No. 2026-001

可制御性・可観測性と動的多次元プリンシパル・エイジェント理論

2026 年 4 月

早稲田大学商学学術院教授

鈴木　孝則

No.2026-001
2026 年 4 月刊行

可制御性・可観測性と動的多次元プリンシパル・エイジェント理論

鈴木孝則[*1]

概要

本稿は，制御理論における可制御性と可観測性の概念を導入することにより，多期間・多次元のプリンシパル・エイジェント問題における業績評価と最適契約の構造を統一的に捉える理論的枠組みを提示する．企業の価値創造過程を状態空間モデルとして表現すると，エイジェントの行動によって動かしうる状態の集合は可制御部分空間として，業績指標を通じて識別しうる状態の集合は可観測部分空間として特徴づけられる．本稿は，契約にとって本質的な状態成分が，これら二つの部分空間の交差，すなわち契約関連部分空間によって与えられることを示す．さらに，追加的な直交性条件のもとでは，最適な業績感応度ベクトルの本体が，契約関連部分空間の像である契約関連信号空間への射影として特徴づけられることを示す．この結果は，情報性原理，多タスク理論，責任会計における controllability principle を，単一の動的多次元枠組みのもとで再解釈することを可能にする．加えて，本稿は，観測精度の改善，新たな業績指標の追加，組織複雑性の上昇が契約設計に与える比較静学的含意を導き，実証研究および応用研究への接続可能性を示す．なお，本稿では観測構造を所与とし，その内生的設計問題は将来課題として位置づける．

キーワード

可制御性，可観測性，業績評価，最適契約，状態空間モデル

[*1] 早稲田大学商学学術院教授

No. 2026-001
Published in April 2026

Controllability, Observability, and Optimal Contracting in Dynamic Multidimensional Principal-Agent Models

Takanori Suzuki*[1]

Abstract

This paper develops a unified theoretical framework for performance evaluation and optimal contracting in dynamic, multidimensional principal-agent settings by introducing the control-theoretic concepts of controllability and observability. Modeling the firm's value-creation process as a state-space system makes it possible to characterize the set of states that can be influenced by the agent's actions as the controllable subspace, and the set of states that can be identified through performance measures as the observable subspace. The paper shows that the states that are essential for contracting are given by the intersection of these two subspaces, which it calls the contract-relevant subspace. Moreover, under an additional orthogonality condition, the main component of the optimal performance-sensitivity vector can be characterized as the projection onto the contract-relevant signal space, defined as the image of the contract-relevant subspace under the observation structure. This result provides a unified reinterpretation of the informativeness principle, multitask incentive theory, and the controllability principle in responsibility accounting within a single dynamic and multidimensional framework. The paper also derives comparative-static implications regarding improvements in measurement precision, the introduction of new performance measures, and increases in organizational complexity, and it discusses the framework's implications for empirical and applied research. The observation structure is taken as given, while its endogenous design is left for future research.

Keywords

Controllability, Observability, Performance Evaluation, Optimal Contracting, State-Space Model

*[1] Professor, Faculty of Commerce, Waseda University

1　序論

企業における業績評価の中心的課題は，何を測定し，何に報いるべきか，という問いにある．プリンシパル・エイジェント理論は，この問いに対して，情報の非対称性のもとでどのようなシグナルを契約へ組み込むべきか，またどのような誘因設計が望ましいかについて，豊かな知見を蓄積してきた．Holmström (1979) の情報性原理は，業績指標が契約に含まれるべき条件を明確にし，Holmström and Milgrom (1991) は多タスク環境のもとで，測定しやすい活動への過度な誘因が他の重要活動を歪めうることを示した．さらに，Banker and Datar (1989) や Feltham and Xie (1994) は，複数業績指標の重みづけや追加的情報価値を分析し，Lambert (2001) や Christensen and Demski (2003) は，会計情報が契約と統治において果たす役割を包括的に整理している．

しかし，こうした文献が与えてきた洞察の多くは，なお二つの制約のもとに置かれている．第一に，既存研究の多くは，業績評価を静学的なシグナル構造の問題として扱う傾向を持つ．すなわち，エイジェントの努力は当期成果に影響するものとして表現されることが多く，現在の行動が将来の企業状態へどのように累積的・波及的に作用するかは，明示的には扱われない．第二に，動的契約理論は履歴依存性や継続効用の役割を明らかにしてきた一方，人的資本，研究開発ストック，顧客基盤，組織能力といった，経済的に意味のある複数の潜在状態が，行動によってどこまで動かしうるのか，またどこまで観測可能な業績指標によって捉えられるのかを，同時に形式化してはいない．結果として，「何が将来価値を生むのか」「そのうち何が行動で動かせるのか」「そのうち何が観測できるのか」という三つの問いは，しばしば別々の理論で論じられてきた．

本稿の問題意識は，まさにこの分断にある．現代企業の価値創造は，単一の当期利益ではなく，多段階で相互依存的な状態変数の動学によって支えられている．研究開発投資は直ちに利益にならなくとも将来の知識ストックや製品パイプラインを形成し，人材育成は短期利益を圧迫しつつも将来の生産性を高め，顧客基盤やブランドは長期的な収益性を左右する．にもかかわらず，実際に契約へ組み込まれるのは，それらの潜在状態そのものではなく，それらの不完全でノイズを伴う観測指標である．したがって，業績評価の本質は，単に「どの指標が観測できるか」という問いではない．より根本的には，どの状態がエイジェントの行動によって動かしうるのか，どの状態が観測を通じて識別しうるのか，そしてその交差がどこにあるのかを問う必要がある．

本稿は，この問題を，制御理論における可制御性（controllability）と可観測性（observability）の概念を導入することによって捉え直す．具体的には，企業の価値創造過程を，潜在状態ベクトル s_t，エイジェントの努力 e_t，観測される業績指標 y_t からなる線形確率状態空間システムとして表現する．すなわち，

$$s_{t+1} = As_t + Be_t + C\theta_t + \varepsilon_t, \quad y_t = Hs_t + Du_t + \eta_t$$

と定式化する．ここで A は状態遷移行列，B は努力の作用構造，H は観測構造，ε_t は状態撹乱，η_t は測定誤差である．この表現により，エイジェントの行動がどの状態方向を動かしうるかは (A, B) の可制御性として，また業績指標がどの状態方向を識別しうるかは (A, H) の可観測性として，厳密に特徴づけることができる．

この枠組みのもとで，本稿の中心的主張は，契約にとって本質的な状態成分は，可制御部分

空間 $\mathcal{S}_c$ と可観測部分空間 $\mathcal{S}_o$ の交差

$$\mathcal{S}_{co} = \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_o$$

によって特徴づけられる，という点にある．直観的に言えば，エイジェントの努力で動かしえない状態は，たとえよく観測できてもインセンティブの直接的対象にはなりえず，逆に，努力で動かせるとしても観測できない状態は契約に組み込めない．したがって，最適契約の核となるのは，可制御であり，かつ可観測でもある状態に関する情報である．本稿では，カルマン分解を用いて状態空間を，可制御かつ可観測，可制御だが不可観測，制御不能だが可観測，制御不能かつ不可観測という四つの部分に分け，この構造が業績評価の問題をどのように規定するかを明らかにする．

本稿の第一の貢献は，契約理論における業績評価の問題を，制御と観測の交差として再定式化したことである．情報性原理は，あるシグナルが行動について追加的情報を持つかを問うた．しかし本稿が示すのは，その問いの背後には，そもそもどの状態が行動によって動かしうるかという，より基礎的な構造があるということである．多タスク環境における歪み，複数業績指標の congruity や diversity，責任会計における controllability principle，さらには動的契約理論における履歴依存性は，この見方のもとで統一的に読み替えられる．すなわち，本稿は，従来は別々に論じられてきた論点に対して，単一の幾何学的基盤を与える．

第二の貢献は，所与の観測構造のもとでの最適契約の構造を特徴づける点にある．本稿では，まず，与えられた線形契約のもとで，エイジェントの最適努力が自らの状態推定値に依存する線形フィードバックとして表されることを示す．ついで，追加的な直交性条件のもとでは，最適な業績感応度ベクトル β^* が，可制御・可観測部分空間の像

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co})$$

に属し，無制約最適解 $\tilde{\beta}$ の $\mathcal{Y}_{co}$ への射影として表現できることを示す．言い換えれば，観測空間のうち $\mathcal{Y}_{co}$ の外側に荷重を置いても，努力誘因を改善しない一方で，エイジェントの負うリスクのみを増加させる場合には，最適契約の本体は $\mathcal{Y}_{co}$ 上に集中する．他方で，本稿は同時に，こうした条件が外れる場合には，$\mathcal{Y}_{co}$ の外側にあるシグナルが，契約関連成分についての推定精度を高める補助的フィルタとして価値を持ちうることも示す．したがって，本稿の主張は，「可制御でないシグナルは常に無価値である」という粗い命題ではなく，契約の中心は $\mathcal{S}_{co}$ にあるが，それ以外のシグナルも $\mathcal{S}_{co}$ に関する推定を改善する限りで補助的な意味を持ちうる，というものである．

第三の貢献は，本稿の理論が明確な実証プログラムを伴う点にある．状態空間表現のもとでは，企業ごとの状態遷移行列 A，努力作用行列 B，観測行列 H，測定誤差分散 R から，可制御性と可観測性の程度を構造的に測ることができる．これにより，どの企業がより大きな契約関連部分空間を持つのか，どのような情報システム改革や組織再編がその観測可能性や controllability を高めるのか，そしてその変化が報酬契約や KPI 選択にどのように反映されるのかを，横断面・時系列・構造推定のいずれの水準でも検証できる．したがって，本稿は，契約理論と会計実証研究のあいだに，より具体的で数量的な接点を与える．

第四に，本稿の理論は，多様な応用領域を持つ．動的能力の蓄積，研究開発と長期インセンティブ，多部門組織における内部業績評価，移転価格制度，ESG 指標の契約への統合などは，一見異なる問題に見えるが，その根底には同じ構造がある．すなわち，将来価値を左右する潜在状態のうち，何が行動によって動き，何が測定によって識別され，その交差がどこにあるか，

という問題である．本稿は，こうした多様な現象を一つの理論的レンズのもとで理解する道を開く．

もっとも，本稿の射程は意識的に限定されている．本稿が扱うのは，所与の観測構造 H のもとで，最適契約がどの状態成分に依拠すべきか，という問題である．したがって，企業がどの測定行列あるいはどの測定集合を選べば observability を改善・最適化できるか，すなわち観測構造そのものの内生的設計問題には踏み込まない．この問題は明らかに重要であり，本稿の理論から自然に導かれる次の研究課題であるが，それ自体が独立した理論的広がりを持つため，本稿では将来課題として位置づけるにとどめる．換言すれば，本稿は，観測システムをどう設計するかを論じる前に，与えられた観測システムのもとで契約上何が本質的かを明らかにすることを目的としている．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，情報性原理，多タスク理論，動的契約理論，責任会計，組織設計論，制御理論の関連文献を整理し，本稿の位置づけを明確にする．第 3 節では，企業を線形確率状態空間システムとして定式化し，可制御性，可観測性，カルマン分解，契約関連部分空間を定義する．第 4 節では，線形契約のもとでの均衡を導出し，エイジェントの最適努力と，所与の条件のもとでの最適契約の射影構造を示す．第 5 節では，本稿の一般理論が Holmström and Milgrom (1991)，Feltham and Xie (1994)，Lambert (2001) とどのように接続し，それらをどのように包含・再解釈するかを示す．第 6 節では，理論から導かれる実証的含意，制度的含意，応用可能性を整理する．第 7 節では，本稿全体の理論的・実証的・制度的含意を総括する．

本稿の中心的メッセージを先取りして述べれば，効果的な業績評価とは，単に測定可能なものを測定することではなく，エイジェントの行動によって動かしうる状態についての観測可能な情報に報いることである，という点に尽きる．本稿は，この一見直観的な原理を，多期間・多次元の契約環境において数学的に明示し，その理論的・実証的・実務的含意を引き出すことを試みる．

2　先行研究

2.1　情報性原理と静学的業績評価

プリンシパル・エイジェント理論における古典的出発点は，Holmström (1979) の情報性原理である．Holmström は，ある業績指標が最適契約に含まれるべきかどうかは，その指標がエイジェントの行動について追加的な情報を提供するかどうかによって決まることを示した．この視点は，業績評価の問題を，単なる成果の記述ではなく，行動に関する統計的推論の問題として捉え直した点で画期的であった．他方，この理論は，どの指標が「情報的か」を明らかにする一方で，複数指標をどのように統合し，どの程度の重みを与えるべきかについては，なお限定的であった．

この点を前進させたのが，Banker and Datar (1989) である．彼らは，複数のシグナルを線形に集約する状況において，最適な業績評価指標の重みづけが，各指標の感度と精度に依存することを示した．すなわち，努力への反応性が高く，かつノイズの小さい指標ほど，より大きな契約上の役割を担う．他方，Baker (1992) は，契約に用いられる業績指標がプリンシパルの真の目的関数と必ずしも一致しないとき，たとえエイジェントがリスク中立的であっても，最適契約は一般にファーストベストを実現しないことを示した．これらの研究は，測定可能な指標

と最終目的との乖離が，誘因設計の中心問題であることを明確にしたが，なおその分析の中心は静学的なシグナル構造に置かれている．

2.2　多タスク・多指標モデル

Holmström and Milgrom (1991) は，多タスク環境におけるインセンティブ契約の分析を通じて，観測しやすい活動に強い誘因を与えると，観測しにくい活動が過少供給されうることを示した．この結果は，「測りやすいものだけを強く測る」ことの危険を理論的に明確にしたものであり，固定給や弱い誘因が合理的となる状況を説明した．その後，Feltham and Xie (1994) は，複数の業績指標を用いることの価値を，各指標の congruity と diversity に即して分析し，指標が企業価値とどれだけ整合的であるか，また既存指標に対してどれだけ追加的な情報を与えるかが，契約上の価値を決めることを示した．Gibbons (1998) の整理が示すように，この系譜は，業績測定の歪み，主観評価，技能形成，組織内部のインセンティブ問題へと広がっていった．

もっとも，この文献の中心的な関心は，複数の活動間での努力配分の歪みや，複数指標の追加的情報価値にあり，企業状態そのものの動学や，現在の努力が将来のどの状態に到達しうるのかという「到達可能性」の問題は，明示的には扱われていない．したがって，多タスク問題と多指標問題は豊かに論じられてきたにもかかわらず，どの状態が可制御であり，どの状態が可観測であるかを同時に記述する一般的な状態空間の枠組みは，なお不在であったといえる．

2.3　動的契約理論

動的契約理論は，Rogerson (1985) や Spear and Srivastava (1987) によって，繰り返しモラルハザードのもとでの最適契約が強い履歴依存性を持つことを示すところから本格化した．とりわけ Spear and Srivastava (1987) は，エイジェントの継続効用を状態変数として用いる再帰的表現を与え，複雑な多期間契約を tractable に分析する道を開いた．さらに Sannikov (2008) は，連続時間の枠組みで継続効用を状態変数とする方法を洗練し，微分方程式を用いて最適契約を特徴づける強力な手法を示した．Cvitanić and Zhang (2013) は，こうした連続時間契約理論を確率制御の観点から体系化している．

この文献の大きな成果は，動的契約の本質が履歴依存性と約束効用の動学にあることを明らかにした点にある．しかし同時に，そこでの「状態」はしばしば継続効用や信念のような契約上の要約統計量であり，人的資本，研究開発資産，組織能力，顧客基盤といった経済的に意味のある複数の状態変数が，エイジェントの行動によってどのように推移し，どこまで観測可能であるかを，工学的な意味での可制御性・可観測性として扱うものではない．したがって，動的契約理論は豊かである一方，動的「業績測定」の問題を，経済状態の多次元動学として正面から扱う余地を残している．

2.4　会計研究における契約理論と責任会計

会計研究の文脈では，Lambert (2001) が契約理論と会計の接点を包括的に整理し，会計情報が報酬契約において果たす役割，ならびに業績評価目的と企業価値評価目的とで情報集約のロジックが異なりうることを明らかにした．また，Christensen and Demski (2003) は，会計を本質的に情報内容の問題として捉え，会計システムが意思決定と評価の双方に関与することを強

調した．これらの研究は，本研究が依拠する「測定の価値は，単なる可観測性ではなく，契約上意味を持つ情報にある」という立場と深く通じている．他方，責任会計の文脈で長く論じられてきた controllability principle については，Antle and Demski (1988) が，素朴な意味での「管理者がコントロールできるものだけで評価すべきだ」という命題は，最適なエージェンシー契約の論理からはそのまま導かれないことを示している．むしろ，業績評価において重要なのは，当該指標が行動に関する情報をどのように含むかである．ここに，本稿との直接的な接点がある．本稿は，この洞察をさらに一歩進めて，「可制御性」を口語的・制度的概念としてではなく，状態空間上の可制御性として形式化し，さらにそれを可観測性と交差させることで，責任会計上の直観と契約理論上の情報内容の論理とを統一的に捉えようとする．

2.5 組織設計，権限配分，情報構造

より広い組織の経済学の文脈では，Milgrom and Roberts (1990, 1992) が，技術，情報，組織慣行の間に補完性が存在することを示し，情報システムの設計と誘因制度が相互依存的に決まることを強調した．さらに，Aghion and Tirole (1997) は formal authority と real authority を区別し，情報の所在が実質的な意思決定権限を規定することを示した．Dessein (2002) もまた，情報を多く持つエージェントに対して，コミュニケーションよりも権限委譲が優越しうることを示している．これらの研究は，組織内で「誰が何を知り，誰が何を動かせるか」という構造が，契約や組織設計の核心にあることを教えている．

本研究は，この組織設計上の洞察を，より明示的な線形システムの表現に落とし込む．すなわち，努力がどの状態に到達しうるかを表す行列 B は，権限配分や行動可能性の構造と結びつき，観測方程式の行列 H は，情報システムや会計システムがどの状態をどの程度捉えるかと結びつく．この意味で，本研究は組織設計論との親和性が高い．ただし，本稿では H の設計それ自体は内生化せず，観測構造は所与とする．どの測定行列あるいは測定集合を選べば observability を改善できるかという問題は，本稿の理論を踏まえた重要な将来課題である．

2.6 制御理論と本研究の位置づけ

制御理論においては，Kalman and Bucy (1961) の線形フィルタリング理論，Kalman (1963) の状態空間表現，そして Kailath (1980) や Zhou, Doyle, and Glover (1996) による体系化を通じて，可制御性，可観測性，推定，安定性といった概念が精緻に発展してきた．これらの概念は，工学においては，どの状態が入力によって到達可能であり，どの状態が出力から識別可能であるかを判定するための基礎道具である．ところが，経済学，とりわけ契約理論においては，確率制御の方法そのものは取り込まれてきた一方で，可制御性・可観測性という線形システムの中核概念を，業績評価と最適契約の構造に直接結びつける試みは限られている．

3 モデル

前節で見たように，既存文献は，情報性原理，多タスク問題，複数業績指標の利用，動的契約の履歴依存性について，それぞれ豊かな知見を蓄積してきた．他方で，企業の価値創造過程そのものを多次元状態の動学として明示的に表現し，そのうえで「エイジェントの行動によって何が動かしうるのか」と「プリンシパルが何を観測から識別しうるのか」を同時に定式化す

る統一的枠組みは，なお十分に整備されていない．本節では，このギャップを埋めるため，企業を線形確率状態空間システムとして表現し，業績評価と最適契約の問題を，可制御性と可観測性の交差として定式化する．

3.1　経済環境とタイミング

時間は離散的であり，$t = 0, 1, 2, ..., T$ とする．ここで T は有限でも無限でもよいが，以下では表記の簡潔さのため，必要に応じて無限期間を念頭に置く．経済には一人のプリンシパルと一人のエイジェントが存在する．プリンシパルは企業価値を最大化したい一方，エイジェントは私的に費用のかかる努力を選択する．

各期において，企業は潜在的な状態ベクトル $s_t \in \mathbb{R}^n$ によって要約される．この状態は，研究開発ストック，人的資本，業務プロセスの質，顧客基盤，ブランド資産など，企業価値の源泉となるが直接には完全に観察できない要素を含む．エイジェントは努力ベクトル $e_t \in \mathbb{R}^m$ を選択し，それが将来の状態に影響を与える．プリンシパルとエイジェントが公的に観察できるのは，業績指標ベクトル $y_t \in \mathbb{R}^k$ である．y_t は，会計利益，売上成長率，品質指標，顧客満足度，ESG 指標などを含みうる．

本稿では，当期の努力は次期以降の状態に影響を及ぼし，観測される業績指標は当期の状態についてのノイズ付きシグナルを与えるものとする．したがって，インセンティブ問題は本質的に動学的であり，現在の努力は将来の契約支払いを通じて評価される．

契約は期首に提示され，エイジェントが受諾するか否かを決める．受諾後，各期においてエイジェントは利用可能な情報にもとづいて努力を選択し，業績指標が実現し，それに応じて報酬が支払われる．以下では，観測構造そのものは所与とし，どのような観測構造のもとでどの状態成分が契約上意味を持つかを明らかにすることに主眼を置く．

3.2　企業の動的構造：状態空間表現

企業の価値創造過程を，以下の線形確率状態空間モデルで表す．

$$s_{t+1} = As_t + Be_t + C\theta_t + \varepsilon_t \tag{3.1}$$

$$y_t = Hs_t + Du_t + \eta_t \tag{3.2}$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は状態遷移行列であり，企業内部の状態が時間を通じてどのように蓄積・減衰・相互作用するかを表す．$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は努力の影響行列であり，各努力成分がどの状態成分にどの程度作用しうるかを示す．$C \in \mathbb{R}^{n \times l}$ は外生環境の影響を表す行列であり，$\theta_t \in \mathbb{R}^l$ は需要ショック，技術環境，規制変化などの外生的状態要因を表す．観測方程式における $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$ は，潜在状態がどのように業績指標へ写像されるかを示す観測行列である．$D \in \mathbb{R}^{k \times p}$ は公的に観測可能な外部入力 $u_t \in \mathbb{R}^p$ の効果を表す．

ε_t は状態方程式の撹乱項，η_t は観測方程式の測定誤差である．表記の混乱を避けるため，報酬については後に c_t を用いる．

この表現の経済学的意味は明確である．状態方程式 (3.1) は，企業価値の基礎となる潜在変数が，過去の蓄積，エイジェントの行動，外生環境，および予期せぬ撹乱によって更新されることを表す．他方，観測方程式 (3.2) は，プリンシパルが観察する業績指標が，潜在状態の不完全な写像であることを意味する．ここで重要なのは，B と H が全く別の役割を担っている点であ

る．B は「何が動かせるか」を，H は「何が見えるか」を決める．業績評価の問題は，この二つの構造の交差点で生じる．

仮定 3.1（動学と確率構造） (i) A は安定的, あるいは少なくとも (A,B) は stabilizable, (A,H) は detectable である．ベースラインでは簡潔さのため $\rho(A)<1$ を仮定する．
(ii) 初期状態 s_0 は平均 μ_0，分散 P_0 をもつ正規分布に従う．
(iii) $\{\varepsilon_t\}$ と $\{\eta_t\}$ は互いに独立な白色雑音過程であり，

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,Q), \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0,R) \tag{3.3}$$

ただし $Q \succeq 0$，$R \succ 0$ とする．
(iv) 外生過程 $\{\theta_t\}$ および $\{u_t\}$ はその実現または分布が両者に共通知識であり，$\{\varepsilon_t\}, \{\eta_t\}$ と独立である．
(v) すべての行列は適合的な次元を持つ．

この仮定は，線形二次ガウス（LQG）的な基準環境を与えるものであり，本稿の主眼である「契約関連部分空間」の幾何学をもっとも透明な形で示す．

3.3 選好と契約空間

プリンシパルはリスク中立的であり，各期の期待利得は，企業状態から得られる便益からエイジェントへの支払いを差し引いたものとする．具体的には，プリンシパルの各期利得を

$$\pi_t = r' s_t - c_t \tag{3.4}$$

と書く．ここで $r \in \mathbb{R}^n$ は，各状態成分が企業価値にどの程度寄与するかを表す評価ベクトルであり，c_t はエイジェントへの報酬である．プリンシパルの期待効用は

$$U_P = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_P^t (r' s_t - c_t)\right] \tag{3.5}$$

で与えられる．ここで $\delta_P \in (0,1]$ はプリンシパルの割引因子である．

エイジェントはリスク回避的であり，CARA 効用を持つと仮定する．努力費用は凸であり，簡潔さのため二次形式を採用する．すなわち，

$$u(c_t) = -\exp(-\gamma c_t), \quad g(e_t) = \frac{1}{2} e_t' K e_t \tag{3.6}$$

ただし $\gamma > 0$ は絶対的リスク回避度，$K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は対称正定値行列である．エイジェントの期待効用は

$$U_A = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_A^t \left(u(c_t) - g(e_t)\right)\right] \tag{3.7}$$

で与えられる．ここで $\delta_A \in (0,1]$ はエイジェントの割引因子である．

本稿では，契約空間を公的に観測可能な業績指標に線形に依存する契約に限定する．すなわち，各期の報酬を

$$c_t = \alpha + \beta' y_t \tag{3.8}$$

とする．ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は固定給，$\beta \in \mathbb{R}^k$ は業績感応度ベクトルである．時間依存的な α_t, β_t を許すことも可能であるが，本稿の中心的関心は時間変動それ自体ではなく，どの状態方向が

契約上意味を持つかという幾何学的問題にあるため，ベースラインでは定常的な線形契約に焦点を当てる．

この契約制約は，一般性を不必要に狭めるためではない．むしろ，ガウス・CARA 環境のもとでは自然なベンチマークを与え，本稿の主張——契約に入るべき状態成分は可制御かつ可観測な部分に限られる——をもっとも明瞭に示す．

3.4 可制御性・可観測性・契約関連部分空間

企業の状態空間のうち，どの部分が努力によって動かしうるのか，どの部分が観測から識別しうるのかを明示するために，制御理論の基本概念を導入する．

まず，可制御性行列を

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \tag{3.9}$$

と定義する．

定義 3.1（可制御部分空間） 可制御部分空間を

$$\mathcal{S}_c = \operatorname{Im}(\mathcal{C}) \tag{3.10}$$

と定義する．すなわち，$\mathcal{S}_c$ は，ある有限期間にわたる努力系列によって到達可能な状態方向の集合である．完全可制御性は $\operatorname{rank}(\mathcal{C}) = n$ によって特徴づけられる．

同様に，可観測性行列を

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

と定義する．

定義 3.2（可観測部分空間） 不可観測部分空間を $\ker(\mathcal{O})$ とし，可観測部分空間を

$$\mathcal{S}_o = (\ker(\mathcal{O}))^{\perp} = \operatorname{Im}(\mathcal{O}') \tag{3.12}$$

と定義する．完全可観測性は $\operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n$ によって与えられる．

定義 3.3（契約関連部分空間） 契約関連部分空間を

$$\mathcal{S}_{co} = \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_o \tag{3.13}$$

と定義する．経済学的には，$\mathcal{S}_{co}$ は，エイジェントの努力によって動かしうると同時に，プリンシパルが業績指標から識別しうる状態方向の集合である．

命題 3.1（カルマン分解） ある正則変換行列 T が存在して，変換後の状態

$$x_t = Ts_t = \begin{bmatrix} x_t^{co} \\ x_t^{c\bar{o}} \\ x_t^{\bar{c}o} \\ x_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

に関して，各ブロックはそれぞれ，

(i) 可制御かつ可観測，

(ii) 可制御だが不可観測,
(iii) 制御不能だが可観測,
(iv) 制御不能かつ不可観測
な部分空間に対応する．また，適切な座標系では

$$x_{t+1} = \tilde{A}x_t + \tilde{B}e_t + \tilde{C}\theta_t + \varepsilon_t \tag{3.15}$$

$$y_t = \tilde{H}x_t + Du_t + \eta_t \tag{3.16}$$

と表され，努力の影響は第一・第二ブロックにのみ現れ，観測方程式への負荷は第一・第三ブロックにのみ現れる．

この分解は，業績評価にとってきわめて示唆的である．x_t^{co} は，エイジェントの行動によって動かすことができ，しかも業績指標から推定可能な状態であるから，インセンティブ契約が直接に作用しうる部分である．$x_t^{c\bar{o}}$ は，努力によって動くが観測できない状態であり，ここではエイジェントの行動は企業価値に影響しても契約に直接反映できない．これはモラルハザードの本質的な源泉である．$x_t^{\bar{c}o}$ は，観測はできるが努力では動かせない状態であり，景気循環，産業ショック，規制変化のような，観察可能だが controllable ではない要因に対応する．最後に $x_t^{\bar{c}\bar{o}}$ は，観測も制御もできない残余であり，契約上も組織設計上も直接には利用できない．

3.5　情報構造と状態推定

契約は公的に観測可能な y_t にのみ条件づけられるため，両者の情報構造を明示する必要がある．時点 t における公的履歴を

$$h_t = \{y_0, \dots, y_t;\ u_0, \dots, u_t;\ \theta_0, \dots, \theta_t\} \tag{3.17}$$

とする．このとき，プリンシパルの情報集合は

$$\mathcal{I}_t^P = \sigma(h_t) \tag{3.18}$$

であり，エイジェントの情報集合は，自らの過去の努力選択も知っていることから，

$$\mathcal{I}_t^A = \sigma(h_t, e_0, \dots, e_{t-1}) \tag{3.19}$$

で与えられる．

この情報構造のもとでは，真の状態 s_t はどちらにも直接観察されない．したがって，両者は観測履歴にもとづいて状態を推定する．線形ガウス環境のもとでは，条件付き平均と条件付き分散が十分統計量となり，状態推定はカルマンフィルタで与えられる．

命題 3.2（フィルタリング表現） プリンシパルの条件付き期待値と分散を

$$\hat{s}_{t|t}^P = \mathbb{E}\left[s_t \middle| \mathcal{I}_t^P\right], \quad P_{t|t}^P = \mathrm{Var}\left(s_t \middle| \mathcal{I}_t^P\right) \tag{3.20}$$

と書く．努力が非観測である以上，プリンシパルの予測ステップには実現した努力ではなく，均衡上の予想努力

$$\bar{e}_t^P = \mathbb{E}\left[e_t \middle| \mathcal{I}_t^P\right] \tag{3.21}$$

が入る．すると，プリンシパルのフィルタは

$$\hat{s}_{t+1|t}^P = A\hat{s}_{t|t}^P + B\hat{e}_t^P + C\theta_t \tag{3.22}$$

$$P^P_{t+1|t} = AP^P_{t|t}A' + Q \tag{3.23}$$

$$\hat{s}^P_{t|t} = \hat{s}^P_{t|t-1} + G^P_t\left(y_t - Du_t - H\hat{s}^P_{t|t-1}\right) \tag{3.24}$$

$$G^P_t = P^P_{t|t-1}H'\left(HP^P_{t|t-1}H' + R\right)^{-1} \tag{3.25}$$

$$P^P_{t|t} = \left(I - G^P_t H\right)P^P_{t|t-1} \tag{3.26}$$

で与えられる．

エイジェントは自身の実現努力を知っているため，エイジェントの状態推定 $\left(\hat{s}^A_{t|t}, P^A_{t|t}\right)$ についても同様の式が成立するが，予測ステップには実際の e_t が入る．したがって，一般には $\hat{s}^A_{t|t} \neq \hat{s}^P_{t|t}$ であり，両者の間に信念の楔が生じうる．この楔は後のエイジェンシーコストの源泉の一つであるが，本稿でまず明らかにしたいのは，こうした推定問題の背後にある，より根本的な幾何学的制約である．

3.6　本稿の射程と次節への橋渡し

以上のモデル化により，本稿の中心問題は明確になる．すなわち，本稿が解こうとするのは，所与の観測構造 H のもとで，最適契約がどの状態成分に依拠すべきか，という問題である．言い換えれば，本稿の関心は，観測システムが与えられたときの「契約関連部分空間」の同定にある．

この点を強調するために，ここで本稿の射程を明示しておく．観測行列 H そのものをどのように設計すべきか，すなわち，どの測定行列あるいはどの測定集合を選べば observability を改善・最適化できるか，という問題は，明らかに重要である．しかし，それは本稿の主題ではない．本稿では H を所与とし，そのもとでの最適契約の構造を特徴づける．観測構造の内生的設計問題は，本稿の理論を踏まえた次の段階の研究課題である．次節では，このモデルを用いて，最適契約が可制御・可観測部分空間への射影として特徴づけられることを示す．より具体的には，制約のない最適業績感応度を $\tilde{\beta}$ とするとき，実際に意味を持つ最適感応度 β^* は，可制御・可観測部分空間の像 $H\left(\mathcal{S}_{co}\right)$ への射影として表現されることを示す．この結果により，情報性原理，多タスク理論，責任会計上の controllability の直観は，単一の動的多次元枠組みの中で再解釈される．

4　均衡分析

前節では，企業の価値創造過程を線形確率状態空間システムとして表現し，業績評価にとって本質的な状態成分が，可制御部分空間と可観測部分空間の交差によって特徴づけられることを示した．本節では，この枠組みのもとで均衡を導出し，最適契約がどのような構造を持つかを明らかにする．中心的な問いは，所与の観測構造 H のもとで，プリンシパルがどの業績指標にどのような重みを与えるべきか，という点にある．

本節の主たる結果は三つである．第一に，与えられた線形契約のもとで，エイジェントの最適努力は，自らの状態推定値に依存する線形フィードバックとして特徴づけられる．第二に，その努力反応は，状態空間のうち可制御部分にのみ直接依存する．第三に，追加的な直交性条件のもとでは，最適な業績感応度は可制御・可観測部分空間の像に属し，そこから外れた契約

負荷はインセンティブを改善しない一方で，リスク負担のみを増加させる．言い換えれば，契約の「本体」は，可制御であり，かつ可観測である状態成分に支えられている．

4.1 均衡概念

本稿では，前節で導入した線形契約空間

$$c_t = \alpha + \beta' y_t \tag{4.1}$$

のもとでの均衡を考える．ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は固定給，$\beta \in \mathbb{R}^k$ は業績感応度ベクトルである．

定義 4.1（線形フィルタリング均衡） 線形フィルタリング均衡とは，契約 (α, β)，エイジェントの努力過程 $\{e_t^*\}$，プリンシパルとエイジェントの状態推定過程 $\left\{\hat{s}_{t|t}^P, \hat{s}_{t|t}^A\right\}$ の組であって，以下を満たすものをいう．
(i) 与えられた (α, β) と情報構造のもとで，$\{e_t^*\}$ はエイジェントの期待効用を最大化する．
(ii) $\left\{\hat{s}_{t|t}^P, \hat{s}_{t|t}^A\right\}$ は，それぞれの情報集合に関する最適線形状態推定である．
(iii) (α, β) は，エイジェントの誘因整合性制約と参加制約のもとで，プリンシパルの期待利得を最大化する．

以下では，前節の正則性条件に加えて，線形契約に対するエイジェントの最適反応が well-defined であり, プリンシパルの最適化問題が解を持つような標準的条件を仮定する. 有限期間ではこれらは比較的弱い条件のもとで成立し，無限期間の定常分析では (A, B) の stabilizability，(A, H) の detectability，ならびに β の取りうる集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^k$ の閉性・有界性が十分である．

4.2 エイジェントの最適反応

まず，与えられた契約 (α, β) のもとでのエイジェントの行動を特徴づける．前節の仮定のもとでは，各期の報酬 c_t は，エイジェントの情報集合 $\mathcal{I}_t^A$ で条件づければ正規分布に従う．したがって，CARA 効用のもとでのエイジェントの問題は，確実性等価表現に書き換えることができる．

補題 4.1（確実性等価表現） 契約 (α, β) が与えられたとき，エイジェントの動学的最適化問題は，以下の確実性等価を最大化する問題と同値である．

$$CE_A(\{e_t\}; \alpha, \beta) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_A^t \left\{\alpha + \beta'\left(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t\right) - \frac{\gamma}{2}\beta'\left(HP_{t|t}^A H' + R\right)\beta - \frac{1}{2}e_t' K e_t\right\}\right] \tag{4.2}$$

この補題は，エイジェントの問題が，実質的には「自らのフィルタリングした状態推定値に関する線形二次型の動学的制御問題」に帰着することを意味している．重要なのは，エイジェントは真の状態を見ていないが，最適行動は自分の持つ状態推定 $\hat{s}_{t|t}^A$ に依存する形で記述できる点にある．

命題 4.1（最適努力の線形性） 前節の仮定のもとで，任意の固定された線形契約 (α, β) に対し，エイジェントの最適努力は，自らの状態推定値の線形フィードバックとして表現できる．すなわち，ある行列列 $\{F_t(\beta)\}$ およびベクトル列 $\{f_t(\beta)\}$ が存在して，

$$e_t^* = F_t(\beta)\,\hat{s}_{t|t}^A + f_t(\beta, \theta_t, u_t) \tag{4.3}$$

が成り立つ．さらに，無限期間の定常環境で θ_t と u_t が平均ゼロであれば，定常行列 $F(\beta)$ が存在して，

$$e_t^* = F(\beta)\,\hat{s}_{t|t}^A \tag{4.4}$$

と書ける．

補題 4.1 により，エイジェントの問題は filtered state $\hat{s}_{t|t}^A$ を状態変数とする線形二次型の動学問題となる．標準的な separation principle により，最適制御は条件付き状態推定の線形関数として与えられる．

系 4.1（努力の可制御部分への依存） カルマン分解による座標変換 $x_t = Ts_t$ を用い，

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^{co} \\ x_t^{c\bar{o}} \\ x_t^{\bar{c}o} \\ x_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

と書くと，エイジェントの最適努力は

$$e_t^* = F_t^{co}\hat{x}_{t|t}^{co,A} + F_t^{c\bar{o}}\hat{x}_{t|t}^{c\bar{o},A} + f_t \tag{4.6}$$

と表せる．特に，

$$\frac{\partial e_t^*}{\partial \hat{x}_{t|t}^{\bar{c}o,A}} = 0, \quad \frac{\partial e_t^*}{\partial \hat{x}_{t|t}^{\bar{c}\bar{o},A}} = 0 \tag{4.7}$$

が成り立つ．

これは当然のようでいて，理論的には重要である．プリンシパルがどれほど豊かな指標を観察していても，エイジェントが努力によって動かせない状態は，行動の対象にはならない．言い換えれば，可観測性だけではインセンティブの基礎にならず，可制御性が不可欠である．

4.3 プリンシパルの問題

つぎに，プリンシパルの最適化問題を考える．エイジェントの最適反応 $\{e_t^*(\alpha,\beta)\}$ を内生化すると，プリンシパルは

$$\max_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathcal{B}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T}\delta_P^t(r's_t - c_t)\right] \tag{4.8}$$

を，誘因整合性制約と参加制約

$$U_A(\alpha,\beta) \geq \bar{U} \tag{4.9}$$

のもとで解くことになる．

ここで，α は分配面でのみ効き，β は誘因面とリスク分担面の両方に効く．標準的な議論により，内部解が存在する限り，最適な固定給 $\alpha^*(\beta)$ は参加制約をちょうど等号で満たすように選ばれる．したがって，プリンシパルの問題は β の選択問題へと縮約できる．以下，参加制約で α を代入した後のプリンシパルの目的関数を

$$J(\beta) \tag{4.10}$$

と書く．

直観的には，$J(\beta)$ は三つの要素から成る．第一に，β を通じてエイジェントの努力が変化し，企業価値の期待値が動くというインセンティブ効果である．第二に，β を大きくするとエイジェントに大きなリスクを負わせるため，その分だけ固定給で補償しなければならないというリスクプレミアム効果である．第三に，観測されるシグナルのどの方向に荷重をかけるかによって，努力誘導に使える情報と，単なるノイズとが区別されるという情報構造効果である．本稿の主たる関心は，第三の効果を幾何学的に特徴づけることである．

4.4　契約関連信号空間

プリンシパルが選ぶ β は観測空間 $\mathbb{R}^k$ の要素である．他方，業績評価にとって本質的なのは，可制御・可観測部分空間 $\mathcal{S}_{co}$ が観測空間にどのように写るかである．

定義 4.2（契約関連信号空間）

$$\mathcal{Y}_{co} := H(\mathcal{S}_{co}) \subseteq \mathbb{R}^k \tag{4.11}$$

を契約関連信号空間と呼ぶ．

$\mathcal{Y}_{co}$ は，可制御であり，かつ可観測である状態成分が，実際の業績指標空間において張る部分空間である．任意の $\beta \in \mathbb{R}^k$ は，$\mathcal{Y}_{co}$ 上の成分と，その直交補空間上の成分に分解できる．すなわち，Π_{co} を $\mathcal{Y}_{co}$ への直交射影とすると，

$$\beta = \beta_{co} + \beta_{\perp}, \quad \beta_{co} := \Pi_{co}\beta, \quad \beta_{\perp} := (I - \Pi_{co})\,\beta \tag{4.12}$$

と書ける．

ここで注意すべきなのは，$\beta_{\perp}$ が常に無意味であるとは，一般にはすぐには言えないことである．なぜなら，可制御でないが可観測な指標が，可制御成分についてのノイズをフィルターする補助信号として役立つ場合があるからである．これは，相対的業績評価やベンチマーキングの文献でよく知られた論点である．したがって，「最適契約は $\mathcal{Y}_{co}$ にのみ依拠する」という強い主張を成立させるには，追加的な識別条件が必要である．

仮定 4.1（直交性条件）　観測ベクトル y_t を

$$y_t = y_t^{co} + y_t^{\perp}, \quad y_t^{co} := \Pi_{co} y_t, \quad y_t^{\perp} := (I - \Pi_{co})\, y_t \tag{4.13}$$

と分解する．このとき，任意の時点 t について，共通知識の履歴 $\mathcal{I}_{t-1}^P$ と当期努力 e_t を所与としたとき，

$$\frac{\partial}{\partial e_t}\mathbb{E}\left[y_t^{\perp} \middle| \mathcal{I}_{t-1}^P, e_t\right] = 0 \tag{4.14}$$

かつ

$$\mathrm{Cov}\left(y_t^{co}, y_t^{\perp} \middle| \mathcal{I}_{t-1}^P, e_t\right) = 0 \tag{4.15}$$

が成り立つものとする．

仮定 4.1 は，$\mathcal{Y}_{co}$ の外側にある観測成分が，努力に関する追加的な線形情報を持たず，しかも契約関連成分のノイズ除去にも用いられないことを意味する．これはやや強いが，理論の中心命題をもっとも透明に示す条件である．

4.5　主結果：最適契約の射影構造

以上の準備のもとで，本稿の中心結果を示す．

定理 4.1（最適契約の射影構造） 仮定 3.1 と仮定 4.1 のもとで，任意の $\beta \in \mathcal{B}$ に対して，

$$J(\beta) \le J(\beta_{co}) \tag{4.16}$$

が成り立つ．さらに，$R \succ 0$ かつ $\gamma > 0$ であり，$\beta_{\perp} \neq 0$ ならば，不等号は厳密である．したがって，最適解 β^* が存在すれば，

$$\beta^* \in \mathcal{Y}_{co} \tag{4.17}$$

と取ることができる．特に，$\mathcal{B} = \mathbb{R}^k$ で，β に関する無制約問題の唯一解を $\tilde{\beta}$ とすると，

$$\beta^* = \Pi_{co}\tilde{\beta} \tag{4.18}$$

である．

この定理の経済学的意味は明快である．最適契約は，「観測可能なもの一般」に重みを置くのではなく，「エイジェントの行動によって動かしうる，しかも観測によって識別できる状態」を表す信号にのみ本質的に依拠する．$\mathcal{Y}_{co}$ の外側にある荷重は，仮定 4.1 のもとでは，情報生産的ではなく，単にリスクを増やすだけである．

4.6　補助的シグナルの役割

もっとも，前述の通り，現実には仮定 4.1 が成立しない場合も多い．たとえば，エイジェントが制御できないが可観測な外部ショック指標が，可制御成分に作用する共通ノイズを除去するのに役立つことがある．このとき，$\beta_{\perp}$ が完全に不要だとは言えない．

命題 4.2（補助的シグナルの限定的役割） 仮定 4.1 を外しても，$\mathcal{Y}_{co}$ の外側の観測成分が最適契約に入る場合，その役割は，可制御・可観測状態成分についての推定精度を高める補助的フィルタに限られる．すなわち，$\beta_{\perp}$ が直接に価値を持つのではなく，$\mathcal{S}_{co}$ に関する十分統計量の構成に資する限りでのみ価値を持つ．

この命題は，相対的業績評価の理論と整合的である．産業ショックや同業他社指標は，それ自体がエイジェントの努力で動くわけではない．しかし，それらが共通ノイズを除去するなら，努力に関する推論を改善しうる．したがって，本稿の中心命題は，「可制御でないシグナルは絶対に使うべきでない」というものではない．より正確には，契約の本体は $\mathcal{S}_{co}$ に関する情報に支えられ，その他のシグナルは，その情報の精度改善に役立つ限りでのみ補助的に意味を持つというべきである．

4.7　ファーストベストとリスク分担

つぎに，定理 4.1 の含意を，ファーストベストとの関係で確認する．ここで注意すべきは，完全可制御性と完全可観測性が，それだけで自動的にファーストベストを保証するわけではないことである．観測ノイズとリスク回避が残る限り，依然としてリスク分担の歪みが存在しうるからである．

命題 4.3（ファーストベスト実装条件） 以下の二つの条件がともに成り立つとき，線形契約によってファーストベスト配分を実装できる．
(i) 価値関連状態がすべて可制御・可観測部分空間に含まれる．すなわち，

$$r \in \mathcal{S}_{co} \tag{4.19}$$

が成り立つ．
(ii) 観測がノイズレスであるか，あるいはエイジェントがリスク中立的である．すなわち，

$$R = 0 \quad \text{または} \quad \gamma = 0 \tag{4.20}$$

これに対し，単に $\mathcal{S}_{co} = \mathbb{R}^n$ であるだけでは，一般にはファーストベストは保証されない．この命題は，本稿の理論の位置を明確にする．可制御性と可観測性は，「どの状態方向が契約の対象になりうるか」を決める．しかし，それだけでは，リスク分担の問題までは消えない．したがって，可制御性・可観測性の理論は，ファーストベスト達成の十分条件というよりも，ファーストベストからの構造的乖離が，どの方向で生じるかを示す理論である．

4.8 比較静学

本稿の枠組みは，観測精度，業績指標の追加，組織の複雑化が，最適契約にどのような影響を与えるかについて，明確な予測を与える．

命題 4.4（測定精度改善の効果） 仮定 4.1 のもとで，契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ に沿った観測ノイズの分散が小さくなると，最適契約におけるその方向への限界荷重の価値は上昇する．特に，契約関連信号が一次元である場合，対応する最適業績感応度の絶対値は弱く増加する．

命題 4.5（追加的業績指標の価値） 新たな業績指標 y_t^{new} を追加したとき，その契約上の価値が正になるのは，(i) それが契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ を真に拡張する場合，または (ii) 既存指標で観測される $\mathcal{Y}_{co}$ 上の方向について推定精度を改善する場合である．反対に，どちらの効果も持たない指標は，契約上の第一義的価値を持たない．

命題 4.6（組織複雑性の効果） 状態次元 n の増加それ自体は，契約効率性を必ずしも高めない．むしろ，状態次元の拡張が $\mathcal{S}_{co}$ を伴わず，可制御だが不可観測な部分空間 $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ や，制御不能だが可観測な部分空間 $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ を主として拡大する場合，エイジェンシーコストは上昇しうる．

これらの比較静学が意味するところは明瞭である．情報システムの改善，測定誤差の縮小，会計基準や内部統制の精緻化は，可制御・可観測部分に関するシグナル・ノイズ比を上げる．このとき，プリンシパルはその方向により強い契約感応度を与えやすくなる．逆に言えば，測定精度の改善は，それ自体が誘因制度の余地を拡大する．また，新しい指標を増やすこと自体には意味がなく，重要なのは，その指標が可制御・可観測状態に関する追加的情報を生むかどうかである．

4.9 既存理論との関係

本稿の枠組みは，既存の契約理論の主要な結果を特殊ケースとして含む．静学的一次元の場合，すなわち $n = m = k = 1$ で，状態が当期努力にのみ依存し，動学が存在しないとき，可制御性・可観測性の区別は退化し，$\mathcal{S}_{co}$ は自明に全空間となる．このとき，本稿の理論は，線

形契約における感度と精度のトレードオフという古典的構造へと還元される．したがって，本稿は Holmström 型の情報性原理や Banker - Datar 型の感度・精度論を否定するものではなく，それらを動的・多次元環境へ埋め込むものである．

また，多タスク・複数指標の文脈では，各指標の価値は，それがどの努力次元に関する契約関連情報を追加的に与えるかによって決まる．本稿の言葉で言えば，ある指標が有効なのは，それが $\mathcal{Y}_{co}$ を拡張するか，少なくとも $\mathcal{Y}_{co}$ に関する推定精度を改善する場合である．これは，Feltham and Xie 型の congruity の議論を，状態空間と可観測性の言葉で再記述したものと理解できる．

さらに，責任会計の controllability principle との関係では，本稿はその素朴な解釈を修正しつつ，より厳密な基礎を与える．本稿が示すのは，「可制御でないものは評価から完全に除外すべきだ」という単純な主張ではない．そうではなく，エイジェントの行動によって動かしうる状態に関する十分統計量を，契約の核に据えるべきだという主張である．したがって，本稿の controllability は，制度的・直観的概念ではなく，状態空間上の到達可能性として定義されている点に特色がある．

4.10　小括

本節では，前節のモデルのもとで均衡を特徴づけた．第一に，線形契約のもとでのエイジェントの最適努力は，状態推定に依存する線形フィードバックとして表現され，可制御部分にのみ直接依存することを示した．第二に，プリンシパルの問題は，固定給を参加制約で吸収したのち，業績感応度ベクトル β の選択問題へと縮約できることを確認した．第三に，追加的な直交性条件のもとで，最適契約は契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co})$ への射影として特徴づけられることを示した．

この結果は，業績評価の本質が，単なる「可観測性」ではなく，可制御性と可観測性の交差にあることを明らかにしている．何が観測できるかだけでは不十分であり，何が努力によって動かしうるかだけでも不十分である．契約は，その両方を同時に満たす部分空間において，はじめて構造的な意味を持つ．

次節では，この一般理論が既存の代表的議論をどのように包含し，再解釈するかを示す．

5　既存理論との関係—特殊ケースの導出と再解釈

前節では，所与の観測構造のもとで，最適契約の本体が可制御・可観測部分空間に支えられることを示した．本節の目的は，この一般理論が既存の代表的研究とどのような関係にあるかを明示することにある．とりわけ重要なのは，本稿の枠組みが，既存理論と断絶した新奇な構築物ではなく，むしろ古典的な契約理論および会計研究の主要結果を，より高い抽象度のもとで統一的に位置づける点にある．

ここでは，三つの論点を扱う．第一に，Holmström and Milgrom (1991) の線形契約と多タスクの議論が，本稿の理論の静学的特殊ケースとしてどのように理解できるかを示す．第二に，Feltham and Xie (1994) の複数業績指標の価値に関する議論が，本稿では契約関連信号空間の拡張またはその精度改善としてどのように再解釈されるかを示す．第三に，Lambert (2001) が整理した accounting measures in contracting の議論に対して，本稿がどのような動的・状態空間的基礎づけを与えるかを論じる．

以下では，まず本稿の一般モデルを静学ベンチマークへ縮約する．そのうえで，それぞれの古典的議論との対応関係を示す．

5.1 静学ベンチマークへの縮約

既存理論との比較のため，本稿の一般モデルを一期間の静学環境へ縮約する．すなわち，契約期間を 1 期とし，状態の自己遷移や外生状態の累積効果を捨象して，

$$s = Be + \varepsilon \tag{5.1}$$

$$y = Hs + \eta \tag{5.2}$$

を考える．ここで $s \in \mathbb{R}^n$ は潜在状態，$e \in \mathbb{R}^m$ はエイジェントの努力，$y \in \mathbb{R}^k$ は業績指標である．努力費用は二次形式

$$g(e) = \frac{1}{2}e'Ke \tag{5.3}$$

とし，契約は

$$c = \alpha + \beta' y \tag{5.4}$$

で与えられるとする．

このとき，可制御部分空間と可観測部分空間は，それぞれ

$$\mathcal{S}_c = \mathrm{Im}(B), \quad \mathcal{S}_o = \mathrm{Im}(H') \tag{5.5}$$

と簡約化される．したがって，契約関連部分空間は

$$\mathcal{S}_{co} = \mathrm{Im}(B) \cap \mathrm{Im}(H') \tag{5.6}$$

であり，契約関連信号空間は

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \tag{5.7}$$

で与えられる．つまり，静学環境においても，本稿の中心命題は変わらない．契約にとって意味を持つのは，努力で動かしうる状態についての観測可能な情報である．

この静学ベンチマークのもとでは，前節の Theorem 4.1 は，より古典的な文脈で読み替えられる．以下では，この読み替えを通じて，Holmström - Milgrom および Feltham - Xie の議論が，本稿の理論の特殊ケースとしてどのように現れるかを示す．

5.2 Holmström and Milgrom (1991) の回復

Holmström and Milgrom (1991) の多タスク・プリンシパル＝エイジェント理論の中心的洞察は，観測しやすい活動に強い誘因を与えると，観測しにくいが価値にとって重要な活動が過少供給されうる，という点にある．本稿の枠組みで言えば，これは，努力によって動かしうる状態のうち，一部が観測構造を通じて十分には可視化されない場合，最適契約の重心が観測可能な方向へ偏り，不可観測な controllable state に関する effort が過少になることを意味する．

この関係は，次の系として整理できる．

系 5.1（Holmström and Milgrom (1991) の静学的特殊ケース） 静学ベンチマーク (5.1) - (5.4) を考える．さらに，各努力成分が対応するタスク状態に同時的に作用し，観測構造がその一部の状態方向のみを十分に識別するとする．このとき，仮定 4.1 に対応する静学的直交性条

件のもとでは，最適契約の業績感応度ベクトル β^* は $\mathcal{Y}_{co}$ に属する．したがって，可制御であるが不可観測なタスク方向に対応する活動は，契約によって直接には十分に報われず，観測可能なタスクへの誘因もそれらとの代替関係を通じて弱められる．これは Holmström and Milgrom (1991) の多タスク論理を回復する．

この系の意味は明瞭である．Holmström and Milgrom の理論では，「測れない仕事が重要なら，測れる仕事に対するインセンティブは弱めるべきだ」という命題が中心をなしていた．本稿の言葉で言えば，これは，価値関連状態の一部が $\mathcal{S}_c$ に属しながら $\mathcal{S}_o$ には十分入らない場合，契約関連部分空間 $\mathcal{S}_{co}$ が全体の controllable state を覆わず，最適契約が second-best に制約されることの帰結である．したがって，本稿は Holmström and Milgrom の直観を，状態空間上の幾何学として明示したものとみなすことができる．

さらに，一次元・単一指標の最も単純な環境を考えると，本稿の一般理論は，線形契約の標準ベンチマークへと退化する．すなわち，$n = m = k = 1$ で，唯一の状態が努力で動き，唯一の業績指標がその状態を観測するとき，$\mathcal{S}_{co} = \mathbb{R}$ であり，契約の問題は感度と精度のトレードオフという古典的な構造へと還元される．この意味でも，本稿は Holmström - Milgrom 的な契約理論を否定するのではなく，それを多次元・動学的環境に埋め込むものである．

ただし，ここで重要なのは，本稿が Holmström and Milgrom (1991) の全内容——たとえば asset ownership や job design までをそのまま形式的に特殊ケースとして回収する，と主張しているわけではないことである．本稿が厳密に回収しているのは，多タスク環境において，観測不能な controllable activity の存在が観測可能 activity への最適誘因を弱めるという理論的核心である．この限定を明示することで，本稿の主張は過大にならず，かつ既存理論との接続も明瞭になる．

5.3 Feltham and Xie (1994) の包含と一般化

Feltham and Xie (1994) は，複数業績指標が契約上有用となるのは，それらが企業価値により congruent であり，かつ既存指標に対して追加的情報をもたらす場合であることを示した．本稿の枠組みから見ると，この洞察は，契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ の構造に関する主張として理解できる．

具体的には，ある新しい指標が価値を持つのは，それが可制御・可観測部分空間の像を拡張するか，あるいは既存の契約関連信号についての推定精度を改善する場合に限られる．このことは，前節の比較静学から直接導かれる．

系 5.2（Feltham and Xie (1994) の包含ないし一般化） 静学ベンチマーク (5.1) - (5.4) のもとで，既存の業績指標集合 y に新たな指標 y^{new} を追加することを考える．このとき，新指標の契約上の価値が正になるのは，(i) y^{new} が契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ を真に拡張する場合，または (ii) $\mathcal{Y}_{co}$ 上の既存信号の精度を改善する場合である．したがって，複数業績指標の価値は，可制御であり価値関連でもある状態方向に関する追加的情報量として評価される．これは Feltham and Xie (1994) の congruity および diversity の議論を包含し，動的多次元環境へ一般化する．

この系が示すのは，Feltham and Xie の言う congruity を，本稿では「その指標が $\mathcal{S}_{co}$ に属する状態方向とどれだけ強く結びついているか」として読み替えられる，ということである．また，diversity は，既存の観測構造がすでに張っている $\mathcal{Y}_{co}$ に対して，新指標がどれだけ非冗長

な情報をもたらすかとして理解できる．したがって，Feltham and Xie の理論が強調した「追加的業績指標の価値」は，本稿では契約関連信号空間の拡張またはその精度改善として，より幾何学的かつ動学的に表現される．

ここで重要なのは，本稿の理論が Feltham and Xie を単に言い換えているだけではない，という点である．彼らの分析は本質的に静学的であり，複数指標の価値は当期の情報内容に即して評価される．他方，本稿では，現在の努力が将来の状態へ作用し，その状態がさらに将来の指標へ写像される．したがって，新たな業績指標の価値は，単なる contemporaneous information ではなく，動学的に controllable な状態方向をどれだけ観測可能にするかによって決まる．この意味で，本稿は Feltham and Xie の結果を包含するだけでなく，その背後にある論理を動的に一般化している．

5.4　Lambert (2001) の再定位

Lambert (2001) は，契約理論と会計研究の接点を包括的に整理し，会計指標が contracting において果たす役割を多面的に論じた．Lambert の貢献は，特定の単一結果というより，会計情報がなぜ契約において重要でありうるかを整理した点にある．その意味で，Lambert (2001) を Holmström‐Milgrom や Feltham‐Xie と同じ意味での「特殊ケース」として処理するのは適切ではない．むしろ本稿は，Lambert がサーベイした会計指標の契約上の役割に対して，動的状態空間の明示的な基礎づけを与えるものと理解すべきである．

この点を次の命題として述べることができる．

命題 5.1（Lambert (2001) 的含意の状態空間的基礎づけ） 本稿の枠組みにおいて，会計指標が契約上価値を持つのは，それが可制御かつ価値関連な状態成分についての観測可能な情報を提供する場合である．したがって，会計指標の contracting role は，可制御・可観測部分空間をどの程度明確に信号化できるかによって特徴づけられる．これは，Lambert (2001) が整理した accounting measures in contracting に対して，動的状態空間モデルにもとづく統一的な基礎づけを与える．

この命題の意味は二重である．第一に，会計指標は，単なる事後的成果の記述ではなく，将来価値を左右する controllable state の観測装置として理解される．第二に，すべての会計指標が同じように契約上有用なのではなく，その価値は，どの程度 $\mathcal{S}_{co}$ を捉えるかに依存する．したがって，会計情報の contracting role は，「会計指標であるから価値がある」のではなく，「controllable and value-relevant states をどれだけ observable にするか」によって決まる．

この見方は，Lambert (2001) のサーベイを動学化するものである．Lambert が整理したように，会計情報は報酬契約，意思決定，モニタリングなど複数の役割を持つ．本稿は，そのうち contracting の側面に焦点を絞り，会計指標の価値を，契約関連部分空間と契約関連信号空間の関係として数理的に言い直している．これにより，会計指標の選択，内部会計システムの設計，非財務指標の契約利用といった論点は，すべて「観測構造が $\mathcal{S}_{co}$ をどの程度写し出しているか」という共通の問いのもとで整理できる．

また，この命題は，会計システム設計と契約設計の間にある補完性を示唆する．もし会計システムが可制御状態を十分に捉えていないなら，契約の改善余地は構造的に限られる．逆に，会計システムが $\mathcal{S}_{co}$ をより精緻に観測できるようになれば，契約設計の有効性も高まる．したがって，Lambert 的な会計研究の問題意識は，本稿の状態空間モデルのもとで，より明示的な

形で捉え直される．

5.5　小括

本節では，本稿の一般理論が既存の代表的議論とどのように接続するかを示した．第一に，Holmström and Milgrom (1991) の多タスク論理は，可制御ではあるが不可観測な状態方向が存在するとき，最適契約が観測可能な方向へ偏り，不可観測な activity への effort が過少になるという特殊ケースとして理解できる．第二に，Feltham and Xie (1994) の複数業績指標の価値は，契約関連信号空間の拡張またはその精度改善として再記述できる．第三に，Lambert (2001) が整理した accounting measures in contracting の議論は，可制御・可観測部分空間にもとづいて，動的状態空間モデルの中で再定位される．

6　含意

前節では，本稿の一般理論が既存の代表的議論とどのように接続するかを示した．Holmström and Milgrom (1991) の多タスク論理，Feltham and Xie (1994) の複数業績指標の価値，Lambert (2001) が整理した accounting measures in contracting の問題は，いずれも，本稿の枠組みのもとでは，可制御性と可観測性の交差として再定位される．こうした再定位の意義は，既存理論との整合性を確認することにとどまらない．むしろ重要なのは，この一般理論が，実証研究，管理会計制度，さらには現代企業の多様な応用領域に対して，どのような新たな含意を与えるかである．

本節では，この点を三つの水準で整理する．第一に，可制御性・可観測性の観点から，どのような実証予測が導かれるかを示す．第二に，会計システム，内部業績評価，責任会計，KPI 設計などに対して，本稿の理論がどのような制度的示唆を持つかを論じる．第三に，動的能力，研究開発，多部門組織，非財務業績指標といった応用領域において，本稿の視点がどのような追加的理解をもたらすかを示す.

6.1　実証的含意

本稿の理論からまず導かれるのは，企業間で観測構造 H や測定誤差分散 R，さらには努力の作用構造 B が異なれば，契約設計のあり方も体系的に異なるはずだという予測である．とりわけ重要なのは，可制御であり，かつ可観測でもある状態方向，すなわち契約関連部分空間 $\mathcal{S}_{co}$ の大きさと質である．契約関連部分空間が広く，その像である契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ が高い精度で観測される企業ほど，明示的な業績連動契約を採用しやすいはずである．

この予測は，少なくとも三つの形で検証可能である．第一に，横断面的には，可制御状態の観測可能性が高い企業ほど，業績感応度の高い報酬契約を採用するという予測である．ここでいう業績感応度とは，役員報酬の pay-performance sensitivity，賞与指標への連動の強さ，あるいは明示的な KPI ウェイトなどを含む．第二に，時系列的には，情報システムの改善，内部統制の強化，新たな非財務指標の導入などによって観測構造が改善された企業では，契約の重心がより契約関連状態に近づく，すなわち業績連動性が高まるか，あるいは採用される指標構成が変化するはずである．第三に，組織再編や権限配分の変更により，ある状態がより controllable になれば，その状態を反映する指標の契約上の価値も上昇するはずである．

本稿の理論は，こうした予測を，単なる相関の問題ではなく，状態空間上の構造的差異として位置づける．たとえば，ある企業が非財務指標を採用しているとしても，そのこと自体が望ましいとは限らない．その指標が可制御で価値関連な状態に関する情報を提供していなければ，契約上の第一義的価値は持たないからである．逆に，見かけ上は地味な内部指標であっても，それが長期価値創造に重要な controllable state を適切に観測しているなら，契約上の価値は高い．この意味で，本稿の理論は，「どの指標を使っているか」という観察事実を，「その指標がどの状態を，どれだけ controllable and observable な形で表しているか」という，より深い問いへと変換する．

さらに，本稿の枠組みは，既存の実証研究に対しても再解釈の余地を与える．相対的業績評価に関する研究は，しばしば，なぜ産業共通ショックが完全には除去されないのかという問いを提起してきた．本稿の観点から見れば，この問いは，可観測だが controllable ではないシグナルが，契約関連成分のノイズ除去にどの程度役立つか，という問題として理解できる．また，非財務指標の採用に関する研究は，新しい指標が y_{co} を本当に拡張しているのか，それとも単なる追加的測定にとどまっているのか，という観点から整理し直すことができる．したがって，本稿は，ばらばらに見える実証結果に対して，統一的な読み方を与える可能性を持っている．

6.2　制度的・管理会計的含意

本稿の理論が持つ制度的含意は，責任会計，内部会計，KPI 設計，業績評価制度の再設計といった領域に及ぶ．とりわけ重要なのは，会計システムや内部評価制度を，単なる reporting の装置としてではなく，可制御状態をどれだけ observable に変換できるかを決める観測構造として捉え直す点である．

責任会計の文脈では，伝統的な controllability principle は，しばしば「管理者がコントロールできるものだけで評価すべきだ」という形で理解されてきた．しかし，本稿が示すのは，問題はそこまで単純ではないということである．ある要因が controllable であるだけでは契約に組み込めず，observable であるだけでも十分ではない．実際に重要なのは，その要因が価値関連であり，かつ契約上識別可能であることである．したがって，責任会計制度の設計において重要なのは，管理者の責任範囲を制度的に定義することだけでなく，その責任範囲に属する状態が，どの業績指標を通じて，どれだけ精度高く観測されているかを点検することである．

この含意は，業績指標の設計にも直接に及ぶ．実務上，新しい KPI を導入することそれ自体が目的化しやすいが，本稿の理論は，その発想に対して抑制的である．指標の数が増えること自体には価値はなく，重要なのは，その指標が契約関連信号空間を拡張するか，あるいは既存信号の精度を高めるかである．したがって，KPI 設計においては，まず何が controllable state であるかを明らかにし，そのうえで，どの指標がそれを最もよく写し出すかを考える必要がある．この順序を逆にして，測りやすい指標から先に集めてしまうと，業績評価は短期成果や形式的 compliance に偏りやすくなる．

さらに，会計システムと契約制度の間の補完性も，本稿の理論から自然に導かれる．もし会計システムが可制御状態を十分に捉えていないなら，契約制度の改善余地は構造的に限られる．逆に，内部会計，ERP，部門別計算，非財務データ基盤などが整備され，controllable states の観測可能性が高まれば，業績評価制度もより精緻で長期志向のものへ移行できる．したがって，報酬制度改革だけを単独で論じるのではなく，会計・情報システム改革と一体として考える必要がある．この点で，本稿は，管理会計制度と契約設計を別個の制度として扱うのではな

く，同一の観測構造の異なる表現として統合的に理解する視点を提供する．

6.3　応用可能性

本稿の理論は，抽象的な契約モデルにとどまらず，現代企業の多様な領域に応用可能である．特に有望なのは，動的能力，研究開発，多部門組織，非財務業績指標および ESG といった，長期価値創造の中心が潜在状態に宿る領域である．

第一に，動的能力の蓄積に関する応用がある．人的資本，組織学習，技術蓄積，プロセス改善，顧客基盤といった能力状態は，将来価値にとって重要である一方，短期的には観測しにくいことが多い．このとき，本稿の理論は，短期財務指標中心の契約が能力形成を過少に誘導しやすい理由を説明する．すなわち，長期能力が $\mathcal{S}_c$ に属していても，$\mathcal{S}_o$ への射影が弱ければ，契約関連部分空間は短期成果側に偏るからである．

第二に，研究開発と長期インセンティブの問題がある．研究開発努力は，知識ストックやパイプラインといった中間状態を経由して将来価値へ作用する．そのため，当期利益や株価だけを用いた契約では，初期段階の controllable states が十分に observable ではない．本稿の枠組みによれば，株式報酬，長いベスティング期間，マイルストーン指標などは，こうした遅れて観測される状態を契約関連部分空間へ近づける制度として理解できる．

第三に，多部門組織への応用がある．部門長の努力が自部門だけでなく，共通基盤や他部門の状態に影響する場合，単純な部門別利益による評価は，その controllable contribution を十分に写し出せない可能性がある．これは，部門間協力の不足や共有投資の過少という形で現れうる．本稿の観点から見れば，この問題は，部門別観測システムが契約関連部分空間を十分に張れていないことの帰結である．

第四に，非財務業績指標や ESG の利用に対する含意がある．近年，環境指標，人的資本指標，安全指標，顧客指標などを報酬契約へ組み込む動きが強まっているが，その妥当性は一様ではない．本稿の理論は，それらが契約に入るべきなのは，それが行動で動かしうる，かつ将来価値に関係する状態を十分に観測する場合に限られると示唆する．したがって，ESG 指標だから契約に入れるべきなのでも，逆に ESG 指標だから排除すべきなのでもない．重要なのは，その指標が $\mathcal{S}_{co}$ をどれだけ写し出しているかである．

これらの応用に共通するのは，価値創造の中心が潜在状態にあり，そのうちの一部だけが観測を通じて契約に取り込まれている，という点である．本稿は，その構造を一つの理論言語で記述することにより，従来は別々に論じられてきた問題群に対して，横断的な理解を与える．

6.4　小括

本節では，本稿の理論が持つ実証的・制度的・応用的含意を整理した．第一に，可制御性と可観測性の程度の差は，企業間・時系列の契約設計の差として観察されうることを示した．第二に，会計システム，内部業績評価，責任会計，KPI 設計は，いずれも可制御状態をどの程度 observable にするかという観点から再解釈できることを示した．第三に，動的能力，研究開発，多部門組織，非財務指標，ESG といった領域では，本稿の理論がとくに有効な理解枠組みを与えることを示した．

以上の含意は，本稿の理論が単なる抽象的な一般化ではなく，実証研究と制度設計に対して具体的な方向づけを与えることを意味している．次節では，本稿全体を総括し，その理論的貢

献と今後の課題を改めて整理する．

7　結語

本稿は，制御理論における可制御性と可観測性の概念を導入することにより，多期間・多次元のプリンシパル・エイジェント問題における業績評価と最適契約の構造を統一的に捉える理論的枠組みを提示した．従来の契約理論および会計研究は，情報性原理，複数業績指標の価値，多タスク環境における誘因の歪み，責任会計における controllability principle，動的契約における履歴依存性などについて，それぞれ重要な知見を蓄積してきた．しかし，企業の価値創造過程そのものを潜在状態の動学として明示的に表現し，そのうえで「何が行動によって動かしうるのか」と「何が観測を通じて識別しうるのか」を同一の理論枠組みの中で扱う試みは，なお十分ではなかった．本稿は，この空白を埋めることを目的としていた．

本稿の中心的な主張は，契約にとって本質的な状態成分が，可制御部分空間と可観測部分空間の交差，すなわち契約関連部分空間によって与えられるという点にある．エイジェントの努力によって動かしえない状態は，たとえよく観測されてもインセンティブの直接的対象にはなりえず，逆に，努力で動かしうるとしても観測できない状態は契約に組み込むことができない．したがって，最適契約の核となるのは，可制御であり，かつ可観測でもある状態に関する情報である．本稿は，この直観を，状態空間モデル，可制御性行列，可観測性行列，カルマン分解という制御理論の標準的道具を用いて明示化した．

さらに本稿は，追加的な直交性条件のもとで，最適契約の本体が契約関連信号空間への射影として特徴づけられることを示した．この結果は，業績評価において重要なのが，単に観測可能なシグナル一般ではなく，行動によって動かしうる状態についての観測可能な情報であることを明確にしている．他方で，本稿は同時に，可制御でないが可観測なシグナルも，契約関連成分に関する推定精度を高める限りで補助的な役割を果たしうることを認めた．したがって，本稿の理論は，「観測可能なら価値がある」「制御不能なら無価値である」といった粗い二分法ではなく，契約の本体と補助的シグナルとの役割分担を，より精密に整理するものとなっている．

本稿のもう一つの重要な貢献は，既存の代表的理論との関係を，単なる言及ではなく，一般理論の内部で位置づけた点にある．Holmström and Milgrom (1991) の多タスク論理は，可制御ではあるが十分には可観測でない状態方向が存在するとき，観測可能な活動への最適誘因が second-best 的に制約される特殊ケースとして理解される．Feltham and Xie (1994) の複数業績指標の価値は，契約関連信号空間の拡張またはその精度改善として再記述される．Lambert (2001) が整理した accounting measures in contracting の議論は，可制御・可観測部分空間にもとづく動的状態空間モデルのもとで，より明示的な基礎づけを与えられる．この意味で，本稿は，既存理論と競合するというより，それらをより高い抽象度のもとで再配置するものである．

本稿の理論は，理論的な整理にとどまらず，実証研究および制度設計に対しても具体的な含意を持つ．実証的には，可制御性と可観測性の程度の差が，企業間の契約感応度の差，情報システム改革後の報酬制度の変化，新たな業績指標の採用の差として観察されうる．制度的には，責任会計，内部会計，KPI 設計，業績評価制度は，いずれも可制御状態をどの程度 observable に変換しているかという観点から再評価されるべきである．また，動的能力，研究開発，多部門組織，非財務指標，ESG といった応用領域では，本稿の理論は，価値創造の中核が潜在状態に宿るにもかかわらず，それが短期的には十分観測されないという問題を，一つの共通言語で

捉えることを可能にする．

もっとも，本稿の射程には明確な限界もある．本稿は，線形状態空間モデルと線形契約を基準的環境として採用し，観測構造を所与として扱っている．したがって，非線形的な契約形態，複数主体の相互作用，主観評価や関係契約，さらには観測構造そのものの内生的設計問題までは，本稿では扱っていない．こうした限界は，同時に今後の研究課題でもある．とりわけ重要なのは，所与の controllability のもとで，どの測定行列あるいはどの測定集合を選べば observability を改善できるか，という観測構造の設計問題である．本稿は，その問題に入る前段階として，まず「与えられた観測構造のもとで契約上何が本質的か」を明らかにしたものと位置づけられる．

本稿の中心的メッセージを一文で要約するならば，効果的な業績評価とは，単に測定可能なものを測定することではなく，行動によって動かしうる状態についての観測可能な情報に報いることである，ということになる．この一見直観的な原理を，多期間・多次元の契約環境において数理的に明示し，既存理論との接続，実証的含意，制度的含意を与えたことが，本稿の貢献である．もし本稿の枠組みが，契約理論，会計研究，組織設計論のあいだに新たな接点を与え，今後の理論・実証・制度設計における出発点の一つとなるならば，本稿の目的は達せられたと言えるだろう．

参考文献

Aghion, Philippe, and Jean Tirole. 1997. “Formal and Real Authority in Organizations.” Journal of Political Economy 105 (1): 1 – 29.

Antle, Rick, and Joel S. Demski. 1988. “The Controllability Principle in Responsibility Accounting.” The Accounting Review 63 (4): 700 – 718.

Baker, George P. 1992. “Incentive Contracts and Performance Measurement.” Journal of Political Economy 100 (3): 598 – 614.

Banker, Rajiv D., and Srikant M. Datar. 1989. “Sensitivity, Precision, and Linear Aggregation of Signals for Performance Evaluation.” Journal of Accounting Research 27 (1): 21 – 39.

Christensen, John Asmus, and Joel S. Demski. 2003. Accounting Theory: An Information Content Perspective. Boston: McGraw-Hill/Irwin.

Cvitanić, Jakša, and Jianfeng Zhang. 2013. Contract Theory in Continuous-Time Models. Berlin and Heidelberg: Springer.

Dessein, Wouter. 2002. “Authority and Communication in Organizations.” Review of Economic Studies 69 (4): 811 – 838.

Feltham, Gerald A., and Jim Xie. 1994. “Performance Measure Congruity and Diversity in Multi-Task Principal/Agent Relations.” The Accounting Review 69 (3): 429 – 453.

Gibbons, Robert. 1998. “Incentives in Organizations.” Journal of Economic Perspectives 12 (4): 115 – 132.

Holmström, Bengt. 1979. “Moral Hazard and Observability.” Bell Journal of Economics 10 (1): 74 – 91.

Holmström, Bengt, and Paul Milgrom. 1991. “Multitask Principal-Agent Analyses: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design.” Journal of Law, Economics, and Organization 7

(Special Issue): 24 - 52.
Kailath, Thomas. 1980. Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
Kalman, Rudolf E. 1963. “Mathematical Description of Linear Dynamical Systems.” Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control 1 (2): 152 - 192.
Kalman, Rudolf E., and Richard S. Bucy. 1961. “New Results in Linear Filtering and Prediction Theory.” Journal of Basic Engineering 83 (1): 95 - 108.
Lambert, Richard A. 2001. “Contracting Theory and Accounting.” Journal of Accounting and Economics 32 (1 - 3): 3 - 87.
Milgrom, Paul, and John Roberts. 1990. “The Economics of Modern Manufacturing: Technology, Strategy, and Organization.” American Economic Review 80 (3): 511 - 528.
Milgrom, Paul R., and John Roberts. 1992. Economics, Organization, and Management. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
Rogerson, William P. 1985. “Repeated Moral Hazard.” Econometrica 53 (1): 69 - 76.
Sannikov, Yuliy. 2008. “A Continuous-Time Version of the Principal-Agent Problem.” Review of Economic Studies 75 (3): 957 - 984.
Spear, Stephen E., and Sanjay Srivastava. 1987. “On Repeated Moral Hazard with Discounting.” Review of Economic Studies 54 (4): 599 - 617.
Zhou, Kemin, John C. Doyle, and Keith Glover. 1996. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

付録 A　主結果の証明

A.1　命題 3.1 の証明

証明　命題 3.1 は，本稿の線形状態空間モデルに対して，状態空間を (i) 可制御かつ可観測，(ii) 可制御だが不可観測，(iii) 制御不能だが可観測，(iv) 制御不能かつ不可観測，という四つの部分に分解する座標変換が存在することを主張している．これは，制御理論でいう Kalman decomposition を，本稿の記号体系に引き直したものである．

証明の方針は次の通りである．まず，可制御部分空間 $\mathcal{S}_c$ に沿って状態空間を「可制御部分」と「制御不能部分」に分ける．次に，それぞれの部分空間の内部で，観測行列に関する可観測性分解を行う．最後に，その二段階の分解を組み合わせて，一つの正則変換行列 T を構成する．

まず，可制御性行列

$$\mathcal{C} = [B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B] \qquad \text{(付録 A.1)}$$

に対して，可制御部分空間を

$$\mathcal{S}_c := \mathrm{Im}(\mathcal{C}) \qquad \text{(付録 A.2)}$$

と定義する．任意の $x \in \mathcal{S}_c$ は，ある係数ベクトル列 $\{\xi_j\}_{j=0}^{n-1}$ を用いて

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \xi_j \qquad \text{(付録 A.3)}$$

と書ける．したがって，

$$Ax = \sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1} B \xi_j \qquad \text{(付録 A.4)}$$

となる．右辺には A^nB が現れうるが，Cayley–Hamilton の定理により A^n は $I, A, \dots, A^{n-1}$ の線形結合で表されるから，A^nB も $\mathcal{C}$ の列空間に属する．よって

$$A\mathcal{S}_c \subseteq \mathcal{S}_c \tag{付録 A.5}$$

であり，$\mathcal{S}_c$ は A-不変である．また明らかに

$$\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathcal{S}_c \tag{付録 A.6}$$

である．

有限次元ベクトル空間の標準結果より，$\mathcal{S}_c$ の補空間 $\mathcal{S}_{\bar{c}}$ を取り，

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_c \oplus \mathcal{S}_{\bar{c}} \tag{付録 A.7}$$

と書ける．ここで $\mathcal{S}_{\bar{c}}$ は一意ではないが，$\mathcal{S}_c$ に沿った基底を前に並べ，その補空間の基底を後ろに並べれば，ある正則行列 T_c が存在して

$$z_t = T_c s_t \tag{付録 A.8}$$

と変換したとき，状態方程式は

$$z_{t+1} = \begin{bmatrix} A_c & A_{c\bar{c}} \\ 0 & A_{\bar{c}} \end{bmatrix} z_t + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} e_t + \begin{bmatrix} C_c \\ C_{\bar{c}} \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^c \\ \varepsilon_t^{\bar{c}} \end{bmatrix} \tag{付録 A.9}$$

と書ける．ここで，下左ブロックがゼロになるのは $\mathcal{S}_c$ の A-不変性による．また観測方程式は

$$y_t = \begin{bmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{bmatrix} z_t + Du_t + \eta_t \tag{付録 A.10}$$

と書ける．

次に，可制御部分に対応するブロック (A_c, H_c) を考える．このブロックに対する可観測性行列を

$$\mathcal{O}_c = \begin{bmatrix} H_c \\ H_c A_c \\ \vdots \\ H_c A_c^{n_c - 1} \end{bmatrix} \tag{付録 A.11}$$

とし，その不可観測部分空間を

$$\mathcal{N}_{c\bar{o}} := \ker(\mathcal{O}_c) \tag{付録 A.12}$$

とおく．標準的な観測可能性理論より，$\mathcal{N}_{c\bar{o}}$ は A_c-不変である．したがって，

$$\mathbb{R}^{n_c} = \mathcal{S}_{co} \oplus \mathcal{S}_{c\bar{o}} \tag{付録 A.13}$$

となるように，$\mathcal{S}_{c\bar{o}} := \mathcal{N}_{c\bar{o}}$ とし，それを補う部分空間 $\mathcal{S}_{co}$ を選ぶことができる．ここで $\mathcal{S}_{co}$ は，可制御部分の内部で observable な方向に対応する．この基底に沿って可制御ブロックの内部だけをさらに変換する正則行列 U_c を取ると，

$$U_c A_c U_c^{-1} = \begin{bmatrix} A_{co} & A_{12} \\ 0 & A_{c\bar{o}} \end{bmatrix}, \qquad H_c U_c^{-1} = \begin{bmatrix} H_{co} & 0 \end{bmatrix} \tag{付録 A.14}$$

と書ける．また入力行列は

$$U_c B_c = \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \tag{付録 A.15}$$

となる．

同様に，制御不能部分に対応するブロック $(A_{\bar{c}}, H_{\bar{c}})$ を考える．このブロックに対する可観測性行列を

$$\mathcal{O}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} H_{\bar{c}} \\ H_{\bar{c}} A_{\bar{c}} \\ \vdots \\ H_{\bar{c}} A_{\bar{c}}^{n_{\bar{c}}-1} \end{bmatrix} \tag{付録 A.16}$$

とし，その不可観測部分空間を

$$\mathcal{N}_{\bar{c}\bar{o}} := \ker(\mathcal{O}_{\bar{c}}) \tag{付録 A.17}$$

と置く．これも標準的結果により $A_{\bar{c}}$-不変である．したがって，

$$\mathbb{R}^{n_{\bar{c}}} = \mathcal{S}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{S}_{\bar{c}\bar{o}} \tag{付録 A.18}$$

という分解が取れる．ここで $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ は「制御不能だが可観測」な方向，$\mathcal{S}_{\bar{c}\bar{o}}$ は「制御不能かつ不可観測」な方向に対応する．この分解に沿って正則行列 $U_{\bar{c}}$ を取ると，

$$U_{\bar{c}} A_{\bar{c}} U_{\bar{c}}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\bar{c}o} & A_{34} \\ 0 & A_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}, \qquad H_{\bar{c}} U_{\bar{c}}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \tag{付録 A.19}$$

と書ける．

いま，

$$U := \begin{bmatrix} U_c & 0 \\ 0 & U_{\bar{c}} \end{bmatrix} \tag{付録 A.20}$$

と定義し，全体の変換行列を

$$T := U T_c \tag{付録 A.21}$$

と置く．すると，変換後の状態

$$x_t := T s_t \tag{付録 A.22}$$

は

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^{co} \\ x_t^{c\bar{o}} \\ x_t^{\bar{c}o} \\ x_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \tag{付録 A.23}$$

と書ける．このとき，状態方程式は

$$x_{t+1} = \tilde{A} x_t + \tilde{B} e_t + \tilde{C} \theta_t + \tilde{\varepsilon}_t \tag{付録 A.24}$$

と書け，$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{H}$ は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{co} & A_{12} & * & * \\ 0 & A_{c\bar{o}} & * & * \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}o} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{H} = \begin{bmatrix} H_{co} & 0 & H_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \tag{付録 A.25}$$

という形になる．また，

$$\tilde{C} := TC, \qquad \tilde{\varepsilon}_t := T \varepsilon_t \tag{付録 A.26}$$

である．

以上より，努力の影響は第一・第二ブロックにのみ現れ，観測方程式への負荷は第一・第三ブロックにのみ現れる．したがって，第一ブロックは可制御かつ可観測，第二ブロックは可制御だが不可観測，第三ブロックは制御不能だが可観測，第四ブロックは制御不能かつ不可観測である．よって命題 3.1 が示された． □

A.2　命題 3.2 の証明

証明　命題 3.2 の主張は，線形ガウス環境のもとで，プリンシパルの情報集合に条件づけた状態の事後分布は平均と分散によって完全に特徴づけられ，その更新はカルマンフィルタの形で与えられる，というものである．本稿では，プリンシパルは努力 e_t を直接観察しないため，予測ステップには実現努力そのものではなく，均衡上の予想努力

$$\hat{e}_t^P := \mathbb{E}[e_t \mid \mathcal{I}_t^P] \tag{付録 A.27}$$

が入る．

仮定 3.1 より，初期状態は

$$s_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, P_0) \tag{付録 A.28}$$

であり，状態方程式と観測方程式はそれぞれ

$$s_{t+1} = As_t + Be_t + C\theta_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, Q), \tag{付録 A.29}$$

$$y_t = Hs_t + Du_t + \eta_t, \qquad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, R) \tag{付録 A.30}$$

で与えられる．ここで ε_t と η_t は互いに独立であり，外生過程 θ_t および u_t は共通知識である．

線形ガウス系では，ある時点 t において

$$s_t \mid \mathcal{I}_t^P \sim \mathcal{N}(\hat{s}_{t|t}^P, P_{t|t}^P) \tag{付録 A.31}$$

であれば，状態方程式により $s_{t+1} \mid \mathcal{I}_t^P$ の条件付き分布も正規分布であり，観測方程式を通じた更新後の事後分布も再び正規分布となる．したがって，帰納法により，任意の時点でプリンシパルの事後分布はガウス分布にとどまり，条件付き平均と条件付き分散だけで完全に特徴づけられる．

したがって，プリンシパルの状態推定問題は

$$\hat{s}_{t|t}^P = \mathbb{E}[s_t \mid \mathcal{I}_t^P], \qquad P_{t|t}^P = \mathrm{Var}(s_t \mid \mathcal{I}_t^P) \tag{付録 A.32}$$

を逐次更新する問題に帰着する．

次に，時点 t の情報集合 $\mathcal{I}_t^P$ のもとで，一期先の状態の条件付き平均を求める．状態方程式の両辺について $\mathcal{I}_t^P$ 条件付き期待値を取ると，

$$\mathbb{E}[s_{t+1} \mid \mathcal{I}_t^P] = A\,\mathbb{E}[s_t \mid \mathcal{I}_t^P] + B\,\mathbb{E}[e_t \mid \mathcal{I}_t^P] + C\theta_t + \mathbb{E}[\varepsilon_t \mid \mathcal{I}_t^P] \tag{付録 A.33}$$

$$= A\hat{s}_{t|t}^P + B\hat{e}_t^P + C\theta_t \tag{付録 A.34}$$

を得る．ここで $\mathbb{E}[\varepsilon_t \mid \mathcal{I}_t^P] = 0$ を用いた．したがって，予測平均は

$$\hat{s}_{t+1|t}^P = A\hat{s}_{t|t}^P + B\hat{e}_t^P + C\theta_t \tag{付録 A.35}$$

で与えられる．

つぎに，予測誤差を

$$\tilde{s}_{t+1|t}^P := s_{t+1} - \hat{s}_{t+1|t}^P \tag{付録 A.36}$$

と置くと，状態方程式と予測平均より

$$\tilde{s}_{t+1|t}^P = A(s_t - \hat{s}_{t|t}^P) + B(e_t - \hat{e}_t^P) + \varepsilon_t \tag{付録 A.37}$$

となる．本稿のベースラインでは，プリンシパルが直接観察しない努力に由来する追加的不確実性は，reduced-form に状態撹乱の共分散 Q に吸収されているものとして扱う．したがって，予測誤差の条件付き分散は

$$P^P_{t+1|t} = AP^P_{t|t}A' + Q \tag{付録 A.38}$$

と書ける．これが本文の予測共分散式である．

つぎに，観測 y_t を得た後の更新式を導く．時点 t の予測平均 $\hat{s}^P_{t|t-1}$ に対し，予測にもとづく観測値は

$$\hat{y}^P_{t|t-1} = H\hat{s}^P_{t|t-1} + Du_t \tag{付録 A.39}$$

である．したがって，innovation は

$$\nu^P_t := y_t - \hat{y}^P_{t|t-1} = y_t - Du_t - H\hat{s}^P_{t|t-1} \tag{付録 A.40}$$

となる．

線形ガウス環境では，更新推定値は innovation に対する線形補正の形を取るから，ある行列 G^P_t を用いて

$$\hat{s}^P_{t|t} = \hat{s}^P_{t|t-1} + G^P_t\nu^P_t \tag{付録 A.41}$$

と書ける．ここで G^P_t は平均二乗誤差を最小にするように選ばれ，直交性原理により

$$G^P_t = \mathrm{Cov}(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}, \nu^P_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1})\,\mathrm{Var}(\nu^P_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1})^{-1} \tag{付録 A.42}$$

で与えられる．

まず，共分散項は

$$\mathrm{Cov}(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}, \nu^P_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1}) = \mathrm{Cov}(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}, H(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}) + \eta_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1}) \tag{付録 A.43}$$

$$= P^P_{t|t-1}H' \tag{付録 A.44}$$

となる．ここで，η_t は状態推定誤差と独立であることを用いた．

つぎに，innovation の条件付き分散は

$$\mathrm{Var}(\nu^P_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1}) = \mathrm{Var}(H(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}) + \eta_t \mid \mathcal{I}^P_{t-1}) \tag{付録 A.45}$$

$$= HP^P_{t|t-1}H' + R \tag{付録 A.46}$$

である．したがって，カルマンゲインは

$$G^P_t = P^P_{t|t-1}H'(HP^P_{t|t-1}H' + R)^{-1} \tag{付録 A.47}$$

となり，更新式は

$$\hat{s}^P_{t|t} = \hat{s}^P_{t|t-1} + G^P_t(y_t - Du_t - H\hat{s}^P_{t|t-1}) \tag{付録 A.48}$$

と書ける．

最後に，更新後共分散を求める．更新誤差は

$$s_t - \hat{s}^P_{t|t} = (I - G^P_tH)(s_t - \hat{s}^P_{t|t-1}) - G^P_t\eta_t \tag{付録 A.49}$$

であるから，共分散は Joseph form によって

$$P^P_{t|t} = (I - G^P_tH)P^P_{t|t-1}(I - G^P_tH)' + G^P_tR(G^P_t)' \tag{付録 A.50}$$

と書ける．ここに最適ゲインを代入すると，標準的な恒等式により

$$P^P_{t|t} = (I - G^P_t H) P^P_{t|t-1} \tag{付録 A.51}$$

が得られる．

エイジェント側のフィルタも同様に導かれるが，エイジェントは自らの実現努力 e_t を知っているため，予測平均は

$$\hat{s}^A_{t+1|t} = A\hat{s}^A_{t|t} + Be_t + C\theta_t \tag{付録 A.52}$$

となる点だけが異なる．

以上により，命題 3.2 が示された． □

A.3　補題 4.1 の証明

証明　補題 4.1 の要点は，与えられた線形契約 (α, β) のもとで，各期の報酬成分 c_t はエイジェントの情報集合 $\mathcal{I}^A_t$ に条件づけると正規分布に従い，その risky compensation component は，条件付き平均から $\frac{\gamma}{2}$ 倍の条件付き分散を差し引いた certainty-equivalent form によって特徴づけられる，という点にある．そこから，本稿で用いる式 (4.2) の certainty-equivalent-type representation が導かれる．

まず，命題 3.2 より，エイジェントの情報集合 $\mathcal{I}^A_t$ のもとで，状態の事後分布は

$$s_t \mid \mathcal{I}^A_t \sim \mathcal{N}(\hat{s}^A_{t|t},\, P^A_{t|t}) \tag{付録 A.53}$$

で与えられる．観測方程式は

$$y_t = Hs_t + Du_t + \eta_t \tag{付録 A.54}$$

であり，$\eta_t \sim \mathcal{N}(0, R)$ は s_t の推定誤差と独立である．したがって，線形写像と独立正規ノイズの和である y_t も，$\mathcal{I}^A_t$ に条件づけると正規分布に従う．すなわち，

$$y_t \mid \mathcal{I}^A_t \sim \mathcal{N}\Big(H\hat{s}^A_{t|t} + Du_t, HP^A_{t|t}H' + R\Big) \tag{付録 A.55}$$

である．

いま，契約は

$$c_t = \alpha + \beta' y_t \tag{付録 A.56}$$

で与えられるから，c_t は y_t の affine function である．したがって，c_t も $\mathcal{I}^A_t$ のもとで正規分布に従い，ある条件付き平均 m^A_t と条件付き分散 v^A_t を用いて

$$c_t \mid \mathcal{I}^A_t \sim \mathcal{N}(m^A_t, v^A_t) \tag{付録 A.57}$$

と書ける．

まず，条件付き平均は

$$m^A_t := \mathbb{E}[c_t \mid \mathcal{I}^A_t] = \alpha + \beta' \,\mathbb{E}[y_t \mid \mathcal{I}^A_t] \tag{付録 A.58}$$

であり，上の結果を代入すると，

$$m^A_t = \alpha + \beta'(H\hat{s}^A_{t|t} + Du_t) \tag{付録 A.59}$$

が得られる．

つぎに，条件付き分散は

$$v_t^A := \mathrm{Var}(c_t \mid \mathcal{I}_t^A) = \mathrm{Var}(\alpha + \beta' y_t \mid \mathcal{I}_t^A) \tag{付録 A.60}$$

であるが，α は定数であるから，

$$v_t^A = \beta' \,\mathrm{Var}(y_t \mid \mathcal{I}_t^A)\, \beta \tag{付録 A.61}$$

となる．したがって，

$$v_t^A = \beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta \tag{付録 A.62}$$

である．

以上より，報酬 c_t の条件付き分布は

$$c_t \mid \mathcal{I}_t^A \sim \mathcal{N}\Big(\alpha + \beta'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t), \beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta\Big) \tag{付録 A.63}$$

と明示的に書ける．

ここで，エイジェントの一期間効用の risky compensation component は

$$u(c_t) = -\exp(-\gamma c_t) \tag{付録 A.64}$$

である．一般に，正規分布に従う確率変数 $X \sim \mathcal{N}(m, v)$ に対して，そのモーメント母関数の標準公式より

$$\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp\left(am + \frac{a^2}{2}v\right) \tag{付録 A.65}$$

が成り立つ．ここで $a = -\gamma$ と置くと，

$$\mathbb{E}[\exp(-\gamma c_t) \mid \mathcal{I}_t^A] = \exp\left(-\gamma m_t^A + \frac{\gamma^2}{2}v_t^A\right) \tag{付録 A.66}$$

であるから，

$$\mathbb{E}[u(c_t) \mid \mathcal{I}_t^A] = -\exp\left(-\gamma m_t^A + \frac{\gamma^2}{2}v_t^A\right) \tag{付録 A.67}$$

を得る．

ここで

$$CE_t^c := m_t^A - \frac{\gamma}{2}v_t^A \tag{付録 A.68}$$

と定義すると，

$$-\gamma CE_t^c = -\gamma m_t^A + \frac{\gamma^2}{2}v_t^A \tag{付録 A.69}$$

であるから，

$$\mathbb{E}[u(c_t) \mid \mathcal{I}_t^A] = -\exp(-\gamma CE_t^c) \tag{付録 A.70}$$

と書ける．すなわち，各期の risky compensation component は，条件付き平均から $\frac{\gamma}{2}$ 倍の条件付き分散を差し引いた

$$CE_t^c = \alpha + \beta'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t) - \frac{\gamma}{2}\beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta \tag{付録 A.71}$$

という certainty-equivalent compensation によって特徴づけられる．

努力費用は

$$g(e_t) = \frac{1}{2}e_t' K e_t \tag{付録 A.72}$$

であるから，各期の certainty-equivalent-type period criterion は

$$CE_t^A := \alpha + \beta'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t) - \frac{\gamma}{2}\beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta - \frac{1}{2}e_t' K e_t \qquad \text{(付録 A.73)}$$

となる．したがって，本稿ではエイジェントの動学的問題を

$$CE_A(\{e_t\};\alpha,\beta) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T}\delta_A^t\left\{\alpha + \beta'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t) - \frac{\gamma}{2}\beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta - \frac{1}{2}e_t' K e_t\right\}\right] \qquad \text{(付録 A.74)}$$

という certainty-equivalent-type representation によって特徴づけることができる．

以上により，補題 4.1 の主張が示された． □

A.4 命題 4.1 の証明

証明 命題 4.1 の主張は，与えられた線形契約 (α,β) のもとで，エイジェントの最適努力が自らの状態推定値 $\hat{s}_{t|t}^A$ の線形関数として表される，というものである．この結果は，本稿の環境が，フィルタリングされた状態に関する線形二次ガウス型の動学的最適化問題へと帰着することから導かれる．

以下，証明は四段階で行う．第一に，補題 4.1 の確実性等価表現を用いて，エイジェントの問題を filtered state に関する Bellman 問題へ書き直す．第二に，エイジェント側の状態推定値の動学が，条件付き期待値の意味で状態推定値と努力に関して affine であることを確認する．第三に，価値関数が filtered state に関する二次・一次・定数項からなる形を取ることを後ろ向き帰納法で示す．第四に，その Bellman 方程式の一階条件から，最適努力が状態推定値の線形フィードバックで与えられることを導く．

まず，記法の簡略化のため

$$x_t := \hat{s}_{t|t}^A \qquad \text{(付録 A.75)}$$

と置く．また，有限期間問題として議論し，終端の後の価値関数を

$$V_{T+1}(x) \equiv 0 \qquad \text{(付録 A.76)}$$

と定義する．このとき，補題 4.1 より，時点 t におけるエイジェントの Bellman 方程式は

$$V_t(x_t) = \max_{e_t}\left\{\alpha + \beta'(Hx_t + Du_t) - \frac{\gamma}{2}\beta'(HP_{t|t}^A H' + R)\beta - \frac{1}{2}e_t' K e_t\right. \qquad \text{(付録 A.77)}$$

$$\left. + \delta_A\, \mathbb{E}_t^A[V_{t+1}(x_{t+1})]\right\} \qquad \text{(付録 A.78)}$$

と書ける．ここで $\mathbb{E}_t^A[\cdot]$ はエイジェントの情報集合 $\mathcal{I}_t^A$ に関する条件付き期待値である．

次に，エイジェント側の filtered state の推移を考える．命題 3.2 のエイジェント版より，予測ステップは

$$\hat{s}_{t+1|t}^A = A\hat{s}_{t|t}^A + Be_t + C\theta_t \qquad \text{(付録 A.79)}$$

で与えられる．他方，更新ステップは

$$\hat{s}_{t+1|t+1}^A = \hat{s}_{t+1|t}^A + G_{t+1}^A\left(y_{t+1} - Du_{t+1} - H\hat{s}_{t+1|t}^A\right) \qquad \text{(付録 A.80)}$$

である．したがって，

$$x_{t+1} = Ax_t + Be_t + C\theta_t + \zeta_{t+1} \qquad \text{(付録 A.81)}$$

と書ける．ここで

$$\zeta_{t+1} := G^A_{t+1}\Big(y_{t+1} - Du_{t+1} - H(Ax_t + Be_t + C\theta_t)\Big) \tag{付録 A.82}$$

である．カルマンフィルタの innovation の性質より，

$$\mathbb{E}^A_t[\zeta_{t+1}] = 0 \tag{付録 A.83}$$

であり，その条件付き分散

$$\Omega_{t+1} := \mathrm{Var}^A_t(\zeta_{t+1}) \tag{付録 A.84}$$

は，システム行列と共分散更新式によって決まる既知の行列である．重要なのは，x_{t+1} の条件付き平均が

$$\mathbb{E}^A_t[x_{t+1}] = Ax_t + Be_t + C\theta_t \tag{付録 A.85}$$

となり，filtered state の推移が，条件付き期待値の意味で x_t と e_t に関して affine である点である．

ここで，価値関数が filtered state に関して二次形式を取ることを示す．帰納法により，ある時点 $t+1$ において

$$V_{t+1}(x) = a_{t+1} + b'_{t+1}x + \frac{1}{2}x'M_{t+1}x \tag{付録 A.86}$$

と表せると仮定する．ここで a_{t+1} はスカラー，$b_{t+1} \in \mathbb{R}^n$，$M_{t+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は対称行列である．終端条件 $V_{T+1} \equiv 0$ は，この形の特殊ケースである．

記法の簡略化のため

$$\mu_{t+1} := Ax_t + Be_t + C\theta_t \tag{付録 A.87}$$

と置くと，

$$x_{t+1} = \mu_{t+1} + \zeta_{t+1} \tag{付録 A.88}$$

であるから，

$$\mathbb{E}^A_t[V_{t+1}(x_{t+1})] = a_{t+1} + b'_{t+1}\mu_{t+1} + \frac{1}{2}\mu'_{t+1}M_{t+1}\mu_{t+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(M_{t+1}\Omega_{t+1}) \tag{付録 A.89}$$

が得られる．ここで $\mathbb{E}^A_t[\zeta_{t+1}] = 0$ を用いた．

これを Bellman 方程式へ代入すると，e_t に関係する項だけを集めて，

$$\Phi_t(e_t; x_t) = -\frac{1}{2}e'_tKe_t + \delta_A b'_{t+1}Be_t + \delta_A\mu'_{t+1}M_{t+1}Be_t \tag{付録 A.90}$$

$$+\frac{\delta_A}{2}e'_tB'M_{t+1}Be_t + \mathrm{const}(x_t, \theta_t, u_t) \tag{付録 A.91}$$

と書ける．ここで $\mathrm{const}(x_t, \theta_t, u_t)$ は e_t に依存しない項をまとめたものである．$\mu_{t+1} = Ax_t + Be_t + C\theta_t$ を展開し直すと，

$$\Phi_t(e_t; x_t) = -\frac{1}{2}e'_t\left(K - \delta_A B'M_{t+1}B\right)e_t + e'_t\delta_A B'\left(b_{t+1} + M_{t+1}(Ax_t + C\theta_t)\right) + \mathrm{const}(x_t, \theta_t, u_t) \tag{付録 A.92}$$

が得られる．

本稿では，命題 4.1 の前提として，エイジェントの問題が well-defined であり，最適反応が一意に存在する状況を想定している．したがって，行列

$$K - \delta_A B'M_{t+1}B \tag{付録 A.93}$$

は可逆であり，$\Phi_t(e_t; x_t)$ は e_t に関して厳密凹とみなせる．よって一階条件は必要十分となり，

$$-\left(K-\delta_A B' M_{t+1} B\right) e_t+\delta_A B'\left(b_{t+1}+M_{t+1}(A x_t+C \theta_t)\right)=0 \quad \text{(付録 A.94)}$$

を得る．これを解くと，

$$\begin{aligned} e_t^* = & \left(K-\delta_A B' M_{t+1} B\right)^{-1} \delta_A B' M_{t+1} A x_t && \text{(付録 A.95)} \\ & +\left(K-\delta_A B' M_{t+1} B\right)^{-1} \delta_A B'\left(b_{t+1}+M_{t+1} C \theta_t\right) && \text{(付録 A.96)} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$F_t(\beta):=\left(K-\delta_A B' M_{t+1} B\right)^{-1} \delta_A B' M_{t+1} A \quad \text{(付録 A.97)}$$

および

$$f_t(\beta, \theta_t, u_t):=\left(K-\delta_A B' M_{t+1} B\right)^{-1} \delta_A B'\left(b_{t+1}+M_{t+1} C \theta_t\right) \quad \text{(付録 A.98)}$$

と定義すれば，

$$e_t^*=F_t(\beta) x_t+f_t(\beta, \theta_t, u_t) \quad \text{(付録 A.99)}$$

すなわち

$$e_t^*=F_t(\beta) \hat{s}_{t|t}^A+f_t(\beta, \theta_t, u_t) \quad \text{(付録 A.100)}$$

が得られる．

最後に，これを Bellman 方程式へ戻し入れると，V_t は再び

$$V_t(x)=a_t+b_t' x+\frac{1}{2} x' M_t x \quad \text{(付録 A.101)}$$

という形に閉じる．したがって，後ろ向き帰納法により，すべての時点でこの表現が成立する．

さらに，システム行列 A, B, H，ノイズ共分散 Q, R，費用行列 K，契約係数 β が時間不変であり，(A, B) の stabilizability と (A, H) の detectability が成り立つとする．このとき，対応する Riccati 型再帰は定常解を持ち，$F_t(\beta)$ は定常行列 $F(\beta)$ に収束する．また，θ_t と u_t が平均ゼロで，定数ドリフトが存在しなければ affine term は消え，

$$e_t^*=F(\beta) \hat{s}_{t|t}^A \quad \text{(付録 A.102)}$$

と書ける．

以上により，命題 4.1 が示された． □

A.5　系 4.1 の証明

証明　系 4.1 の主張は，カルマン分解によって状態空間を (i) 可制御かつ可観測な部分，(ii) 可制御だが不可観測な部分，(iii) 制御不能だが可観測な部分，(iv) 制御不能かつ不可観測な部分へ分解すると，エイジェントの最適努力は，これらのうち可制御部分に対応する状態推定値にのみ直接依存する，というものである．

命題 3.1 より，適切な座標変換 $x_t = T s_t$ を施すと，状態は

$$x_t=\begin{bmatrix} x_t^{co} \\ x_t^{c\bar{o}} \\ x_t^{\bar{c}o} \\ x_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \text{(付録 A.103)}$$

と分解でき，変換後の状態方程式と観測方程式は

$$x_{t+1} = \tilde{A}x_t + \tilde{B}e_t + \tilde{C}\theta_t + \tilde{\varepsilon}_t, \qquad y_t = \tilde{H}x_t + Du_t + \eta_t \tag{付録 A.104}$$

の形で表される．このとき，入力行列 $\tilde{B}$ は

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{付録 A.105}$$

というブロック構造を持つ．すなわち，努力 e_t は x_t^{co} および $x_t^{c\bar{o}}$ に対応する部分空間には作用するが，$x_t^{\bar{c}o}$ および $x_t^{\bar{c}\bar{o}}$ に対応する部分空間には直接には作用しない．

つぎに，命題 4.1 をこの変換後の座標系に適用する．命題 4.1 は，与えられた線形契約 (α, β) のもとで，エイジェントの最適努力が，自らの状態推定値の線形フィードバックとして

$$e_t^* = \tilde{F}_t(\beta)\hat{x}_{t|t}^A + \tilde{f}_t(\beta, \theta_t, u_t) \tag{付録 A.106}$$

と表せることを主張している．ここで

$$\hat{x}_{t|t}^A = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t|t}^{co,A} \\ \hat{x}_{t|t}^{c\bar{o},A} \\ \hat{x}_{t|t}^{\bar{c}o,A} \\ \hat{x}_{t|t}^{\bar{c}\bar{o},A} \end{bmatrix} \tag{付録 A.107}$$

と分解し，フィードバック行列 $\tilde{F}_t(\beta)$ を対応するブロックに分けると，

$$\tilde{F}_t(\beta) = \begin{bmatrix} F_t^{co} & F_t^{c\bar{o}} & F_t^{\bar{c}o} & F_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \tag{付録 A.108}$$

と書ける．したがって，

$$e_t^* = F_t^{co}\hat{x}_{t|t}^{co,A} + F_t^{c\bar{o}}\hat{x}_{t|t}^{c\bar{o},A} + F_t^{\bar{c}o}\hat{x}_{t|t}^{\bar{c}o,A} + F_t^{\bar{c}\bar{o}}\hat{x}_{t|t}^{\bar{c}\bar{o},A} + \tilde{f}_t(\beta, \theta_t, u_t) \tag{付録 A.109}$$

となる．

以下では，$F_t^{\bar{c}o} = 0$ および $F_t^{\bar{c}\bar{o}} = 0$ であることを示せばよい．そのために，命題 4.1 の証明で用いた Bellman 方程式の一階条件を，カルマン分解後の座標系で見直す．エイジェントの問題は，補題 4.1 より filtered state に関する線形二次型の動学的最適化問題へ帰着する．したがって，最適努力の一階条件は，現在の filtered state が将来の filtered state に与える影響のうち，努力を通じて変えられる方向に関してのみ意味を持つ．

しかし，上の $\tilde{B}$ の形から明らかなように，努力 e_t は $\tilde{B}e_t$ を通じて，x_t^{co} と $x_t^{c\bar{o}}$ の方向にしか作用しない．これに対して，$x_t^{\bar{c}o}$ および $x_t^{\bar{c}\bar{o}}$ は，少なくとも努力の直接の作用対象ではない．したがって，Bellman 方程式を e_t で微分したときに現れる限界条件は，可制御ブロックに関する状態推定値を通じてのみ形成される．言い換えれば，$\hat{x}_{t|t}^{\bar{c}o,A}$ および $\hat{x}_{t|t}^{\bar{c}\bar{o},A}$ は，最適努力を決める限界条件には直接入らず，せいぜい外生的な状態シフターとして continuation value に現れるにとどまる．

このことは，命題 4.1 の証明で得られた一階条件をブロック表示で書けば，より明確になる．そこでの一階条件は一般に

$$-\Lambda_t e_t + \Gamma_t \hat{x}_{t|t}^A + \psi_t = 0 \tag{付録 A.110}$$

の形を取る．ここで Λ_t は努力費用と将来価値から生じる可逆行列，Γ_t は filtered state に対する係数行列，ψ_t は θ_t や u_t に依存する項である．カルマン分解後には，努力の作用構造 $\tilde{B}$ のゼロブロックによって，Γ_t のうち $\hat{x}^{\bar{c}o,A}_{t|t}$ および $\hat{x}^{\bar{c}\bar{o},A}_{t|t}$ にかかる部分は消える．したがって，

$$-\Lambda_t e_t + \Gamma^{co}_t \hat{x}^{co,A}_{t|t} + \Gamma^{c\bar{o}}_t \hat{x}^{c\bar{o},A}_{t|t} + \psi_t = 0 \tag{付録 A.111}$$

となり，ここから

$$e^*_t = \Lambda^{-1}_t \Gamma^{co}_t \hat{x}^{co,A}_{t|t} + \Lambda^{-1}_t \Gamma^{c\bar{o}}_t \hat{x}^{c\bar{o},A}_{t|t} + \Lambda^{-1}_t \psi_t \tag{付録 A.112}$$

が得られる．そこで

$$F^{co}_t := \Lambda^{-1}_t \Gamma^{co}_t, \qquad F^{c\bar{o}}_t := \Lambda^{-1}_t \Gamma^{c\bar{o}}_t, \qquad f_t := \Lambda^{-1}_t \psi_t \tag{付録 A.113}$$

と置けば，

$$e^*_t = F^{co}_t \hat{x}^{co,A}_{t|t} + F^{c\bar{o}}_t \hat{x}^{c\bar{o},A}_{t|t} + f_t \tag{付録 A.114}$$

が従う．したがって

$$F^{\bar{c}o}_t = 0, \qquad F^{\bar{c}\bar{o}}_t = 0 \tag{付録 A.115}$$

であり，

$$\frac{\partial e^*_t}{\partial \hat{x}^{\bar{c}o,A}_{t|t}} = 0, \qquad \frac{\partial e^*_t}{\partial \hat{x}^{\bar{c}\bar{o},A}_{t|t}} = 0 \tag{付録 A.116}$$

が成立する．

以上により，系 4.1 の主張，すなわち，エイジェントの最適努力は可制御部分空間に対応する状態推定値にのみ直接依存することが示された． □

A.6　定理 4.1 の証明

証明　定理 4.1 の主張は，所与の観測構造のもとで，契約関連信号空間

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \tag{付録 A.117}$$

の外側にある契約荷重は，仮定 4.1 のもとではインセンティブを改善せず，むしろリスク負担を増加させるだけである，という点にある．したがって，最適契約の本体は $\mathcal{Y}_{co}$ に属し，無制約最適解が存在する場合には，その $\mathcal{Y}_{co}$ への射影として表現される．

証明は四段階で行う．第一に，業績指標と契約感応度を $\mathcal{Y}_{co}$ 上の成分とその直交補空間上の成分に分解する．第二に，その分解のもとで，エイジェントの最適反応が $\beta_\perp$ に依存しないことを示す．第三に，プリンシパルの縮約目的関数 $J(\beta)$ は，$\beta_\perp$ によって弱く低下することを示す．第四に，そこから最適解の構造を導く．

定義 4.2 より，契約関連信号空間は

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \subseteq \mathbb{R}^k \tag{付録 A.118}$$

である．ここで Π_{co} を $\mathcal{Y}_{co}$ への直交射影とし，任意の契約感応度ベクトル $\beta \in \mathbb{R}^k$ を

$$\beta = \beta_{co} + \beta_\perp, \qquad \beta_{co} := \Pi_{co}\beta, \qquad \beta_\perp := (I - \Pi_{co})\beta \tag{付録 A.119}$$

と分解する．同様に，観測ベクトル y_t を

$$y_t = y^{co}_t + y^\perp_t, \qquad y^{co}_t := \Pi_{co} y_t, \qquad y^\perp_t := (I - \Pi_{co}) y_t \tag{付録 A.120}$$

と分解する．すると，報酬は

$$c_t = \alpha + \beta' y_t = \alpha + \beta_{co}' y_t^{co} + \beta_\perp' y_t^\perp \tag{付録 A.121}$$

と書ける．

仮定 4.1 は，この $y_t^\perp$ が，努力に関する追加的限界情報を持たず，かつ y_t^{co} と条件付き直交していることを意味する．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial e_t} \mathbb{E}[y_t^\perp \mid \mathcal{I}_{t-1}^P, e_t] = 0 \tag{付録 A.122}$$

および

$$\mathrm{Cov}(y_t^{co}, y_t^\perp \mid \mathcal{I}_{t-1}^P, e_t) = 0 \tag{付録 A.123}$$

が成り立つ．

補題 4.1 より，エイジェントの問題は，各期の certainty-equivalent-type objective

$$\alpha + \beta' \mathbb{E}_t^A[y_t] - \frac{\gamma}{2} \beta' \mathrm{Var}_t^A(y_t) \beta - \frac{1}{2} e_t' K e_t \tag{付録 A.124}$$

を通じて特徴づけられる．ここで

$$\mathbb{E}_t^A[y_t] = \mathbb{E}_t^A[y_t^{co}] + \mathbb{E}_t^A[y_t^\perp] \tag{付録 A.125}$$

であり，仮定 4.1 により $\mathbb{E}_t^A[y_t^\perp]$ の努力に関する限界変化はゼロである．また，分散項についても，条件付き直交性により

$$\mathrm{Var}_t^A(\beta_{co}' y_t^{co} + \beta_\perp' y_t^\perp) = \beta_{co}' \Sigma_t^{co} \beta_{co} + \beta_\perp' \Sigma_t^\perp \beta_\perp \tag{付録 A.126}$$

と書ける．ただし

$$\Sigma_t^{co} := \mathrm{Var}_t^A(y_t^{co}), \qquad \Sigma_t^\perp := \mathrm{Var}_t^A(y_t^\perp) \tag{付録 A.127}$$

である．したがって，$\beta_\perp$ に依存する部分は effort choice に関して定数であり，エイジェントの最適反応は

$$e_t^*(\beta) = e_t^*(\beta_{co}) \qquad \text{for all } t \tag{付録 A.128}$$

となる．

つぎに，プリンシパルの縮約目的関数 $J(\beta)$ を考える．前段で示したように，β と β_{co} は同じ努力経路を誘導するので，企業状態の推移，ひいては価値関連状態から生じる surplus は両者のもとで同一である．したがって，β と β_{co} の違いは，参加制約を満たすために必要な報酬補償額にのみ現れる．

$\beta_\perp$ は，期待報酬のうち effort に影響しない transfer component と，追加的な報酬リスクの両方をもたらす．前者は固定給 α によって吸収される．後者については，上の分散分解より，$\beta_\perp$ に対応する追加リスクは

$$\beta_\perp' \Sigma_t^\perp \beta_\perp \tag{付録 A.129}$$

であり，これは非負である．したがって，リスク回避的エイジェントの参加制約を満たすためには，その分だけ固定給による補償が必要となる．ゆえに，

$$J(\beta) \le J(\beta_{co}) \tag{付録 A.130}$$

が成り立つ．

さらに，ある時点 t において

$$\beta_\perp' \Sigma_t^\perp \beta_\perp > 0 \tag{付録 A.131}$$

が成立し，かつ $\gamma > 0$ であれば，$\beta_\perp$ は strictly positive な risk premium を必要とする．簡潔な十分条件として，$R \succ 0$ であれば，$\beta_\perp \neq 0$ のとき通常

$$\beta_\perp' \Sigma_t^\perp \beta_\perp > 0 \tag{付録 A.132}$$

が保証される．したがって，その場合には

$$J(\beta) < J(\beta_{co}) \tag{付録 A.133}$$

が従う．

以上により，任意の feasible な $\beta \in \mathcal{B}$ に対して，その $\mathcal{Y}_{co}$ への射影 β_{co} が再び feasible であるならば，

$$J(\beta) \leq J(\beta_{co}) \tag{付録 A.134}$$

が成り立つ．ゆえに，最適解は $\mathcal{Y}_{co}$ に属するものの中から選べる．すなわち，

$$\beta^* \in \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.135}$$

と取ることができる．特に，$\mathcal{B} = \mathbb{R}^k$ で，無制約問題の唯一解を $\tilde{\beta}$ とすると，その $\mathcal{Y}_{co}$ に直交する成分は weakly dominated であるから，

$$\beta^* = \Pi_{co} \tilde{\beta} \tag{付録 A.136}$$

が得られる．

以上により，定理 4.1 が示された． □

A.7 命題 4.2 の証明

証明　命題 4.2 の主張は，仮定 4.1 を外した場合，すなわち $\mathcal{Y}_{co}$ の外側にある観測成分が，努力に関する追加的情報や，契約関連成分との条件付き共分散を持ちうる場合であっても，それらの観測成分の価値は，可制御・可観測状態成分に関する推定精度を改善する補助的フィルタとしての役割に限られる，というものである．

カルマン分解のもとで，契約にとって本質的なのは可制御かつ可観測な状態ブロック x_t^{co} である．実際，系 4.1 が示すように，エイジェントの努力は可制御部分，すなわち x_t^{co} および $x_t^{c\bar{o}}$ にしか直接作用しない．他方，契約は観測可能な指標 y_t にのみ条件づけられるから，直接に契約へ取り込める可制御成分は x_t^{co} に限られる．したがって，契約の本体が依拠する潜在状態は x_t^{co} である．

契約関連信号空間に対応する観測成分を

$$y_t^{co} := \Pi_{co} y_t, \qquad y_t^\perp := (I - \Pi_{co}) y_t \tag{付録 A.137}$$

と分ける．仮定 4.1 を置かないので，一般には

$$\mathrm{Cov}(x_t^{co}, y_t^\perp \mid \mathcal{I}_{t-1}^P, y_t^{co}) \neq 0 \tag{付録 A.138}$$

でありうる．すなわち，$y_t^\perp$ は $\mathcal{Y}_{co}$ の外側にあるにもかかわらず，契約関連状態 x_t^{co} について追加的な情報を持つ可能性がある．

ここで，時点 t における public information を

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{I}_{t-1}^P, y_t^{co}) \tag{付録 A.139}$$

と置く．$y_t^\perp$ を使わないときの x_t^{co} の事後推定値は

$$\hat{x}_{t|t}^{co,P,\mathrm{base}} := \mathbb{E}[x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t] \tag{付録 A.140}$$

であり，$y_t^\perp$ も使うときの事後推定値は

$$\hat{x}_{t|t}^{co,P,\mathrm{full}} := \mathbb{E}[x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t, y_t^\perp] \tag{付録 A.141}$$

である．線形ガウス環境のもとでは，条件付き期待値は線形射影で与えられるから，

$$\hat{x}_{t|t}^{co,P,\mathrm{full}} = \hat{x}_{t|t}^{co,P,\mathrm{base}} + \mathrm{Cov}(x_t^{co}, y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t)\,\mathrm{Var}(y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t)^{-1} \tag{付録 A.142}$$

$$\times \Big(y_t^\perp - \mathbb{E}[y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t]\Big) \tag{付録 A.143}$$

と書ける．したがって，$y_t^\perp$ が追加的価値を持つのは，

$$\mathrm{Cov}(x_t^{co}, y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t) \neq 0 \tag{付録 A.144}$$

のときに限られる．そしてこの場合でも，その価値は x_t^{co} の posterior mean をより精密にすること，言い換えれば，契約関連状態についての推定精度を高めることに尽きる．

同じことは条件付き分散を見ても分かる．ガウス線形射影の標準公式より，

$$\mathrm{Var}(x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t, y_t^\perp) = \mathrm{Var}(x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t) \tag{付録 A.145}$$

$$- \mathrm{Cov}(x_t^{co}, y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t)\,\mathrm{Var}(y_t^\perp \mid \mathcal{G}_t)^{-1}\,\mathrm{Cov}(y_t^\perp, x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t) \tag{付録 A.146}$$

である．右辺第二項は半正定値であるから，

$$\mathrm{Var}(x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t, y_t^\perp) \preceq \mathrm{Var}(x_t^{co} \mid \mathcal{G}_t) \tag{付録 A.147}$$

が成り立つ．すなわち，$y_t^\perp$ が有用であるなら，それは x_t^{co} に関する事後不確実性を減らす，という形でしか現れない．

さらに，$y_t^\perp$ のうち何が有用で，何が単なるノイズかを明示するため，$\mathcal{G}_t$ と x_t^{co} に関する条件付き射影を用いて

$$y_t^\perp = \tilde{y}_t^\perp + \zeta_t, \qquad \tilde{y}_t^\perp := \mathbb{E}[y_t^\perp \mid x_t^{co}, \mathcal{G}_t] \tag{付録 A.148}$$

と分解する．すると

$$\mathbb{E}[\zeta_t \mid x_t^{co}, \mathcal{G}_t] = 0 \tag{付録 A.149}$$

であるから，ζ_t は x_t^{co} に関する条件付き推定には寄与しない．したがって，$y_t^\perp$ が価値を持つとすれば，それは $\tilde{y}_t^\perp$ を通じて x_t^{co} に関する posterior inference を改善するからであって，ζ_t そのものに独立の契約価値があるわけではない．

以上より，$\mathcal{Y}_{co}$ の外側の観測成分が契約に入る場合，その役割は，新しい contract-relevant state を創出することではなく，既存の契約関連状態 x_t^{co} についての十分統計量をより精密に構成することに限られる．すなわち，$\beta_\perp$ の役割は，可制御・可観測状態成分についての推定精度を高める補助的フィルタに限られる．これが命題 4.2 の主張である． □

A.8　命題 4.3 の証明

証明　命題 4.3 の主張は，価値関連状態がすべて可制御・可観測部分空間に含まれており，しかも契約関連方向についてリスク分担の歪みが消えるときには，線形契約によって first-best を実装できる，というものである．

まず，first-best とは，努力が観察可能であり，したがって誘因整合性制約が不要であるときに，プリンシパルが参加制約だけを満たしつつ達成できる配分を意味する．このとき，報酬は純粋な移転であるから，努力選択の観点からは総余剰最大化問題を考えればよい．簡潔さのため，planner の目的関数を

$$W(\{e_t\}) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_P^t \left(r' s_t - \frac{1}{2} e_t' K e_t\right)\right] \tag{付録 A.150}$$

とおく．first-best effort path $\{e_t^{FB}\}$ は，この $W(\{e_t\})$ を最大化する努力系列として定義される．

つぎに，命題の第一条件

$$r \in \mathcal{S}_{co} \tag{付録 A.151}$$

を考える．これは，価値関連状態がすべて可制御かつ可観測な方向に含まれていることを意味する．言い換えれば，企業価値に効く状態方向は，(i) エイジェントの努力によって動かすことができ，かつ (ii) 観測構造を通じて契約へ反映させることができる．この条件のもとでは，価値関連方向について，少なくとも理論上は，その限界寄与を契約関連信号空間を通じて pricing することができる．すなわち，契約関連信号空間

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \tag{付録 A.152}$$

に属するある契約感応度ベクトル β^{FB} が存在して，価値関連状態の限界寄与を，契約上の業績指標の限界寄与として表現できる．

まず，エイジェントがリスク中立的な場合，すなわち

$$\gamma = 0 \tag{付録 A.153}$$

を考える．このとき，補題 4.1 の確実性等価表現におけるリスクプレミアム項は消える．したがって，エイジェントの目的関数は

$$CE_A(\{e_t\}; \alpha, \beta) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_A^t \left\{\alpha + \beta'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t) - \frac{1}{2} e_t' K e_t\right\}\right] \tag{付録 A.154}$$

となる．ここで $\beta = \beta^{FB}$ を選ぶと，価値関連状態が $\mathcal{S}_{co}$ に属していることから，エイジェントの私的目的関数は，定数項 α と外生項 Du_t を除けば，planner の目的関数と同一の限界条件を持つ．したがって，一階条件は

$$\frac{\partial}{\partial e_t} \mathbb{E}_t[r' s_t] = K e_t \tag{付録 A.155}$$

となり，これは planner の first-best 条件そのものである．よって，

$$e_t^*(\alpha, \beta^{FB}) = e_t^{FB} \qquad \text{for all } t \tag{付録 A.156}$$

が成立する．最後に，固定給 α を参加制約が等号で成立するように選べば，first-best 配分が実装される．

つぎに，本文の第二条件

$$R = 0 \tag{付録 A.157}$$

については，単に measurement error がゼロという弱い意味ではなく，価値関連かつ契約関連な方向についてエイジェントが負担する追加的報酬リスクが残らないという強い意味で解する．すなわち，β^{FB} に沿った報酬成分について

$$\mathrm{Var}_t^A((\beta^{FB})' y_t) = 0 \tag{付録 A.158}$$

が成り立つと読む．この場合，補題 4.1 のリスクプレミアム項は，少なくとも $\beta = \beta^{FB}$ に沿った契約関連方向では消滅する．したがって，エイジェントの確実性等価は

$$CE_A(\{e_t\}; \alpha, \beta^{FB}) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T} \delta_A^t \left\{\alpha + (\beta^{FB})'(H\hat{s}_{t|t}^A + Du_t) - \frac{1}{2} e_t' K e_t\right\}\right] \tag{付録 A.159}$$

となり，前段と同じ一階条件が成立する．したがって，この場合にも

$$e_t^*(\alpha, \beta^{FB}) = e_t^{FB} \tag{付録 A.160}$$

が成り立ち，固定給 α を参加制約が binding になるように選べば first-best が実装される．

最後に，単に

$$\mathcal{S}_{co} = \mathbb{R}^n \tag{付録 A.161}$$

であるだけでは，一般には first-best は保証されないことを確認する．たしかにこの条件は，すべての状態方向が可制御であり，かつ可観測でもあることを意味する．しかし，それだけでは，エイジェントがリスクを負わずに社会的限界便益に沿った努力を選べるとは限らない．たとえすべての状態が $\mathcal{S}_{co}$ に入っていても，契約が状態変動に伴う residual risk をエイジェントへ負わせるなら，リスク回避的エイジェントは second-best 的に努力を歪める．したがって，first-best 実装には，単なる可制御性・可観測性だけでなく，リスク分担の歪みが消える条件が必要である．

以上により，命題 4.3 が示された．□

A.9　命題 4.4 の証明

証明　命題 4.4 の主張は，契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ に属するある観測方向について，測定ノイズが小さくなると，その方向に契約荷重をかけることの限界価値が上昇する，というものである．特に，契約関連信号空間が一次元である場合には，対応する最適業績感応度の絶対値が弱く増加することを示すことができる．

まず，$\mathcal{Y}_{co}$ が一次元である場合を考える．すなわち，ある単位ベクトル $q \in \mathbb{R}^k$ が存在して

$$\mathcal{Y}_{co} = \mathrm{span}\{q\} \tag{付録 A.162}$$

と書けるとする．このとき，定理 4.1 より，最適契約は

$$\beta = bq \tag{付録 A.163}$$

という形に制限してよい．ここで $b \in \mathbb{R}$ は，契約関連信号方向 q に沿ったスカラー荷重である．

対応する契約関連信号を

$$z_t := q' y_t^{co} \tag{付録 A.164}$$

と書くと，報酬は

$$c_t = \alpha + b z_t \tag{付録 A.165}$$

となる．ここで，z_t の条件付き分散を

$$\sigma_t^2 := \mathrm{Var}_t^A(z_t) \tag{付録 A.166}$$

と書く．命題 4.4 が扱っているのは，この σ_t^2 が，観測構造の改善によって小さくなる場合である．

補題 4.1 より，エイジェントのリスクコストは各期について

$$\frac{\gamma}{2} b^2 \sigma_t^2 \tag{付録 A.167}$$

で与えられる．したがって，参加制約を binding にするように固定給 α を調整した後のプリンシパルの縮約目的関数は，

$$J(b; \sigma^2) = G(b) - L(b; \sigma^2) \tag{付録 A.168}$$

と書ける．ここで $G(b)$ は，荷重 b を通じて誘導される努力と状態変化から生じる期待便益を表し，$L(b; \sigma^2)$ はエイジェントのリスク負担を補償するためのコストを表す．

一次元の契約関連信号の場合，L は

$$L(b; \sigma^2) = \frac{\gamma}{2} \Psi(\sigma^2) b^2 \tag{付録 A.169}$$

と表せる．ここで

$$\Psi(\sigma^2) := \sum_{t=0}^{T} \delta_A^t \sigma_t^2 \tag{付録 A.170}$$

は，契約関連信号方向に沿った discounted risk measure であり，観測ノイズ分散が低下すれば $\Psi(\sigma^2)$ も低下する．したがって，

$$\frac{d\Psi}{d\sigma^2} > 0 \tag{付録 A.171}$$

が成り立つと考えてよい．

内部解が存在し，$J(b; \sigma^2)$ が b に関して厳密凹であるとする．このとき，最適荷重 $b^*(\sigma^2)$ は一階条件

$$\frac{\partial J}{\partial b}(b^*; \sigma^2) = 0 \tag{付録 A.172}$$

を満たす．すなわち，

$$G'(b^*) - \gamma \Psi(\sigma^2) b^* = 0 \tag{付録 A.173}$$

である．また，二階条件は

$$\frac{\partial^2 J}{\partial b^2}(b^*; \sigma^2) = G''(b^*) - \gamma \Psi(\sigma^2) < 0 \tag{付録 A.174}$$

である．

この一階条件を σ^2 で微分すると，

$$\left(G''(b^*) - \gamma \Psi(\sigma^2)\right) \frac{db^*}{d\sigma^2} = \gamma \Psi'(\sigma^2) b^* \tag{付録 A.175}$$

が得られる．したがって，

$$\frac{db^*}{d\sigma^2} = \frac{\gamma\Psi'(\sigma^2)b^*}{G''(b^*) - \gamma\Psi(\sigma^2)} \tag{付録 A.176}$$

となる．ここで，分母は二階条件により負であり，$\Psi'(\sigma^2) > 0$ であるから，

$$b^* > 0 \Rightarrow \frac{db^*}{d\sigma^2} < 0, \qquad b^* < 0 \Rightarrow \frac{db^*}{d\sigma^2} > 0 \tag{付録 A.177}$$

が成り立つ．よって，

$$\frac{d|b^*|}{d\sigma^2} \leq 0 \tag{付録 A.178}$$

である．すなわち，観測ノイズ分散 σ^2 が小さくなると，最適契約における契約関連信号方向への荷重の絶対値は弱く増加する．

つぎに，$\mathcal{Y}_{co}$ が多次元である場合を考える．このとき，任意の単位ベクトル $q \in \mathcal{Y}_{co}$ を取り，契約感応度ベクトルを

$$\beta = \beta_{-q} + bq, \qquad q'\beta_{-q} = 0 \tag{付録 A.179}$$

と分解する．ここで β_{-q} は q に直交する成分である．このとき，q 方向に沿った契約関連信号

$$z_t^{(q)} := q'y_t^{co} \tag{付録 A.180}$$

について，観測ノイズが低下したとする．すると，β_{-q} を固定したうえでの方向別縮約目的関数

$$J_q(b;\sigma_q^2) \tag{付録 A.181}$$

は，一次元の場合と同様に，観測ノイズの低下によってその方向に荷重をかける限界リスク費用が下がる．したがって，q 方向に沿った契約荷重の限界価値は上昇する．

以上により，命題 4.4 が示された． □

A.10 命題 4.5 の証明

証明 命題 4.5 の主張は，新たな業績指標 y_t^{new} の契約上の価値が，(i) 契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ の拡張，あるいは (ii) 既存の契約関連信号についての推定精度の改善，という二つの経路のいずれかに還元される，というものである．逆に言えば，この二つのいずれにも該当しない新指標は，契約設計にとって本質的な新情報をもたらさず，第一義的な契約価値を持たない．

新たな業績指標 $y_t^{new} \in \mathbb{R}^m$ を追加した後の拡張観測ベクトルを

$$\bar{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_t^{new} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m} \tag{付録 A.182}$$

と書く．対応する観測構造を

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ H^{new} \end{bmatrix} \tag{付録 A.183}$$

とすると，拡張後の契約関連信号空間は

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} := \bar{H}(\mathcal{S}_{co}) \subseteq \mathbb{R}^{k+m} \tag{付録 A.184}$$

で与えられる．

まず，新指標を追加した問題は，旧問題を特殊ケースとして含む．実際，拡張後の契約感応度ベクトルを

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta^{new} \end{bmatrix} \tag{付録 A.185}$$

と書けば，$\beta^{new} = 0$ と置くことにより，旧来の任意の線形契約 (α, β) をそのまま再現できる．したがって，拡張後の可行契約集合は旧来の可行契約集合を包含しており，プリンシパルの縮約目的関数を旧来のものについて J，新指標追加後のものについて $\bar{J}$ と書けば，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) \geq \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.186}$$

が成り立つ．したがって，新指標の導入は少なくとも weakly nonnegative な価値を持つ．

つぎに，

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} \supsetneq \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.187}$$

が成り立つ場合を考える．これは，新しい観測系が，旧来は契約に利用できなかった契約関連状態方向を新たに可視化することを意味する．すなわち，ある $v \in \mathcal{S}_{co}$ が存在して，旧来の観測構造ではその像が十分に識別されなかったが，新指標追加後には対応する signal direction が明示的に観測可能になる．この場合，旧来の契約では直接 reward できなかった controllable and value-relevant state change に対して，新指標追加後には荷重をかけることが可能になる．したがって，旧来の second-best 契約が binding であり，かつその方向が価値関連であるなら，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) > \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.188}$$

が成立する．

つぎに，

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} = \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.189}$$

であっても，新指標が既存の契約関連方向について posterior precision を改善する場合を考える．契約関連状態ブロックを x_t^{co} と書き，旧情報のもとでの事後推定と事後分散を

$$\hat{x}_{t|t}^{co,\mathrm{old}} := \mathbb{E}[x_t^{co} \mid y_t], \qquad P_{t|t}^{co,\mathrm{old}} := \mathrm{Var}(x_t^{co} \mid y_t) \tag{付録 A.190}$$

とし，新情報のもとでの事後推定と事後分散を

$$\hat{x}_{t|t}^{co,\mathrm{new}} := \mathbb{E}[x_t^{co} \mid y_t, y_t^{new}], \qquad P_{t|t}^{co,\mathrm{new}} := \mathrm{Var}(x_t^{co} \mid y_t, y_t^{new}) \tag{付録 A.191}$$

とする．線形ガウス環境では，情報集合が豊かになるほど条件付き分散は弱く減少するから，

$$P_{t|t}^{co,\mathrm{new}} \preceq P_{t|t}^{co,\mathrm{old}} \tag{付録 A.192}$$

が成り立つ．ここで，少なくともある契約関連方向についてこの不等号が厳密であるとき，新指標は既存の契約関連方向について posterior precision を改善している．

この場合，同じ期待 effort を誘導する契約を考えたとしても，エイジェントが負う報酬リスクは低下する．補題 4.1 の静学版より，エイジェントの certainty-equivalent cost に入るのは報酬の条件付き分散であるから，既存の契約関連方向について posterior precision が上がるということは，同じ incentive content をより低い risk premium で実装できることを意味する．したがって，value-relevant direction に関する精度改善が厳密であり，エージェントがリスク回避的であるなら，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) > \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.193}$$

が成立する．

最後に，新指標が (i) $\mathcal{Y}_{co}$ を拡張せず，(ii) 既存の $\mathcal{Y}_{co}$ 上の posterior precision も改善しない，場合を考える．このとき，新指標は契約関連状態 x_t^{co} に関して，本質的に新しい情報を何も与えていない．線形ガウス環境では，この場合，新指標は旧来の観測 y_t に関する射影部分と，それに直交する残差部分に分解できる．すなわち，

$$y_t^{new} = \mathbb{E}[y_t^{new} \mid y_t] + \zeta_t \tag{付録 A.194}$$

と書け，しかも ζ_t は x_t^{co} に関する追加情報を持たない．したがって，第一項は旧来の契約で既に再現可能な冗長成分であり，第二項は契約関連状態についての補助的フィルタにすらなっていない純粋な余剰ノイズである．ゆえに，新指標は契約上の第一義的価値を持たない．

以上により，新たな業績指標 y_t^{new} が strict に正の契約価値を持つのは，(i) それが契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ を真に拡張する場合，または (ii) 既存の $\mathcal{Y}_{co}$ 上の posterior precision を改善する場合に限られる．これが命題 4.5 の主張である． □

A.11　命題 4.6 の証明

証明　命題 4.6 の主張は，状態次元の増加それ自体は契約効率性を必ずしも改善しないばかりか，その拡張が契約関連部分空間 $\mathcal{S}_{co}$ を広げず，主として $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ または $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ を増やす場合には，エイジェンシーコストが上昇しうる，というものである．ここで「上昇しうる」とは，一般に必ず上がるという意味ではなく，そのような状態次元拡張が契約効率性を厳密に悪化させるような経済環境が存在することを意味する．

エイジェンシーコストを

$$AC_n := W_n^{FB} - W_n^{SB} \tag{付録 A.195}$$

と定義する．ここで W_n^{FB} は状態次元 n のもとでの first-best 総余剰，W_n^{SB} は second-best 総余剰である．本命題の主張は，状態次元を n から $n+r$ に拡張したとき，拡張された新状態方向が $\mathcal{S}_{co}$ を広げず，もっぱら $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ または $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ に入るような場合には，

$$AC_{n+r} > AC_n \tag{付録 A.196}$$

となる経済環境が存在する，ということである．

まず，新たに追加される状態方向が，可制御だが不可観測な部分空間 $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ に属する場合を考える．この場合，エイジェントの努力はその状態に影響を与えうるが，プリンシパルはそれを業績指標から直接には識別できない．これを明示するため，既存の状態 x_t に加えて，新しい状態ブロック $u_t \in \mathbb{R}^{r_u}$ を導入した拡張系を考える：

$$\bar{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}. \tag{付録 A.197}$$

新しい状態 u_t は

$$u_{t+1} = A_u u_t + B_u e_t^u + \varepsilon_t^u \tag{付録 A.198}$$

で推移するとし，ここで e_t^u はエイジェントの追加努力成分，$B_u \neq 0$ とする．すなわち，u_t は controllable である．他方，観測方程式には u_t が入らない，すなわち

$$y_t = Hx_t + Du_t^{pub} + \eta_t \tag{付録 A.199}$$

とし，u_t は current public signal に現れないものとする．さらに，u_t は旧来の observable state block とも独立に進化し，間接的にも current contractible signals へ影響を与えないようにパラメータを選ぶ．すると u_t は $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ に属する．

ここで，この新状態 u_t が企業価値にとって意味を持つように，価値評価ベクトルに

$$r_u \neq 0 \tag{付録 A.200}$$

を持たせる．すなわち，総余剰の中に $r_u' u_t$ が入るとする．このとき first-best では，planner は u_t が value-relevant であり controllable であることを知っているから，対応する effort e_t^u を用いて u_t を増加させる方向に行動を選ぶ．したがって，十分小さな effort cost と十分大きな r_u を取れば，

$$W_{n+r_u}^{FB} > W_n^{FB} \tag{付録 A.201}$$

が成り立つ．

これに対し second-best では，u_t は observable ではないから，線形契約

$$c_t = \alpha + \beta' y_t \tag{付録 A.202}$$

のもとで，その状態に直接に報酬を結びつけることはできない．しかも今の構成では，u_t は current contractible signals とも独立であるから，u_t に対する effort は indirect にも reward されない．したがって，追加 effort e_t^u を正に選ぶ私的誘因は生じず，

$$e_t^{u,*} = 0 \tag{付録 A.203}$$

となる．ゆえに，

$$W_{n+r_u}^{SB} = W_n^{SB} \tag{付録 A.204}$$

あるいは，少なくとも $W_{n+r_u}^{SB}$ は first-best ほどには増加しない．したがって，

$$AC_{n+r_u} = W_{n+r_u}^{FB} - W_{n+r_u}^{SB} > W_n^{FB} - W_n^{SB} = AC_n \tag{付録 A.205}$$

が従う．

つぎに，新たに追加される状態方向が，制御不能だが可観測な部分空間 $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ に属する場合を考える．この場合，状態は観測可能であるが，エイジェントの努力によっては動かせない．したがって，その方向はインセンティブの直接的対象としては役立たない．にもかかわらず，それが観測システムに混入すると，契約設計を難しくしうる．

この点を示すため，既存の controllable and observable state q_t に加えて，新しい uncontrollable but observable state v_t を導入した静学的に単純な環境を考える．エージェントの努力 e_t は q_t のみに影響し，

$$q_t = b e_t + \varepsilon_t^q \tag{付録 A.206}$$

とする．他方，新状態 v_t は

$$v_t = \varepsilon_t^v \tag{付録 A.207}$$

とし，エイジェントの努力から独立であるから，これは $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ に属する．

いま，観測ベクトルが

$$y_t = \begin{bmatrix} q_t + v_t + \eta_t^1 \\ v_t + \eta_t^2 \end{bmatrix} \tag{付録 A.208}$$

で与えられるとする．このとき，v_t は current signals から識別可能であり observable であるが，effort によって動かせないから uncontrollable である．この環境では，プリンシパルは v_t をベンチマークとして利用し，第一式に混入した外生変動を一部除去できる可能性がある．しかし，ここでパラメータを，η_t^2 が十分に大きく，第二式が v_t の精密なフィルタとしてはほとんど役に立たないように選ぶ．すると，新たな v_t の導入は，effort-relevant signal q_t を汚すノイズ要因を増やす一方，十分な auxiliary filtering benefit は与えない．

他方，first-best では v_t は effort と独立であるから，努力の選択条件には影響しない．したがって，

$$W_{n+r_v}^{FB} = W_n^{FB} \qquad \text{(付録 A.209)}$$

である．これに対し second-best では，effort を誘導する public performance measure の precision が低下するため，最適契約の業績感応度は弱まり，誘導される effort は低下する．したがって，

$$W_{n+r_v}^{SB} < W_n^{SB} \qquad \text{(付録 A.210)}$$

となるパラメータ設定が存在する．よって，

$$AC_{n+r_v} = W_{n+r_v}^{FB} - W_{n+r_v}^{SB} > W_n^{FB} - W_n^{SB} = AC_n \qquad \text{(付録 A.211)}$$

が成立する．

以上より，状態次元の拡張が $\mathcal{S}_{co}$ を伴わず，主として $\mathcal{S}_{c\bar{o}}$ または $\mathcal{S}_{\bar{c}o}$ を拡大する場合，エイジェンシーコストは上昇しうる．これが命題 4.6 の主張である． □

A.12 系 5.1 の証明

証明　系 5.1 の主張は，本稿の一般理論を一期間の静学的多タスク環境へ縮約すると，Holmstr”om and Milgrom (1991) の中核的洞察，すなわち「観測しにくいが価値にとって重要な活動が存在するとき，観測可能な活動への最適誘因は弱められる」という論理が回復される，というものである．ただし，本稿がここで回復しているのは Holmstr”om and Milgrom (1991) の全結果ではなく，多タスク環境において，観測不能な controllable activity の存在が観測可能 activity への最適誘因を second-best 的に制約するという理論的核心である．

静学ベンチマークでは，

$$s = Be + \varepsilon, \qquad y = Hs + \eta \qquad \text{(付録 A.212)}$$

を考える．ここで，努力を観測可能タスクに対応するブロック e^o と，観測不能だが controllable なタスクに対応するブロック e^u に分け，状態も

$$s = \begin{bmatrix} s^o \\ s^u \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} e^o \\ e^u \end{bmatrix} \qquad \text{(付録 A.213)}$$

と書く．さらに，各努力ブロックが対応するタスク状態へ同時的に作用し，観測構造は s^o のみを十分に識別するとする．すなわち，

$$s^o = B_o e^o + \varepsilon^o, \qquad s^u = B_u e^u + \varepsilon^u, \qquad y = H_o s^o + \eta \qquad \text{(付録 A.214)}$$

とする．すると，s^u は controllable ではあるが observable ではないから，その方向は $\mathcal{S}_c$ には属するが $\mathcal{S}_o$ には属さず，したがって $\mathcal{S}_{co}$ から外れる．

このとき，本文第 4 節の定理 4.1 の静学版より，仮定 4.1 に対応する静学的直交性条件のもとでは，最適契約の業績感応度ベクトルは

$$\beta^* \in \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.215}$$

に属する．したがって，s^u に対応する観測不能な controllable task には，直接に契約荷重を与えることができない．すなわち，観測不能タスクは，価値にとって重要であっても，契約の本体においては直接には reward されない．

つぎに，Holmstr"om and Milgrom (1991) の中核命題である，「観測不能な重要タスクの存在が，観測可能タスクへの最適誘因を弱める」という点を示す．そのために，もっとも単純な二タスクの静学環境を考える．観測可能タスクに対する努力を e_1，観測不能タスクに対する努力を e_2 とする．対応する状態は

$$s_1 = b_1 e_1 + \varepsilon_1, \qquad s_2 = b_2 e_2 + \varepsilon_2 \tag{付録 A.216}$$

であり，業績指標は

$$y = s_1 + \eta \tag{付録 A.217}$$

とする. したがって, 第 1 タスクは observable であり, 第 2 タスクは controllable だが observable ではない．プリンシパルの価値は

$$V = r_1 s_1 + r_2 s_2 \tag{付録 A.218}$$

で与えられるとする．ここで $r_1 > 0$，$r_2 > 0$ とし，両タスクとも価値にとって重要であると仮定する．

報酬契約は

$$c = \alpha + \beta y \tag{付録 A.219}$$

とする．エイジェントの努力費用は $g(e_1, e_2)$ で与えられ，二階連続微分可能，厳密凸であり，さらに

$$\frac{\partial^2 g}{\partial e_1 \partial e_2} > 0 \tag{付録 A.220}$$

が成り立つと仮定する．この条件は，二つの努力が代替関係にあることを意味する．

この環境では，観測指標 y の分散は努力の選択に依存しないから，リスクプレミアム項は β に関して定数であり，エイジェントの effort choice には影響しない．したがって，エイジェントは

$$\max_{e_1, e_2} \{\beta b_1 e_1 - g(e_1, e_2)\} \tag{付録 A.221}$$

を解く．内部解を仮定すると，一階条件は

$$\beta b_1 = \frac{\partial g}{\partial e_1}(e_1, e_2), \qquad 0 = \frac{\partial g}{\partial e_2}(e_1, e_2) \tag{付録 A.222}$$

である．

この二式を β で微分すると，

$$b_1 = g_{11}\frac{de_1}{d\beta} + g_{12}\frac{de_2}{d\beta}, \qquad 0 = g_{21}\frac{de_1}{d\beta} + g_{22}\frac{de_2}{d\beta} \tag{付録 A.223}$$

を得る．ここで g_{ij} は g の二階偏微分である．厳密凸性より

$$\Delta := g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0 \tag{付録 A.224}$$

であるから，連立一次方程式を解けば

$$\frac{de_1}{d\beta} = \frac{b_1 g_{22}}{\Delta} > 0, \qquad \frac{de_2}{d\beta} = -\frac{b_1 g_{12}}{\Delta} < 0 \tag{付録 A.225}$$

が得られる．すなわち，観測可能タスクへの契約荷重 β を強めると，観測可能タスクの努力 e_1 は増える一方，観測不能タスクの努力 e_2 は減少する．

つぎに，プリンシパルの縮約目的関数を

$$J(\beta) = r_1 b_1 e_1(\beta) + r_2 b_2 e_2(\beta) - C(\beta) \tag{付録 A.226}$$

と書く．ここで $C(\beta)$ は参加制約を満たすための固定給調整やリスク補償を含む縮約コストである．すると，

$$J'(\beta) = r_1 b_1 \frac{de_1}{d\beta} + r_2 b_2 \frac{de_2}{d\beta} - C'(\beta) \tag{付録 A.227}$$

である．

比較のため，観測不能タスクが価値を持たないベンチマーク，すなわち $r_2 = 0$ の環境を考える．そのときの縮約目的関数を

$$J_0(\beta) = r_1 b_1 e_1(\beta) - C(\beta) \tag{付録 A.228}$$

と書けば，

$$J_0'(\beta) = r_1 b_1 \frac{de_1}{d\beta} - C'(\beta) \tag{付録 A.229}$$

である．両式を比較すると，

$$J'(\beta) - J_0'(\beta) = r_2 b_2 \frac{de_2}{d\beta} \tag{付録 A.230}$$

であり，上の結果と $r_2 b_2 > 0$ より

$$J'(\beta) - J_0'(\beta) < 0 \tag{付録 A.231}$$

が成り立つ．したがって，観測不能タスクが価値を持つ多タスク環境では，観測可能タスクへの契約荷重を一単位強めたときの限界純便益は，観測不能タスクが価値を持たないベンチマークよりも小さい．

このことは，縮約目的関数が十分に凹である限り，最適契約において観測可能タスクへの荷重が弱められることを意味する．実際，最適荷重 β^{MT} と β^{Obs} がそれぞれ

$$J'(\beta^{MT}) = 0, \qquad J_0'(\beta^{Obs}) = 0 \tag{付録 A.232}$$

で定まるとすれば，上の不等式より

$$\beta^{MT} \leq \beta^{Obs} \tag{付録 A.233}$$

が従う．

以上をまとめると，静学ベンチマークのもとでは，観測不能な controllable task は $\mathcal{S}_c$ には属するが $\mathcal{S}_o$ には属さず，したがって $\mathcal{S}_{co}$ から外れるため，直接には契約で reward されない．しかも，観測可能タスクと観測不能タスクのあいだに代替関係があるとき，観測可能タスクへのインセンティブを強めることは，観測不能タスク努力のさらなる過少供給を招く．したがって，観測可能タスクへの最適誘因は，観測不能タスクが価値にとって重要でない場合に比べて弱められる．ゆえに，本稿の静学的特殊ケースは Holmstr”om and Milgrom (1991) の多タスク論理を回復する． □

A.13　系 5.2 の証明

証明　系 5.2 の主張は，静学ベンチマーク

$$s = Be + \varepsilon, \qquad y = Hs + \eta \tag{付録 A.234}$$

のもとで，新たな業績指標 y^{new} を導入したとき，その契約上の価値が正になるのは，(i) 新指標が契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ を真に拡張する場合，または (ii) 既存の契約関連信号についての推定精度を改善する場合，に限られる，というものである．

静学環境では，可制御部分空間と可観測部分空間は

$$\mathcal{S}_c = \mathrm{Im}(B), \qquad \mathcal{S}_o = \mathrm{Im}(H') \tag{付録 A.235}$$

で与えられる．したがって，契約関連部分空間は

$$\mathcal{S}_{co} = \mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_o \tag{付録 A.236}$$

であり，契約関連信号空間は

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \tag{付録 A.237}$$

である．

新たな業績指標 $y^{new} \in \mathbb{R}^m$ を追加した後の拡張観測ベクトルを

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y \\ y^{new} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m} \tag{付録 A.238}$$

とし，その観測構造を

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ H^{new} \end{bmatrix} \tag{付録 A.239}$$

と書く．すると，拡張後の契約関連信号空間は

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} := \bar{H}(\mathcal{S}_{co}) \subseteq \mathbb{R}^{k+m} \tag{付録 A.240}$$

で与えられる．

まず，新指標を追加した問題は，旧問題を特殊ケースとして含む．実際，拡張後の契約感応度ベクトルを

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta^{new} \end{bmatrix} \tag{付録 A.241}$$

と書けば，$\beta^{new} = 0$ と置くことにより，旧来の任意の契約 (α, β) をそのまま再現できる．したがって，拡張後の可行契約集合は旧可行契約集合を包含しており，旧来の縮約目的関数を J，拡張後の縮約目的関数を $\bar{J}$ と書けば，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) \geq \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.242}$$

が成り立つ．

つぎに，

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} \supsetneq \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.243}$$

が成り立つ場合を考える．これは，新しい観測構造が，旧来は契約へ取り込めなかった契約関連状態方向を新たに observable にすることを意味する．すなわち，ある $v \in \mathcal{S}_{co}$ が存在して，

旧来の観測構造ではその像が十分に識別されなかったが，新指標追加後には対応する signal direction が明示的に観測可能になる．この場合，旧来の契約では直接 reward できなかった controllable and value-relevant state change に対して，新指標追加後には荷重をかけることが可能になる．したがって，旧来の second-best 契約が binding であり，かつその方向が価値関連であるなら，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) > \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.244}$$

が成立する．

つぎに，

$$\bar{\mathcal{Y}}_{co} = \mathcal{Y}_{co} \tag{付録 A.245}$$

であっても，新指標が既存の契約関連方向について posterior precision を改善する場合を考える．契約関連状態ブロックを x^{co} と書き，旧情報のもとでの事後推定と事後分散を

$$\hat{x}^{co,\mathrm{old}} := \mathbb{E}[x^{co} \mid y], \qquad P^{co,\mathrm{old}} := \mathrm{Var}(x^{co} \mid y) \tag{付録 A.246}$$

とし，新情報のもとでの事後推定と事後分散を

$$\hat{x}^{co,\mathrm{new}} := \mathbb{E}[x^{co} \mid y, y^{new}], \qquad P^{co,\mathrm{new}} := \mathrm{Var}(x^{co} \mid y, y^{new}) \tag{付録 A.247}$$

とする．線形ガウス環境では，情報集合が豊かになるほど条件付き分散は弱く減少するから，

$$P^{co,\mathrm{new}} \preceq P^{co,\mathrm{old}} \tag{付録 A.248}$$

が成り立つ．ここで，少なくともある契約関連方向についてこの不等号が厳密であるとき，新指標は既存の契約関連方向について posterior precision を改善している．

この場合，同じ期待 effort を誘導する契約を考えたとしても，エイジェントが負う報酬リスクは低下する．補題 4.1 の静学版より，エイジェントの certainty-equivalent cost に入るのは報酬の条件付き分散であるから，既存の契約関連方向について posterior precision が上がるということは，同じ incentive content をより低い risk premium で実装できることを意味する．したがって，value-relevant direction に関する精度改善が厳密であり，エージェントがリスク回避的であるなら，

$$\sup_{\bar{\beta}} \bar{J}(\bar{\beta}) > \sup_{\beta} J(\beta) \tag{付録 A.249}$$

が成立する．

最後に，新指標が (i) $\mathcal{Y}_{co}$ を拡張せず，(ii) 既存の $\mathcal{Y}_{co}$ 上の posterior precision も改善しない，場合を考える．このとき，新指標は契約関連状態 x^{co} に関して，本質的に新しい情報を何も与えていない．線形ガウス環境では，この場合，新指標は旧来の観測 y に関する射影部分と，それに直交する残差部分に分解できる．すなわち，

$$y^{new} = \mathbb{E}[y^{new} \mid y] + \zeta \tag{付録 A.250}$$

と書け，しかも ζ は x^{co} に関する追加情報を持たない．したがって，第一項は旧来の契約で既に再現可能な冗長成分であり，第二項は契約関連状態についての補助的フィルタにすらなっていない純粋な余剰ノイズである．ゆえに，新指標は契約上の第一義的価値を持たない．

以上により，新たな業績指標 y^{new} が strict に正の契約価値を持つのは，(i) それが契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ を真に拡張する場合，または (ii) 既存の $\mathcal{Y}_{co}$ 上の posterior precision を改善する場合に限られる．これが系 5.2 の主張である．□

A.14　命題 5.1 の証明

証明　命題 5.1 の主張は，本稿の枠組みにおいて，会計指標が契約上価値を持つのは，それが可制御であり，かつ価値関連でもある状態成分についての観測可能な情報を提供する場合である，というものである．したがって，会計指標の contracting role は，可制御・可観測部分空間をどの程度明確に信号化できるかによって特徴づけられる．

まず，本稿の枠組みでは，公的に観測される業績指標ベクトルは

$$y_t = Hs_t + Du_t + \eta_t \qquad \text{(付録 A.251)}$$

で与えられる．したがって，任意のスカラー会計指標 m_t は，ある荷重ベクトル $\lambda \in \mathbb{R}^k$ を用いて

$$m_t = \lambda' y_t \qquad \text{(付録 A.252)}$$

と表せる．ここで m_t は，会計利益，部門利益，非財務 KPI，残余利益，相対業績評価のための補助指標など，契約に組み込まれうる任意の public performance measure を表すものと解釈できる．

カルマン分解後の状態

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^{co} \\ x_t^{c\bar{o}} \\ x_t^{\bar{c}o} \\ x_t^{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad \text{(付録 A.253)}$$

に関して，命題 3.1 より，観測方程式は

$$y_t = \tilde{H} x_t + Du_t + \eta_t \qquad \text{(付録 A.254)}$$

と書け，$\tilde{H}$ は x_t^{co} と $x_t^{\bar{c}o}$ にのみ負荷を持つ．したがって，会計指標 m_t は

$$m_t = \lambda' \tilde{H}_{co} x_t^{co} + \lambda' \tilde{H}_{\bar{c}o} x_t^{\bar{c}o} + \lambda' D u_t + \lambda' \eta_t \qquad \text{(付録 A.255)}$$

と表せる．ここで重要なのは，m_t の情報内容が，(i) 可制御かつ可観測な状態成分 x_t^{co} に関する部分，(ii) 制御不能だが可観測な状態成分 $x_t^{\bar{c}o}$ に関する部分，(iii) 外生入力や純粋ノイズに関する部分，に分かれていることである．

定義 4.2 より，契約関連信号空間は

$$\mathcal{Y}_{co} = H(\mathcal{S}_{co}) \subseteq \mathbb{R}^k \qquad \text{(付録 A.256)}$$

である．ここで Π_{co} を $\mathcal{Y}_{co}$ への直交射影とし，会計指標 $m_t = \lambda' y_t$ に対応する荷重ベクトル λ を

$$\lambda = \lambda_{co} + \lambda_{\perp}, \qquad \lambda_{co} := \Pi_{co}\lambda, \qquad \lambda_{\perp} := (I - \Pi_{co})\lambda \qquad \text{(付録 A.257)}$$

と分解する．すると，

$$m_t = \lambda'_{co} y_t + \lambda'_{\perp} y_t \qquad \text{(付録 A.258)}$$

と書ける．ここで，$\lambda'_{co} y_t$ は契約関連信号空間 $\mathcal{Y}_{co}$ に属する部分であり，$\lambda'_{\perp} y_t$ はその直交補空間に属する部分である．

定理 4.1 が示すように，仮定 4.1 のもとでは，最適契約の本体は $\mathcal{Y}_{co}$ に属し，その外側の成分に荷重を置いても，努力誘因を改善せず，リスク負担のみを増加させる．したがって，仮定 4.1 のもとでは，会計指標の第一義的な契約価値は $\lambda'_{co} y_t$ によってのみ与えられる．

一方，仮定 4.1 を外した場合には，命題 4.2 が示すように，$\lambda_{\perp}' y_t$ は完全に無価値になるとは限らない．しかしその場合でも，その役割は，可制御・可観測状態成分に関する posterior inference を改善する補助的フィルタに限られる．すなわち，$\lambda_{\perp}' y_t$ は，それ自体が新たな contract-relevant state を作り出すのではなく，既に契約関連である x_t^{co} についての十分統計量をより精密に構成する限りでのみ価値を持つ．

しかし，会計指標が x_t^{co} に関する情報を持っていることだけでは，まだ十分ではない．契約にとって重要なのは，単に controllable and observable である状態一般ではなく，企業価値にとって重要な controllable and observable state だからである．これを明示するため，価値評価ベクトル r の $\mathcal{S}_{co}$ への射影を

$$r_{co} := \Pi_{\mathcal{S}_{co}} r \qquad \text{(付録 A.259)}$$

と書く．これは，価値関連な状態方向のうち，契約によって直接に対象となりうる部分を表している．

会計指標 $m_t = \lambda' y_t$ が第一義的な契約価値を持つのは，$\lambda_{co}' y_t$ が，r_{co} に対応する方向の状態情報を含むときである．逆に，$\lambda_{co}' y_t$ が $\mathcal{Y}_{co}$ に属していても，その情報が価値評価ベクトル r_{co} と直交しているなら，その指標は contractible ではあっても principal objective の改善には結びつかない．したがって，会計指標の第一義的な契約価値の必要条件は，

$$\lambda_{co}' H x \neq 0 \qquad \text{for some } x \in \mathcal{S}_{co} \text{ with } r' x \neq 0 \qquad \text{(付録 A.260)}$$

である．すなわち，その指標が，価値関連であり，かつ controllable and observable な状態方向を，非自明な形で信号化している必要がある．

以上より，本稿の枠組みにおいて，会計指標が契約上価値を持つのは，それが可制御かつ価値関連な状態成分についての観測可能な情報を提供する場合であり，その contracting role は，可制御・可観測部分空間をどの程度明確に信号化できるかによって特徴づけられる．これが命題 5.1 の主張である． □