beta) &= e^{rT} \underline{U}_{CE} - \beta E[X_T | \{u_s^*\}] \\ &\quad + e^{rT} \int_0^T e^{-rs} \frac{k}{2} (u_s^*)^2 ds + \frac{\rho}{2} \beta^2 e^{-rT} \text{var}[X_T | \{u_s^*\}] \end{aligned}$$

となる。

4.3 プリンシパルの最適インセンティブ率

プリンシパルは、最適努力 u_s^* と参加条件考慮後の固定給 $\alpha(\beta)$ をを前提として、自身の割引後期待利得

$$\begin{aligned} E[\pi_P] &= E[\pi_P(\beta)] = E[e^{-rT} (X_T - (\alpha(\beta) + \beta X_T)) | \{u_s^*\}] \\ &= C_0 + C_1 \beta - C_2 \beta^2 \end{aligned} \tag{3}$$

を最大化する β を選択する。ただし、

$$C_0 = e^{-(r+a)T} \mu_0 - \underline{U}_{CE}, C_1 = \frac{b^2 (1 - e^{-(r+2a)T})}{k(r+2a)},$$

$$C_2 = \frac{b^2 (1 - e^{-2(r+a)T})}{2k(r+2a)} + \frac{\rho}{2} e^{-2rT} V_T$$

である。ここに、 $C_2 > 0$ であるから、(3)は上に凸であり、一意な最大値を持つ。(3)の β に関する一階条件より、

$$\beta = \beta^* = \frac{C_1}{2C_2}$$

となる。

4.4 プリンシパルの最大期待利得

この最適報酬契約 $(\alpha(\beta^*), \beta^*)$ の下で、プリンシパルが得る最大化された割引後期待利得は、

$$E[\pi_P] = E[\pi_P]^* = E[\pi_P(\beta^*)] = C_0 + \frac{C_1^2}{4C_2}$$

となる。

4.5 契約期間 T の内生性への接続

本節で導出したプリンシパルの最大割引後期待利得 $E[\pi_P]^*$ は、期間 T とパラメータ a, r の関数である。次節では、この $E[\pi_P]^*$ を T について最大化することで最適契約期間 T^* を決定し、その T^* がパラメータ a や r によってどのように変化するかを比較静学的に分析する。

5. 分析

本節では、第4節で導出した均衡に基づき、契約期間 T 、平均回帰係数 a 、および割引率 r が、最適報酬契約の特性（特に最適インセンティブ率 β^* と最適契約期間 T^* ）およびプリンシパルの（割引後）期待利得 $E[\pi_P]^*$ に与える影響を分析する。まず、均衡において有限な最適期間が存在する

ことを確認し、次いで主要な関心事である a の影響、およびモデルの妥当性を確認するための r の影響について比較静学分析を行う。最後に、これらの結果が持つ理論的・実務的インプリケーションを考察する。なお、以下では、簡単のため、 $\underline{U}_{CE} = 0, \mu_0 = 0$ を想定する。

5.1 最適契約期間の存在と特性

まず、プリンシパルの最大化された割引後期待利得 $E[\pi_P]^*$ は、 e^{-rT} の効果により、 $T \rightarrow \infty$ でゼロに収束する³。また、期待利得は $T = 0$ ではゼロだから、必ず最大値を持つ山型の関数型となる。この最大値を与える T が最適契約期間 T^* である。 $a = 1, b = 1, c = 1, k = 1, r = 0.1, \rho = 1, \sigma_0 = 0.1$ の場合、 $T^* \approx 1.44$ となる。その様子をグラフで示すと図1のようになる。

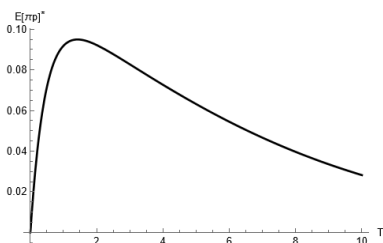


図1 期間 T に対するプリンシパルの期待利得 $E[\pi_P]^*$ の変化 ($a = 1, b = 1, c = 1, k = 1, r = 0.1, \rho = 1, \sigma_0 = 0.1$)

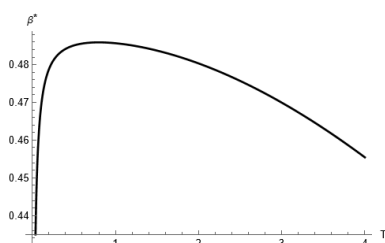


図2 期間 T に対する最適インセンティブ率 β^* の変化 ($a = 1, b = 1, c = 1, k = 1, r = 0.1, \rho = 1, \sigma_0 = 0.1$)

最適インセンティブ率 β^* もまた、期間 T に対して一峰性を示すことが観察される (図2参照)。 T が非常に短い場合は情報が不足するため β^* は小さく、 T が増加するにつれて情報蓄積効果により β^* は上昇する⁴。しかし、 T がさらに長くなると、将来の成果に対する割引効果 (C_1 に含まれる e^{-rT} など) が支配的になることや、限界的なコスト (C_2) とのバランス

により、 β^* は再び減少していく⁵。重要な点として、 β^* が最大となる期間 T_β は、一般にプリンシパルの期待利得が最大となる期間 T^* とは一致しない。プリンシパルは β^* のみならず、全体的なコスト（リスクプレミアム等）も含めて自身の利得が最大となる T^* を選択するためである。

5.2 比較静学分析

次に、有限な最適期間 T^* が、モデルの重要なパラメータである平均回帰係数 a と割引率 r によってどのように変化するかを分析する。

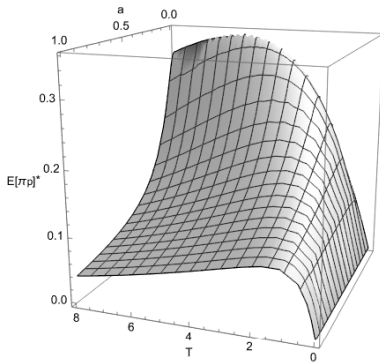


図3 期間 T と平均回帰係数 a に対するプリンシパルの期待利得 $E[\pi_P]^*$ の変化 ($b = 1, c = 1, k = 1, r = 0.1, \rho = 1, \sigma_0 = 0.1$)

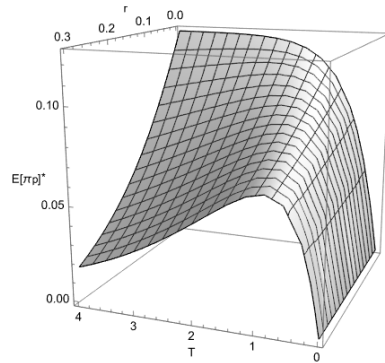


図4 期間 T と割引率 r に対するプリンシパルの期待利得 $E[\pi_P]^*$ の変化 ($a = 1, b = 1, c = 1, k = 1, \rho = 1, \sigma_0 = 0.1$)

5.2.1 平均回帰係数 a の影響

本研究の中心的な問いである、 a と T^* の関係を調べる。数値計算の結果（図3参照）は、平均回帰が弱い（ a が小さい）ほど、最適契約期間 T^* は長くなる（ $a \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ ）という単調減少の関係があることを示している。この関係の経済的直観は次のとおりである。 a が小さいほど、エイジェン

トの過去の努力の影響は業績に長く持続的に残る。つまり、期間 T を長くすることで得られる努力に関する情報価値の減衰が緩やかになる。そのため、プリンシパルはより長い期間をかけて情報を蓄積し、インセンティブを与えることのメリットを享受できる。結果として、より長い契約期間 T^* が最適となる。逆に a が大きい場合は、情報がすぐに陳腐化するため、短い期間で評価・契約する方が効率的となる⁶。

5.2.2 割引率 r の影響

最適期間 T^* が割引率 r によってどう変化するかを分析する。数値計算の結果（図 4 参照）は、割引率が低い（ r が小さい）ほど、最適契約期間 T^* は長くなる（ $r \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ ）という関係を示している。これは経済学的に非常に直観的な結果である。割引率 r が低いほど、プリンシパルは、将来の利得を現在価値に換算する際の割引の度合いが小さい（＝将来をより重視する）。契約期間 T を長くすると、最終的な利得はより遠い将来に実現するが、 r が低いプリンシパルにとっては、その将来の利得の価値の目減りが少ないため、期間を長くすることへの抵抗が小さい。結果として、より長い期間 T^* が最適となる。ところで、このように、割引率という基本的な経済パラメータに対してモデルが直観と整合的な結果（ $r \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ ）を示すことは、本モデルが経済原理を適切に捉えていることを示す、妥当性チェック（validation check）として機能し、モデル全体の信頼性を高めるものである。

5.2.3 他のパラメータの影響

他のパラメータ（ b, c, k, ρ, σ_0 ）に関する比較静学も原理的には可能である。例えば、リスク回避度 ρ が高いほど、リスクプレミアムが増大するため、 T^* は短くなる傾向が予想される。初期分散 σ_0 や継続的ノイズ c も V_T を通じて C_2 に影響し、 T^* の決定に関与する。詳細な分析は省略するが、

主要な結果（特に a と T^* の関係）は、これらのパラメータがある程度変化しても頑健であることが、追加的な数値実験により示唆されている。

5.3 結果のインプリケーション

これまでの分析結果は、理論と実務の両面で重要な示唆を与える。

5.3.1 理論的インプリケーション

まずは、動学モデルの必要性についてである。契約期間 T に対する β^* や $E[\pi_P]^*$ の一峰性、そして T^* の存在とパラメータ依存性は、静学モデルでは捉えられない動的なトレードオフの結果であり、インセンティブ問題を理解する上で動学的な視点が不可欠であることを示している。次に、期間とプロセスの相互作用についてである。最適な契約期間が、業績プロセスの動的特性（平均回帰係数 a ）と経済主体の時間選好（割引率 r ）の両方に依存することを示した。これは、契約設計において時間軸とプロセス特性を統合的に考慮する必要性を強調する。また、割引率がない場合（ $r = 0$ ）や特定のパラメータ下では $T^* \rightarrow \infty$ となり得ることが示唆された点も理論的に興味深い。これは、無限期間契約が（少なくとも理論的には）最適となり得る条件を示唆しており、その経済学的意味の探求は今後の課題となる。

5.3.2 実務的インプリケーション

まずは、評価期間設計への指針についてである。KPI に基づく業績評価期間を設定する際、その KPI が持つ固有の持続性（平均回帰の強弱 a ）と、組織全体の時間選好（割引率 r に関連）を考慮に入れるべきであることが示唆される。持続性の高い指標には長めの期間を、減衰の速い指標には短めの期間を、そして資本コストが高い（将来価値を低く見積もる）組織では全体的に短めの期間を設定することが合理的となるだろう。次に、KPI 選択基準についてである。指標を選択する際には、その動的特性（ a や c ）

が最適な契約期間やインセンティブの有効性に与える影響を考慮に入れるべきことが示唆される。また、報酬ポートフォリオ設計に関しては、短期・長期インセンティブの組み合わせを考える際、それぞれのインセンティブに連動する指標の持続性と評価期間の適切性を理論的に検討するための基礎を提供している。

5.4 節のまとめ

本節では、割引率 $r > 0$ を導入した連続時間 PA モデルにおいて、有限な最適契約期間 T^* が存在することを確認した。さらに、比較静学分析により、本研究の中心的な発見として、最適期間 T^* は平均回帰係数 a が小さい（持続性が高い）ほど長くなること、また、モデルの妥当性を支持する結果として、 T^* は割引率 r が低いほど長くなることを示した。さらに、最適インセンティブ率 β^* も期間 T に対し一峰性を示すことが確認された。これらの結果は、情報蓄積、平均回帰による情報減衰、リスクコスト、時間割引といった複数の要因間の複雑なトレードオフを反映しており、契約理論と管理会計の両分野に対して重要な示唆を与えるものである。次節では、本稿全体の結論を改めて整理し、研究の限界と今後の展望について述べる。

6. 結論

6.1 主要な発見の要約

本稿は、企業におけるインセンティブ契約の期間設計という根源的な問題に対し、業績指標が時間とともに平均回帰する動的な環境を考慮した理論的分析を提供した。連続時間プリンシパル・エイジェントモデルを用い、業績プロセスをオルンシュタイン・ウーレンバック (OU) 過程 (平均回帰係数 $a > 0$)、エイジェントの選好を CARA 効用と二乗努力コスト、契約を

線形報酬とし、さらに経済主体や市場の時間選好を反映する割引率 $r > 0$ を導入した。プリンシパルが契約期間 T を内生的に決定する問題を分析し、以下の主要な発見を得た。第一に、プリンシパルの（割引後）期待利得 $E[\pi_P]^*$ は T に対して一峰性（山型）を示し、それを最大化する有限な最適契約期間 T^* が存在することが理論的・数値的に確認された。第二に、本研究の中心的な発見として、最適契約期間 T^* は、業績指標の平均回帰係数 a に対して単調減少の関係にある（ $a \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ ）ことが示された。すなわち、業績の持続性が高い（平均回帰が弱い）指標を用いるほど、より長期の契約が最適となることが確認された。第三に、モデルの妥当性を支持する結果として、最適契約期間 T^* は割引率 r に対しても単調減少の関係にある（ $r \downarrow \Rightarrow T^* \uparrow$ ）ことが示された。これは、将来の価値をより高く評価する（割引率が低い）プリンシパルほど、より長期の契約を選択するという経済学的な直観と整合的である。加えて、最適インセンティブ率 β^* も期間 T に対して一峰性を示すことが確認され、契約期間の長さがインセンティブの最適強度にも非単調な影響を与えることが示唆された。

6.2 管理会計へのインプリケーション

これらの発見は、管理会計の実務、特にパフォーマンス評価や報酬制度の設計に対して、次のような重要な示唆を与える。(1) 評価期間設計の高度化：業績評価期間は、単なる慣習ではなく、評価対象となる KPI の持続性（平均回帰の強弱 a ）と、組織の時間選好や資本コスト（割引率 r に関連）に基づいて、より戦略的に決定されるべきである。本稿の分析は、これらの要因を定量的に考慮に入れるための理論的基礎を提供する。(2) KPI 選択と報酬ミックス：指標の動的特性（ a やノイズ特性 c, σ_0 ）と割引率 r が最適期間 T^* に与える影響を理解することは、適切な KPI を選択し、短期インセンティブと長期インセンティブのバランス（報酬ミックス）を効果

的に設計する上で有用である。持続性の高い KPI には長期評価・長期インセンティブを、そうでないものには短期評価・短期インセンティブを組み合わせることの合理性が示される。(3) パラメータ依存性への留意：最適期間 T^* は、 a や r だけでなく、初期分散 σ_0^2 を含む他のパラメータにも影響を受ける。特に、割引がない ($r = 0$)、あるいは初期分散が極端に大きい場合などには、 $T^* \rightarrow \infty$ となる可能性も理論的には存在し得るため、パラメータの現実的な範囲や相互作用を考慮することの重要性も示唆される。

6.3 研究の限界

本研究は、その分析の焦点と扱いやすさのために、次のような単純化仮定に依存している。(1) モデルの複雑性：割引率 r を導入したことで数式はより複雑になったが、依然として単一タスク・単一エージェント・線形契約といった標準的な仮定を用いている。(2) 離散的な現実との差異：連続時間モデルを採用したが、実際の評価や意思決定は離散的な時点で行われることが多い。(3) パラメータの外生性：平均回帰係数 a や割引率 y 、リスク回避度 ρ などを外生的なパラメータとしたが、これらが内生的に決まる可能性は考慮していない。(4) 情報構造：完全情報下のモラルハザード問題に焦点を当てており、不完備情報や学習の要素は含まれていない。

6.4 今後の研究課題

本研究の限界点を踏まえ、以下のような方向での研究の拡張が期待される。(1) パラメータ空間の系統的分析：最適期間 T^* が有限となる条件と無限大となる条件について、パラメータ空間（特に a, r, ρ, σ_0, c の相互作用）をより詳細に分析する。(2) モデルの拡張：複数指標・マルチタスク問題、マルチエージェント間の相互作用、非線形契約、内生的なパラメータ決定、不完備情報下での学習といった、より現実的な要素をモデルに組み込む。(3) 実証研究：企業の報酬データや財務・非財務データを用いて、

本稿の理論的予測（特に T^* と a や r の関係）を検証する。その際、KPI の平均回帰係数 a を実際に推定する手法の開発も重要となる。(4) 異なる動的プロセス：OU 過程以外の、例えばジャンプ過程を含むような、より複雑な業績プロセスを仮定した場合の分析。

6.5 総括

本稿は、連続時間プリンシパル・エイジェントモデルの枠組みの中で、これまで十分な注意が払われてこなかった契約期間の内生的な最適化という問題に対し、業績プロセスの平均回帰性（持続性）と時間割引という二つの重要な要素を組み込んで分析を行った。その結果、割引率が正であれば有限な最適契約期間が存在し、その長さが指標の持続性 (a) と時間選好 (r) によって系統的に決定されるという、理論的にも実務的にも意義深い関係性を明らかにした。この研究は、動学的な契約理論と管理会計におけるインセンティブ設計・業績評価の実務との間に橋を架ける一助となるものであり、今後の関連研究の発展に貢献することが期待される。

注

¹ $u_t \in L^2[0, T]$ と仮定する。

² 導出にあたっては、伊藤積分の諸性質が用いられる。

³ $T \rightarrow \infty$ のとき、 $C_1 \rightarrow 0$ 、 $C_2 \rightarrow \frac{b^2}{2k(r+2a)} > 0$ となるから、 $E[\pi_P]^* = C_0 + C_1^2/(4C_2) \rightarrow 0$ となる。

⁴ ここで言う情報とは、観測可能な最終業績 X_T が、観測できないエイジェントの努力の経路 $\{u_s\}_{s \in [0, T]}$ について、どれだけ多くのことを教えてくれるか（＝どれだけ努力を正確に反映しているか）という意味である。情報が少ない場合、 X_T の変動の多くがノイズによるものであるため、高い β^* を設定すると、エイジェントは努力とは無関係な大きなリスクを負わされ、非常に高いリスクプレミアムを要求する。結果として、プリンシパルにとっては、高い β^* を設定するコスト（特にリスクプレミアム）が、それによって得られるインセンティブ効果のメリットを大きく上回ってしまい、低い β^* を設定するのが最適になる。一方で、情報が多い場合、 X_T の変動のうち、努力に起因する部分の割合が相対的に大きくなり、ノイズに起因する部分の割合が（相対的に）小さくなる。これにより、高い β^* を設定しても、エイジェントに負わせる無駄

なりリスク（努力とは無関係な変動によるリスク）が比較的小さく抑えられる。つまり、リスクプレミアムコストが（インセンティブ効果に比べて）割安になる。結果として、プリンシパルはメリットがデメリットを上回ると判断し、比較的高い β^* を設定することが最適になる。

${}^5T \rightarrow \infty$ のとき、 $\beta^* = C_1 / (2C_2) \rightarrow 0$ となる。

6a が小さい（効果が長持ちする）場合は、期間の初期（例えば $t = 0$ 付近）に行った努力でも、その効果がなかなか消えずに、期間の最後である T 時点の業績 X_T にまで比較的是っきりと影響を残す。これは、プリンシパルから見ると、期間 T を長くすればするほど、より過去に遡った期間の努力まで X_T という結果に反映されている、と解釈できる。言い換えれば、 X_T という情報源は、過去の努力に関する記憶を長く保持している状態である。過去の情報が消えにくいのであれば、プリンシパルにとっては、契約期間 T を長く設定して、より長期間にわたるエイジェントの努力を評価するメリットが大きい、ということになる。これが、『努力に関する情報価値』の減衰が緩やかになる、の意味するところである。情報が古くなりにくいので、長い期間評価する価値がある、というわけである。 a が大きい（効果がすぐ消える）場合は、期間の初期に行った努力の効果は、あっという間に消えてしまう（平均に回帰してしまう）。そのため、期間の最後 T の業績 X_T を見ても、それはごく最近の努力しか反映しておらず、遠い過去の努力に関する情報はほとんど失われている。この状況で契約期間 T を長くしても、過去に遡って努力を評価することはできない。むしろ、期間が長くなることによるデメリット（割引効果 e^{-rT} や、累積するリスクコストなど）の方が大きくなってしまう。したがって、期間 T を長くするメリットがあまりないので、短い期間 T^* が最適になる。

参考文献

- Banker, Rajiv D and Srikant M Datar (1989) "Sensitivity, Precision, and Linear Aggregation of Signals for Performance Evaluation," *Journal of Accounting Research*, Vol. 27, pp. 21-39.
- Demarzo, Peter M and Yuliy Sannikov (2006) "Optimal Security Design and Dynamic Capital Structure in a Continuous-Time Agency Model," *The Journal of Finance*, Vol. 61, pp. 2681-2724.
- Grossman, Sanford J and Oliver D Hart (1983) "An Analysis of the Principal-Agent Problem," *Econometrica*, Vol. 51, pp. 7-45.
- Holmstrom, Bengt (1979) "Moral Hazard and Observability," *The Bell Journal of Economics*, Vol. 10, pp. 74-91.
- Holmstrom, Bengt and Paul Milgrom (1987) "Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives," *Econometrica*, Vol. 55, pp. 303-328.
- Ittner, Christopher D and David F Larcker (1998) "Innovations in Performance Measurement: Trends and Research Implications," *Journal of Management Accounting Research*, Vol. 10, pp. 205-238.
- Jensen, Michael C. and William H. Meckling (1976) "Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 305-360.

- Kaplan, Robert S and David P Norton (2004) *Strategy Maps : Converting Intangible Assets into Tangible Outcomes*: Harvard Business School Press.
- Lambert, Richard A (2001) “Contracting Theory and Accounting,” *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 32, pp. 3–87.
- Mirrlees, James A (1976) “The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization,” *The Bell Journal of Economics*, Vol. 7, pp. 105–131.
- Murphy, Kevin J (1999) *Chapter 38 Executive Compensation*. In *Handbook of Labor Economics*, Vol. 3, pp. 2485–2563: Elsevier.
- Ou-Yang, Hui (2003) “Optimal Contracts in a Continuous-Time Delegated Portfolio Management Problem,” *Review of Financial Studies*, Vol. 16, pp. 173–208.
- Sannikov, Yuliy (2008) “A Continuous-Time Version of the Principal-Agent Problem,” *Review of Economic Studies*, Vol. 75, pp. 957–984.
- Schattler, Heinz and Jaeyoung Sung (1993) “The First-Order Approach to the Continuous-Time Principal-Agent Problem with Exponential Utility,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 61, pp. 331–371.
- Sloan, Richard G (1993) “Accounting Earnings and Top Executive Compensation,” *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 16, pp. 55–100.
- Sung, Jaeyoung (1995) “Linearity with Project Selection and Controllable Diffusion Rate in Continuous-Time Principal-Agent Problems,” *The RAND Journal of Economics*, Vol. 26, pp. 720–743.