

ADF-GLS 検定とその背景

坂 野 慎 哉

1. はじめに

以前、小生は拙稿（坂野 (2010)）にて、Elliott, Rothenberg, and Stock (1996)（以下、ERS と略す）によって考案された ADF-GLS 検定の手順とその適用例について紹介した。しかし、そこでは ADF-GLS 検定の統計理論的背景についてほとんど触れずじまいであった。そこで小稿では、ADF-GLS 検定の統計理論的背景の概要について紹介し、上記拙稿の補足を行いたい。

以下、小稿の構成を述べる。2 節では、Fuller (1976) および Dickey and Fuller (1979) によって与えられた、Augmented Dickey-Fuller 検定（以下 ADF 検定と略す）の、我が国のマクロ経済データへの適用例を示す。ADF-GLS 検定は ADF 検定を改良したものである。3 節では、ADF-GLS 検定の手順について具体的に説明する。これは上記拙稿と重なる部分があるが、小稿 4 節の理解のために必要と思われるので、あえて入れることとした。4 節は小稿の中心となる部分で、ここで ADF-GLS 検定の統計理論的背景について解説する。5 節では、2 節と同じデータに ADF-GLS 検定を適用した結果を示し、2 節の ADF 検定の適用結果と比較する。

なお小稿は、ADF 検定の手順について既に知っている読者を想定している。

2. ADF 検定の適用例

ある時系列データ $y_1, \dots, y_T$ が、次の 2 つの式で示されるデータ生成過程 (data generating process: 以下 DGP と略す) から発生していると考えられているとする。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (1)$$

ここで、 β_0, β_1 は未知パラメータであり、 t はトレンド変数である。 $\beta_1 t$ は「線形トレンド項」と呼ばれる。 $\{v_t\}$ については、次数 p の定常な AR 過程であると仮定する。すなわち、 $\{\eta_t\}$ がホワイト・ノイズ (平均 0, 分散一定, 自己共分散がすべて 0 の確率変数の系列) であるとするとき、

$$v_t = \phi_1 v_{t-1} + \phi_2 v_{t-2} + \dots + \phi_p v_{t-p} + \eta_t \quad (2)$$

となっているとする。ただし、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ は未知パラメータであり、 $\{v_t\}$ が定常であるためには、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ を係数に持つ多項式

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0 \quad (3)$$

は、すべての根が絶対値で 1 より小さくなくてはならないことが知られている。ADF 検定は、帰無仮説 $H_0: \alpha = 1$ を、対立仮説 $H_1: \alpha < 1$ に対して検定する。

本節では、この ADF 検定を我が国のマクロ経済データへ適用した例を示すことにより、ADF 検定の復習をするとともに、5 節における、同じデータ系列への ADF-GLS 検定の適用例との比較材料を与えたい。ADF 検定の手法について詳しくは、例えば森棟 (1999) の 9 章を参照されたい。

例として取り上げる時系列データは、日本の 1974 年 1 月期から 2007 年 1 月期までの常用雇用指数 (月次, 季節調整済み, 従業員 30 人以上の事業所が対象, $T = 397$) である。データの期間を 1974 年 1 月期以降としたのは、そ

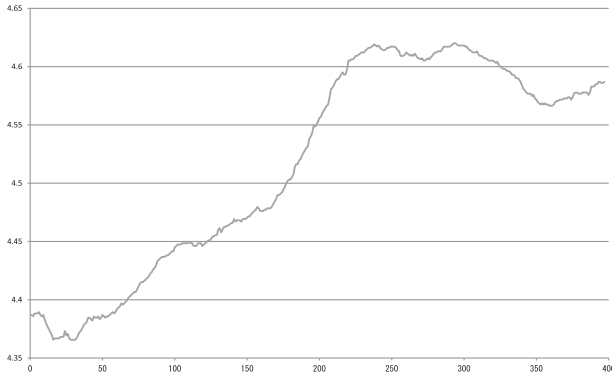


図 1

れ以前のデータを含めると、系列が 1973 年末の第 1 次石油ショックによる経済構造の変化の影響を受けているかもしれず、構造変化を考慮しない通常の ADF 検定や ADF-GLS 検定で分析すると、検定結果に構造変化の影響が波及する恐れがあったためである。Perron (1989) は、DGP の定数項や線形トレンド項にシフトがある系列に対し、それらのシフトを考慮しない通常の ADF 検定を行うと、帰無仮説が棄却されづらくなることを指摘している。分析に先立ち、分散安定化のためデータには自然対数をとっておく。

ADF 検定を実際に行うにあたり、まずデータのレベル (=階差をとらない状態) と、1 階の階差とを、グラフにプロットしてみる。「図 1」と「図 2」は、それぞれレベルと 1 階階差のグラフである。

図 1 をみると、この時系列にはトレンドが含まれているように見える。しかし、線形トレンドによるものか、単位根によるものか、あるいはその両方によるものなのか、この図を見ただけでは判断がつかない。そこで図 2 が必要になる。

例えばいま、ある時系列データ $y_1, \dots, y_T$ の DGP が (1) のようになっており、かつ帰無仮説 $H_0: \alpha = 1$ が正しいと仮定しよう。すると、(1) の左側

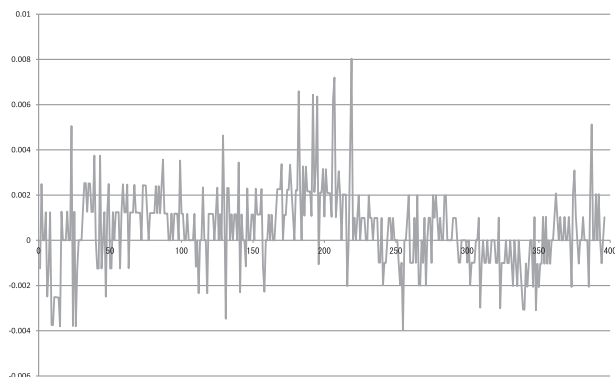


図 2

の式を 1 期前にずらした式を (1) の左側の式から引くことにより,

$$\Delta y_t = \beta_1 + v_t \quad (4)$$

が得られる。すなわち, (4) より, レベル系列では線形トレンドの係数であるパラメータが, 1 階階差系列では定数項になることがわかる。このことから, 図 2 のような 1 階階差系列をプロットしたグラフを眺め, プロットが横軸以外の見えない水平線の上下を行き来しているように見えている, すなわち定数項の存在が見て取れるようであれば, レベルの系列には線形トレンドが含まれている可能性がある。実際に図 2 をみると, 系列の振れの中心は, 期間にもよるが, 横軸よりわずかながら上にあるように見える。そのことから, 系列の DGP には定数項も線形トレンドも含まれていると想定することにする。

この場合, ADF 検定を行うためには, まず,

$$\Delta \hat{u}_t = a_0 \hat{u}_{t-1} + a_1 \Delta \hat{u}_{t-1} + a_2 \Delta \hat{u}_{t-2} + \cdots + a_p \Delta \hat{u}_{t-p} + error \quad (5)$$

を推定する。ただし, $\{\hat{u}_t\}$ は (1) の左側の式の β_0 と β_1 を最小二乗法 (Ordinary Least Squares Method : 以下 OLS と略す) で推定したときに得られる残差 (これを OLS 残差と呼ぶことにする) である。(5) における右辺第

1 項の係数 a_0 について、 $a_0 = 0$ か否かを検定する t 検定こそが、この場合のように DGP に定数項も線形トレンドも含まれていると想定される場合の ADF 検定である。なお、この場合の ADF 検定の検定統計量はもちろん a_0 に対応する通常の t 統計量であるが、その分布は、帰無仮説 $H_0 : a_0 = 0$ のもとで通常の t 分布には従わないことが知られている。そのため、この検定統計量は、例えば ERS においては $\hat{\tau}_\tau$ と記され、検定の臨界値を求めるために通常の t 分布表ではなく特別の分布表が必要となる。森棟 (1999) はこの検定を「 τ_τ 検定」と記しているが、 $n = 1000$ の場合の臨界値が、森棟 (1999) p.319 の「付表 1」の τ_τ の欄に与えられている。この検定の棄却域は、帰無仮説のもとでの検定統計量の分布の密度関数のグラフの左裾に設定される。

(5) の推定にあたり、右辺のラグ項の p を選択する必要があるが、小稿ではその選択を、Schwarz (1978) により提案されたベイズ情報量基準 (Bayesian Information Criterion : 以下 BIC と略す) を用いて行った。回帰式 (5) を、ラグ次数をさまざまに変えて推定してその BIC を計算し、BIC が最小になるときの最高次のラグ次数を最終的な p として選択するのである。

推定に用いた統計ソフトは TSP のバージョン 5.0 であるが、そこでは、BIC は次の式で計算されている。

$$BIC = \frac{1}{2} \left\{ T(1 + \log 2\pi) + T \log \left(\frac{SSR}{T} \right) + (p+1) \log T \right\} \quad (6)$$

ここで、対数は自然対数であり、 SSR は当該回帰式を OLS 推定した時の残差平方和である。

BIC は複数個計算されたときの値の差のみに意味があり、値そのものには意味がないため、同一回帰式の BIC でもソフトウェアによって計算式が異なり、したがって出力される値が異なることがあるし、同一のソフトウェアでもバージョンによって BIC の値が異なっていることすらある。実際、TSP でも、バージョン 4.3A での BIC の計算式は上記 (6) とは異なっており、当然な

表 1

変数	$u(-1)$	$\Delta u(-1)$	$\Delta u(-2)$	$\Delta u(-3)$
係数	-4. E-04	0. 21	0. 16	0. 22
t値	-0. 21	4. 2	3. 25	4. 52

がら、出力される BIC の数値も異なる。しかし、同一のソフトウェアの同一バージョンで計算された BIC 同士を比較している限りは、問題は生じない。

BIC を比較しながら (5) を推定した結果、 $p = 3$ とした。そして推定結果は表 1 のようになった。ただし表 1 においては、 $\hat{u}_{t-1}$ を「 $u(-1)$ 」、 $\Delta \hat{u}_{t-1}$ を「 $\Delta u(-1)$ 」、 $\Delta \hat{u}_{t-2}$ を「 $\Delta u(-2)$ 」、などと記している。 $\hat{u}_{t-1}$ の係数の推定値「-4.E-04」は、 -4×10^{-4} の意味である。そして、 $\hat{u}_{t-1}$ の係数の t 統計量がこの場合の ADF 検定の検定統計量である。いま、その値は -0.21 である。有意水準を 5% とすると、臨界値は森棟 (1999) p.319 の「付表 1」の τ_T 欄から -3.4 と求まるので、帰無仮説は棄却されず、対数をとった常用雇用指数の系列が単位根を含んでいるという仮説を棄却できない。

3. ADF-GLS 検定の方法

前節で用いた ADF 検定や Dickey-Fuller 検定（以下 DF 検定と略す）は、広く使われている単位根検定であるが、その検出力、すなわち、対立仮説が正しいという条件のもとで帰無仮説を棄却する確率が、低いことが知られている。もちろん、対立仮説が正しいければ帰無仮説は誤りであり、帰無仮説が誤っているときに帰無仮説を棄却できないのでは、その検定結果は誤判断となるから、検定にとって検出力が低いことは望ましくない性質である。ERS による ADF-GLS 検定は、ADF 検定のこの欠点を改善した検定手法である。本節では、その ADF-GLS 検定の手順について説明する。

これまでと同様に、ある時系列データ $y_1, \dots, y_T$ が (1) で示される DGP から発生していると考え、そのときに、帰無仮説 $H_0 : \alpha = 1$ を対立仮説

$H_1 : \alpha < 1$ に対して検定する検定を考える。帰無仮説が棄却された場合、 $y_1, \dots, y_T$ は単位根を含まない過程であると判断される。

(1) の左側の式は、もし $\{u_t\}$ を誤差項と考えるならば、 t を説明変数とし、 β_0, β_1 を係数とする単純回帰モデルとみなせる。このとき、 β_0, β_1 を係数としたままで、誤差項が $\{u_t\}$ ではなく $\{v_t\}$ になるようにモデルを書き換えてみる。その書き換えは、次のように行える。(1) の左側の式の両辺に α をかけ、時間を 1 期前にずらすと、

$$\alpha y_{t-1} = \alpha \beta_0 + \alpha \beta_1(t-1) + \alpha u_{t-1} \quad (7)$$

となる。そしてこの (7) を (1) の左側の式から右辺は右辺同士、左辺は左辺同士引いた式は、(1) の右側の式を使って、

$$y_t - \alpha y_{t-1} = \beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\{t - \alpha(t-1)\} + v_t \quad (8)$$

と書ける。 α は検定の対象でありもちろん未知であるが、もし仮に既知であったならば、(8) 左辺の $y_t - \alpha y_{t-1}$ 、右辺の $1 - \alpha$ と $t - \alpha(t-1)$ はいずれも求めることができ、これらをそれぞれ 1 つの変数とみなすことにすれば、 $\{v_t\}$ が適当な性質を持つ誤差項と考えることができる場合、(8) を OLS 推定して β_0, β_1 の推定値を求めることができる。これは、一般化最小二乗法 (Generalized Least Squares Method : GLS と略される) と形式的に同じ推定法である。

ADF-GLS 検定は、上記の方法で β_0, β_1 を推定することから始まる。すなわち、(8) における未知の α を、ある定数 $\bar{\alpha}$ について

$$\bar{\alpha} = 1 + \frac{\bar{c}}{T}$$

で計算される $\bar{\alpha}$ で置き換え、さらに (8) の $\{v_t\}$ を適当な誤差項に代えた次の式

$$y_t - \bar{\alpha} y_{t-1} = \beta_0(1 - \bar{\alpha}) + \beta_1\{t - \bar{\alpha}(t-1)\} + error \quad (9)$$

にて, $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$, $1 - \bar{\alpha}$, $t - \bar{\alpha}(t-1)$ をそれぞれ 1 つの変数とみなして, β_0 , β_1 を OLS 推定するのである。ただし, 1 期目のデータは, それぞれ y_1 , 1, t (すなわち 1) とする。(9) の「error」は誤差項を示す。 $\bar{c}$ の値は, DGP が (1) の場合, -13.5 にする。

上記の方法で (9) を推定して得られる β_0 , β_1 の推定値を, それぞれ $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ とおく。これらの推定値を用いて,

$$y_t^d \equiv y_t - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 t \quad (10)$$

なる式で系列 $\{y_t^d\}$ を求める。なお, (10) の右辺は, 通常 residual を求める式

$$y_t - \bar{\alpha}y_{t-1} - \tilde{\beta}_0(1 - \bar{\alpha}) - \tilde{\beta}_1\{t - \bar{\alpha}(t-1)\} \quad (11)$$

とは異なる。

上記の系列 $\{y_t^d\}$ からなる次の式を OLS 推定する。

$$\Delta y_t^d = a_0 y_{t-1}^d + a_1 \Delta y_{t-1}^d + a_2 \Delta y_{t-2}^d + \cdots + a_p \Delta y_{t-p}^d + error \quad (12)$$

ここで, p は $\{v_t\}$ の AR 次数である。 p は通常未知であるから, 何らかの方法で選択する必要がある。小稿 5 節では, BIC による方法を用いている。(12) の a_0 が 0 かどうかを検定する t 検定こそが, ADF-GLS 検定である。ただし, このときの t 検定統計量は, ADF 検定の時と同様に通常の t 分布には従わないし, さらには ADF 検定の検定統計量 τ_τ の分布とも異なる。そのため, ADF-GLS 検定の臨界値を求めるためには独自の分布表が必要になるが, それは ERS の p.825 の「TABLE1」の「C」の部分にある。 T が無限大の場合について同表から引用しておく, 左から 1%点 = -3.48, 2.5%点 = -3.15, 5%点 = -2.80, 10%点 = -2.57 である。

つぎに, $y_1, \dots, y_T$ の DGP に線形トレンド項が含まれていない場合, すなわち DGP が

$$y_t = \beta_0 + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (13)$$

となっている場合の、ADF-GLS 検定の方法を紹介する。ここで、(13) の $\{v_t\}$ は、やはり次数 p の定常な AR 過程であるとする。

DGP に線形トレンド項が含まれる場合に DGP(1) に対応して (9) をたてて OLS 推定したのと同様に、DGP(13) から対応する式

$$y_t - \bar{\alpha}y_{t-1} = \beta_0(1 - \bar{\alpha}) + error \quad (14)$$

をたてて、 $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$ 、 $1 - \bar{\alpha}$ をそれぞれ 1 つの変数とみなして OLS 推定する。ここで、 $\bar{\alpha}$ はやはり $\bar{c} = T(\bar{\alpha} - 1)$ を満たすが、この場合には $\bar{c}$ は -13.5 ではなく -7 とする。(14) は、(9) から DGP における線形トレンド項を除いたものに対応している。(14) を OLS 推定して得られる β_0 の推定値を $\tilde{\beta}_0$ とおき、DGP に線形トレンド項が含まれる場合における (10) に対応する式、

$$y_t^d \equiv y_t - \tilde{\beta}_0 \quad (15)$$

で系列 $\{y_t^d\}$ を求める。

次に、線形トレンド項が含まれる場合における (12) と同じ式を、(15) から求めた $\{y_t^d\}$ を用いてたて、OLS 推定する。このときの (12) の a_0 が 0 かどうかを検定する t 検定こそが、DGP に線形トレンド項が含まれない場合の ADF-GLS 検定である。このときの t 検定統計量は、ADF 検定の時と同様に通常の t 分布には従わないが、その極限分布は、DGP に線形トレンド項も定数項も含まれない場合の ADF 検定の検定統計量の極限分布と同じになる。この検定統計量は、ERS では $\hat{\tau}$ 、森棟 (1999) では τ と記されているが、検定の臨界値を求めるにあたっては、森棟 (1999) p.319 の「付表 1」の τ の欄が使える。

なお、小稿 4 節で述べるように、ERS は、 $y_1, \dots, y_T$ の DGP に定数項も線形トレンド項も含まれていない場合、ADF 検定の検出力は十分高いことを

明らかにしている。ゆえに ERS は、その場合の ADF 検定に代替する検定手法は提案していない。

4. ADF-GLS 検定の背景

この節では、ADF-GLS 検定の手法が提案された背景について、ERS をもとにその概要を説明する。

前節の冒頭において、ADF 検定は検出力が低いと述べたが、検出力の高い検定とはどのようなものであろうか。

検出力の高さという点から最良の検定は、一様最強検定である。一様最強検定とは、検定の対象になっているパラメータがどのような値であっても、検出力が他の検定よりも高い検定のことである。ADF 検定の場合、検出力は (1) における α が 1 より小さいという対立仮説のもとで帰無仮説 $\alpha = 1$ を棄却する確率であるが、仮に、 α が 1 より小さいどのような値のときでも、そのときの検出力が他のどの単位根検定よりも高い単位根検定が存在するとすれば、その検定は一様最強検定である単位根検定の α の値を横軸にとり、検出力を縦軸にとったグラフは、その単位根検定の検出力曲線のグラフとなるが、もし ADF 検定の検出力曲線が、一様最強検定の検出力曲線にぴったり重なるならば、ADF 検定は一様最強検定であることになり、それ以上高い検出力は望めない。ADF 検定の検出力曲線が一様最強検定の検出力曲線を大きく下回っているならば、ADF 検定は検出力が低く、改善が望まれるということになる。このように、一様最強検定が存在すれば、それは検出力の高低の目安となるのだが、一様最強検定は、存在するとは限らない。ADF 検定のように対立仮説が複合仮説 (α がある数値と等号ではなく不等号で結ばれているような形の仮説) である検定には一様最強検定はほとんど存在しないし、実際、単位根検定には一様最強検定は存在しない。そこで、一様最強検定の検出力曲線に代わる、別の目安が必要となる。

このために ERS では、帰無仮説 $H_0: \alpha = 1$ に対して、対立仮説 $H_1': \alpha = \bar{\alpha}$ を検定する検定を考える。この対立仮説のように、パラメータについて 1 点の値だけを考える仮説を単純仮説と呼ぶが、帰無仮説と対立仮説がともに単純仮説の場合、「Neyman-Pearson の補助定理」によって、対立仮説においてパラメータがとる 1 点においてだけ最も検出力が高い検定（これを最強力検定と呼ぶ）を見つけることができる。

いま、小稿 2 節の (1) で記述される DGP における $v_t (t = 1, 2, \dots, T)$ が、平均がすべて 0、分散共分散行列が Σ である多変量正規分布に従っていると仮定する。ここでは Σ は既知とする。DGP が定数項も線形トレンドも含んでいないとき、すなわち (1) の β_0, β_1 がともに 0 であるとき、 $u_t (t = 1, 2, \dots, T)$ は観測可能なデータ y_t に一致するが、 $v_t = u_t - u_{t-1} - (\alpha - 1)u_{t-1}$ であるから、 y_t が与えられたときの α に関する尤度関数を $f(\alpha)$ とすると、それは、

$$f(\alpha) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \Delta u - (\alpha - 1) u_{-1} \}' \Sigma^{-1} \{ \Delta u - (\alpha - 1) u_{-1} \} \right] \quad (16)$$

となる。ただし、 $u_0 = 0$ 、 $\Delta u = (u_1, u_2 - u_1, \dots, u_T - u_{T-1})'$ 、 $u_{-1} = (0, u_1, \dots, u_{T-1})'$ としている。Neyman-Pearson の補助定理は、 H_1' を対立仮説とする単位根検定について

$$\frac{f(\bar{\alpha})}{f(1)} > k \quad (17)$$

となるときに帰無仮説を棄却する検定が最強力検定となることを示す。ただし k は、帰無仮説のもとで (17) が成り立つ確率が検定の有意水準になるように選ばれる正の定数である。

さて、

$$L(\alpha) = \{ \Delta u - (\alpha - 1) u_{-1} \}' \Sigma^{-1} \{ \Delta u - (\alpha - 1) u_{-1} \} \quad (18)$$

とおくことにすると, α に関する対数尤度関数は

$$\ln f(\alpha) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} L(\alpha) \quad (19)$$

とかける。一方, (17) の両辺に自然対数をとれば

$$\ln f(\bar{\alpha}) - \ln f(1) > \ln k \quad (20)$$

となるが, (19) より (20) は

$$-\frac{1}{2} L(\bar{\alpha}) + \frac{1}{2} L(1) > \ln k$$

であり, さらに

$$L(\bar{\alpha}) - L(1) < -2 \ln k \quad (21)$$

となる。(21) の左辺は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} L(\bar{\alpha}) - L(1) &= \{\Delta u - (\bar{\alpha} - 1)u_{-1}\}' \Sigma^{-1} \{\Delta u - (\bar{\alpha} - 1)u_{-1}\} \\ &\quad - \Delta u' \Sigma^{-1} \Delta u \\ &= \Delta u' \Sigma^{-1} \Delta u - (\bar{\alpha} - 1)u_{-1}' \Sigma^{-1} \Delta u \\ &\quad - (\bar{\alpha} - 1) \Delta u' \Sigma^{-1} u_{-1} \\ &\quad + (\bar{\alpha} - 1)^2 u_{-1}' \Sigma^{-1} u_{-1} - \Delta u' \Sigma^{-1} \Delta u \\ &= (\bar{\alpha} - 1)^2 u_{-1}' \Sigma^{-1} u_{-1} - 2(\bar{\alpha} - 1) \Delta u' \Sigma^{-1} u_{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

(22) の最後の等号は, $\Delta u' \Sigma^{-1} u_{-1}$ がスカラーであるからその転置をとったものと等しく, それゆえ

$$\Delta u' \Sigma^{-1} u_{-1} = \left(\Delta u' \Sigma^{-1} u_{-1} \right)' = u_{-1}' \Sigma^{-1} \Delta u$$

となることにより成立する。ここで, ある行列の逆行列の転置行列はその行列の転置行列の逆行列になるというよく知られた定理と, Σ は分散共分散行

列なので対称行列であることから、 $(\Sigma^{-1})' = (\Sigma')^{-1} = \Sigma^{-1}$ となることを用いている。さらに $\bar{c} \equiv T(\bar{\alpha} - 1)$ とおくならば、(22) は、

$$L(\bar{\alpha}) - L(1) = \frac{\bar{c}^2}{T^2} u_{-1}' \Sigma^{-1} u_{-1} - 2 \frac{\bar{c}}{T} u_{-1}' \Sigma^{-1} \Delta u \quad (23)$$

のように書き換えられる。すなわち、ある与えられた $\bar{c}$ に対し、(23) が小さい値をとるときに帰無仮説を棄却するという検定が、 H_1' を対立仮説とする単位根検定の最強検定となることが、(21) よりわかる。検定の対象であるパラメータ α に対して $c = T(\alpha - 1)$ とおくと、この検定は、 $\bar{c}$ が c に一致するその一点において、 H_1' を対立仮説とする他のどの検定よりもその検出力が高いことから、一点最適検定と呼ばれる。一点最適検定は、 c の各値に対し最大の検出力を達成する。そこで、 c を横軸にとり検出力を縦軸にとった平面上で、 c の各値に対応した一点最適検定の $\bar{c} = c$ における検出力をつなげた曲線を作ると、その曲線は検出力曲線の上限となる。そのような曲線は検出力の包絡線と呼ばれるが、包絡線を検出力曲線として持つ検定が現実存在するかどうかはともかくとして、一点最適検定の検出力の包絡線は、実在するさまざまな検定の検出力の高さを評価する上での基準として使える。

DGP が定数項のみを含み線形トレンドを含んでいないとき、すなわち、2 節 (1) の β_1 が 0 であって β_0 が 0 でないときは、DGP に非確率項が含まれていない場合と異なり u_t と y_t は等しくないが、ERS はその場合でも、(23) の u_t を y_t に替えた検定は、漸近的な検出力が (23) の検定と変わらないことを示した。したがってこの場合でも、上記の包絡線は検出力の上限となる。

次に、DGP が定数項と線形トレンドの両方を含んでいる場合、すなわち、(1) の β_1 も β_0 も 0 でない場合を考える。ある a について、

$$y_a = (y_1, y_2 - ay_1, \dots, y_T - ay_{T-1})'$$

とおく。 y_a は T 次元列ベクトルである。また $z_t = (1, t)$ について、

$$Z_a = (z_1, z_2 - az_1, \dots, z_T - az_{T-1})'$$

とおく。 Z_a は $T \times 2$ の行列である。そして、 $\beta = (\beta_0, \beta_1)'$ とするとき、 y_a と Z_a の a を α に代えた $y_\alpha - Z_\alpha \beta$ は T 次元列ベクトルであって、その要素は 3 節 (8) の右辺から左辺の $\beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\{t - \alpha(t - 1)\}$ を引いた

$$y_t - \alpha y_{t-1} - [\beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\{t - \alpha(t - 1)\}] \quad (t = 1, \dots, T)$$

である (ただしその第 1 要素は $y_1 - (\beta_0 + \beta_1)$ となる)。さらに、 $L(\alpha, \beta)$ を

$$L(\alpha, \beta) = (y_\alpha - Z_\alpha \beta)' \Sigma^{-1} (y_\alpha - Z_\alpha \beta)$$

なる 2 次形式とすると、ERS によれば、

$$L_T^* = \min_{\beta} L(\bar{\alpha}, \beta) - \min_{\beta} L(1, \beta)$$

が小さい値をとるときに H_0 を棄却するという検定が、 H_1' を対立仮説とする単位根検定の最強力検定であり、一点最適検定である。 β_1 も β_0 も 0 であるときに、 L_T^* は、(22) の 1 番上の右辺より、(23) と等しいことがわかる。この検定においても、 c の各値に対応した検出力をつなげた包絡線は、検出力曲線の上限となる。ERS では、シミュレーションによる検出力の包絡線のグラフを提示しているが、それによると包絡線は、 c の絶対値の単調増加関数になっている。

これまでは、 v_t の分散共分散行列 Σ が既知であると仮定され、また、 v_t は多変量正規分布に従うと仮定されていたが、次にこれらの仮定を緩め、 v_t が定常な AR 過程に従っていればよいとする。

DGP が定数項と線形トレンドの両方を含んでいるか、もしくは定数項のみを含んでいる場合には、仮に α が既知であったとして $y_t - \alpha y_{t-1}$ 、 $1 - \alpha$ 、 $t - \alpha(t - 1)$ をそれぞれ 1 つの変数とみなし、(8) を v_t を誤差項として OLS

推定したときの残差平方和を $S(\alpha)$ とおく。DGP が非確率項を含んでいない場合には、 $y_t - \alpha y_{t-1}$ の平方和を $S(\alpha)$ とする（ただし第 1 項目は y_1^2 ）。そして $\gamma(k) \equiv E(v_t v_{t-k})$ として

$$\omega^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)$$

とおくとき、ERS はいくつかの仮定の下で、

$$P_T = \frac{S(\bar{\alpha}) - \bar{\alpha}S(1)}{\hat{\omega}^2}$$

の漸近分布が $L_T^* - \bar{c}$ の漸近分布と等しいことを証明した。ただし、 $\hat{\omega}^2$ は $c = T(\alpha - 1)$ を固定したときの ω^2 の一致推定量である。それゆえ、 v_t に対する仮定が緩められた場合でも、一点最適検定の漸近的な検出力は P_T より求めることができ、したがって検出力の上限となる包絡線も求めることができる。なお、過去の研究によると、上記の検定統計量の検出力曲線のうち、検出力が 0.5 に近いところで包絡線に接しているものは、検出力の包絡線に近寄ったものであると、ERS では記している。

ERS は、上記のように導出された一点最適検定の検出力の包絡線と DF 検定の検出力曲線とを、シミュレーションによりグラフ化し、比較した。ERS の p.822 の「FIGUR1」、p.823 の「FIGUR2」、p.824 の「FIGUR3」が、そのグラフである。グラフの縦軸はもちろん検出力だが、横軸には α ではなく $-c$ をとっている。シミュレーションにあたり、検定統計量の値を計算するサンプルの大きさは 500 とし、それを 20000 回繰り返している。名目上の有意水準は 5%とされている。

まず、DGP に定数項も線形トレンドもないとき、DF 検定の検定統計量は $\hat{\tau}$ であるが、 $\hat{\tau}$ の検出力曲線はこの場合の一点最適検定の検出力の包絡線に非常に近寄ったものとなる（ERS 「FIGUR1」参照）。前述のように $\hat{\tau}$ による検定は漸近的にも一様最強力検定ではないのだが、ERS はこの結果から、

τ による検定を実用上、ほぼ上限の検出力をもつ検定とみなして差し支えないと結論付けている。ゆえに ERS は、DGP に定数項も線形トレンドもないと想定される場合の DF 検定に代替する検定法は提案していない。

DGP において定数項が含まれるが線形トレンドが含まれない場合は、検出力の上限となる一点最適検定の包絡線は、DGP に定数項も線形トレンドもないときと漸近的に同じである。この場合の DF 検定統計量を ERS は τ^μ と記しているが、 τ^μ の検出力曲線は、 τ の場合と異なり、包絡線を大きく下回る (ERS「FIGUR2」参照)。これは、 τ と異なり、 τ^μ の実現値を求めるにあたり、 β_0 の OLS 推定値が使われることによると考えられる。この場合、包絡線の縦軸の座標 (検出力) 0.5 に対するグラフの横軸上の $-c$ の座標はおよそ 7 である。

DGP において定数項と線形トレンドが含まれる場合も、対応する DF 検定統計量 τ^τ の検出力曲線は、一点最適検定の検出力の包絡線を下回る (「FIGUR3」)。ただし、グラフを見る限り、検出力曲線が包絡線を下回る度合いは、定数項はあるが線形トレンドがない場合に比べ小さくなっている。またこの場合は、線形トレンドがない場合に比べ、一点最適検定の検出力の包絡線は、グラフの形は同じであるものの、より下方にシフトしており、包絡線の縦軸の座標 0.5 に対するグラフの横軸上の $-c$ の座標は 13.5 となっている。

ERS は、以上の結果について、名目上の有意水準を 1% および 10% に変えても、同じ結果が得られたと記している。

2 つの検定の差を計る指標として、「Pitman の漸近相対効率 (Asymptotic Relative Efficiency : 以下 ARE と略す)」がある。これは、ある検出力において、各検出力曲線の横軸座標 (この場合 $-c$) の比である。この ARE を用いると、一点最適検定の検出力の包絡線と、各検定の検出力曲線との離れ具合を計ることもできる。すなわち、ある検出力において、各検出力曲線の横

軸座標を包絡線の横軸座標で割るのである。定数項はあるが線形トレンドがない場合、検出力 0.5 に対し、包絡線と $\hat{\tau}^{\mu}$ の検出力曲線の ARE は 1.91 となる。上述のように、 $\bar{c} = c$ のときの検出力が 0.5 である一点最適検定は包絡線とはほぼ同じ検出力曲線を持つことが知られており、また $c = T(\alpha - 1)$ であり c は T に比例するから、検出力 0.5 を達成するために、 $\hat{\tau}^{\mu}$ は一点最適検定の倍近い大きさのサンプルが必要となることがわかる。ちなみに検出力 0.5 に対し、包絡線と $\hat{\tau}^{\tau}$ の検出力曲線の ARE は 1.25 であった。

シミュレーションの結果をまとめると、 $\hat{\tau}$ 検定はそれ以上の高さの検出力を望むことはできず、 $\hat{\tau}^{\mu}$ 検定と $\hat{\tau}^{\tau}$ 検定は検出力が低く改善が望ましいということになる。 $\hat{\tau}^{\mu}$ 検定や $\hat{\tau}^{\tau}$ 検定の検出力の低さの原因は、 $\hat{\tau}$ 検定統計量の実現値を求めるにあたっては用いられなかった β_0 や β_1 の OLS 推定値に求められ、この OLS 推定値を代替的な推定値に置き換えることにより、検出力を高めることができると期待される。

3 節で紹介した ADF-GLS 検定の手順は、DF 検定における β_0 や β_1 の OLS 推定値を、DGP に定数項のみが含まれている場合は $\bar{c} = -7$ 、定数項と線形トレンドが含まれている場合は $\bar{c} = -13.5$ として、 $\bar{\alpha} = 1 + \bar{c}/T$ を用いて GLS の手法で推定した推定値で置き換えるというものであり、ERS のシミュレーション結果によれば、各々の検出力曲線と一点最適検定の検出力の包絡線との差は、きわめて小さくなっている (ERS 「FIGUR2」 「FIGUR3」 参照)。

5. ADF-GLS 検定の適用例

本節では、ADF-GLS 検定を用いた分析例を示す。

例として取り上げる時系列データは、2 節と同じ、日本の 1974 年 1 月期から 2007 年 1 月期までの常用雇用指数 (月次、季節調整済み、従業員 30 人以上の事業所が対象、 $T = 397$) である。やはり 2 節と同様に、分析に先立ち、

表 2

変数	$y(-1)$	$\Delta y(-1)$	$\Delta y(-2)$	$\Delta y(-3)$	$\Delta y(-4)$
係数	4. E-07	0. 26	0. 23	0. 28	0. 23
t値	0. 11	5. 3	4. 6	5. 7	4. 6

分散安定化のため系列に自然対数をとっておく。

2 節においては、この対数をとった常用雇用指数の系列に ADF 検定を適用した結果、有意水準 5% で帰無仮説は棄却されず、この系列が単位根を含んでいるという仮説を棄却できないという結果となった。しかし、ADF 検定は検出力が低いことが知られている。仮に、実は対立仮説が正しい、すなわち系列が単位根を含んでいなかったのだとしても、この検定がそれを「検出」できなかっただけかもしれないのである。このような背景から、ADF 検定より検出力の高い ADF-GLS 検定を行う動機が生まれる。

そこで、対数をとった常用雇用指数の系列を ADF-GLS 検定で分析してみる。

2 節の分析を援用し、DGP には定数項も線形トレンド項も含まれていると想定する。その場合には、小稿 3 節で説明したように、 $\bar{c}=-13.5$ としたうえで $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$, $1 - \bar{\alpha}$, $t - \bar{\alpha}(t-1)$ をそれぞれ 1 つの変数として（ただし、1 期目のデータは、それぞれ y_1 , 1 , 1 とする）(9) の β_0, β_1 を OLS 推定し、その推定値を用いて (10) より系列 $\{y_t^d\}$ を求める。この $\{y_t^d\}$ を使い (12) を推定するとき、(12) の a_0 の t 統計量が ADF-GLS 検定の検定統計量となる。

ADF 検定の場合と同様、(12) の推定にあたっては、未知である p の選択も同時に行う必要がある。BIC を比較しながら (12) を推定した結果、 $p = 4$ とした。

そして推定結果は表 2 のようになった。ただし表 2 においては、 y_{t-1}^d を「 $y(-1)$ 」、 Δy_{t-1}^d を「 $\Delta y(-1)$ 」、 Δy_{t-2}^d を「 $\Delta y(-2)$ 」、などと記している。

上述のように、変数 y_{t-1}^d の係数の t 統計量がこの場合の ADF-GLS 検定の

検定統計量であり、その値は 0.11 であった。有意水準を 5% とすると、臨界値は ERS の「TABLE1」の「C」から -2.80 と求まるので、ADF 検定の場合と同様に、帰無仮説は棄却されない。ADF 検定より検出力の高い ADF-GLS 検定を行っても ADF 検定と同じ結果が得られたわけで、2 節の ADF 検定の結果は支持されることとなった。

参考文献

- Dickey, David A., and Wayne A. Fuller (1979), “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, *Journal of American Statistical Association*, Vol.74, pp.427–431.
- Elliott, Graham, Thomas J. Rothenberg and James H. Stock(1996), “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root”, *Econometrica*, Vol.64, pp.813–836.
- Fuller, Wayne A.(1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley.
- Fuller, Wayne A.(1996), *Introduction to Statistical Time Series* (2nd ed.), Wiley.
- 黒住英司 (2008), 「経済時系列分析と単位根検定：これまでの発展と今後の展望」, 『日本統計学会誌』, 第 38 巻, シリーズ J, 第 1 号, pp.39–57.
- 森棟公夫 (1999), 『計量経済学』 東洋経済新報社.
- Perron, Pierre (1989), “The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis”, *Econometrica*, Vol.57, pp.1361–1401.
- 坂野慎哉 (2010), 「ADF-GLS 検定とその用例」, 『京都大学経済論叢』, 第 183 巻第 2 号, pp.35–44.
- Schwarz, Gideon (1978), “Estimating the Dimension of a Model”, *the Annals of Statistics*, Vol.6, pp.461–464.